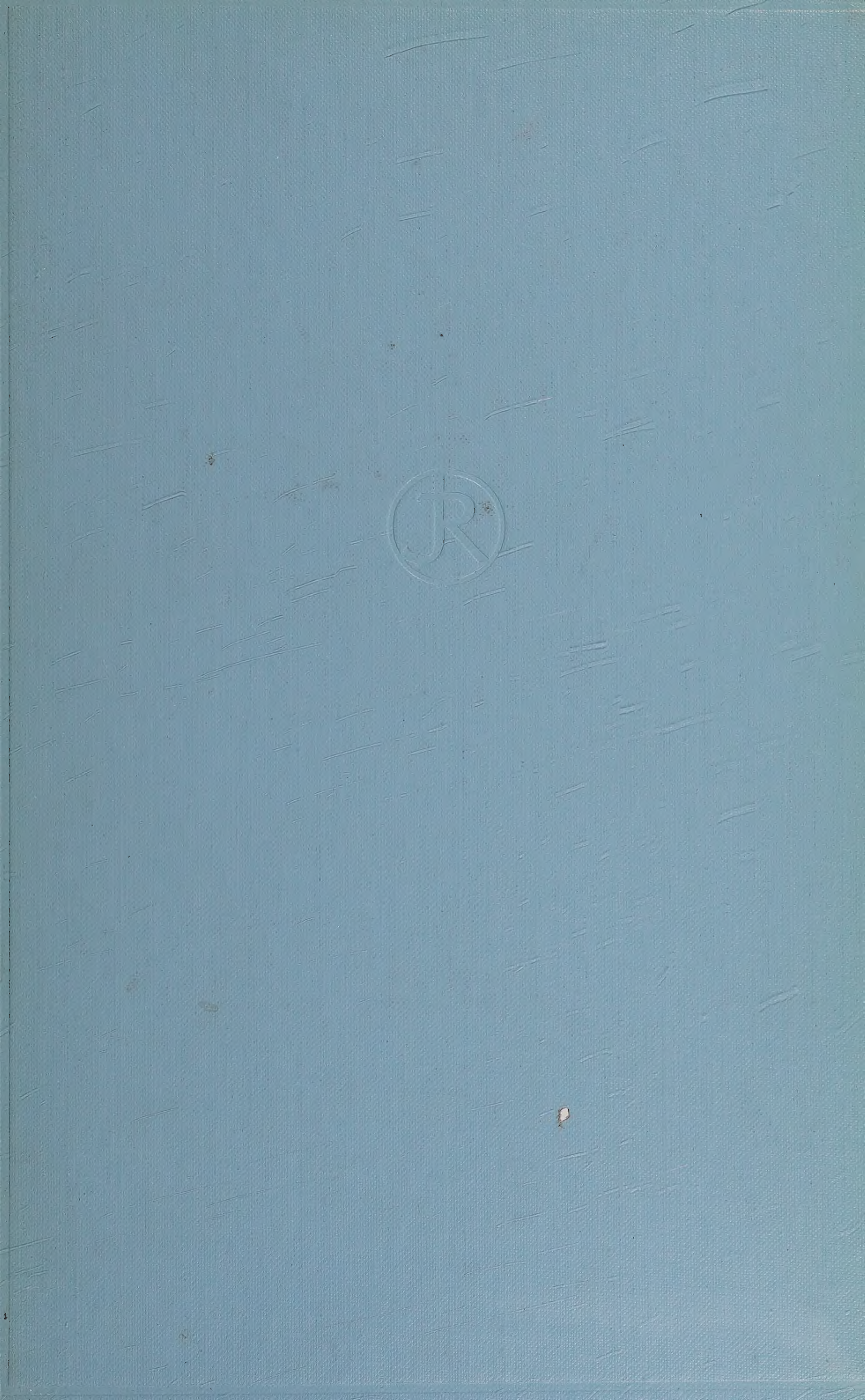




ИЗВЕСТИЯ
АКАДЕМИИ НАУК СССР

СЕРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ

Том 4

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
Москва ⋆ 1940

Reprinted with the permission of Mezhdunarodnaja Kniga, Moscow

JOHNSON REPRINT CORPORATION
111 Fifth Avenue
New York 3, New York

Johnson Reprint Company Limited
Berkeley Square House
London, W. 1

First reprinting, 1963, Johnson Reprint Corporation

Серии *Известий Академии Наук СССР* по отдельным наукам издаются в виде продолжения VII серии этого журнала (по Отделению математических и естественных наук).

До появления серий по отдельным наукам *Известия Академии Наук* издавались в следующем виде:

1° *Bulletin scientifique publié par l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.*
Tome premier, 1836 — Tome dixième, 1842.

2° *Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg.*
Tome premier, 1843 — Tome dix-septième, 1859.

3° *Bulletin de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg.*
Tome premier, 1860 — Tome trente-deux, 1888.

4° *Bulletin de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, Nouvelle Série.*
I (XXXIII), 1890 — III (XXXV), 1894.

5° *Известия Академии Наук, V серия.*
Том первый, 1894 — Том двадцать пятый, 1906.

6° *Известия Академии Наук, VI серия.*
Том I, 1907 — Том XXI, 1927.

7° *Известия Академии Наук СССР, VII серия, Отделение Физико-математических наук.*
1928 — 1930.

8° *Известия Академии Наук СССР, VII серия, Отделение математических и естественных наук.*
1931 — 1935.

Серия математическая издается с 1937 года:

№№ 1—4 (стр. 1—636)	за 1937 г.	составляют	том	1	этой	серии
№№ 1—6 (стр. 1—628)	за 1938 г.	»	»	2	»	»
№№ 1—6 (стр. 1—652)	за 1939 г.	»	»	3	»	»

С 1940 г. номер каждого тома *Математической серии* указывается на обложках и титульном листе журнала. Для удобства цитирования перед каждой статьей вместе с наименованием журнала указывается номер тома, год и страницы, на которых напечатана данная статья.

Les séries du *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS* consacrées à des sciences distinctes présentent le prolongement de la VII série de ce journal (Section des sciences mathématiques et naturelles).

Avant l'apparition des séries consacrées à des sciences distinctes le *Bulletin de l'Académie des Sciences* était publié sous la forme suivante:

1° *Bulletin scientifique publié par l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg.*
Tome premier, 1836 — Tome dixième, 1842.

2° *Bulletin de la Classe physico-mathématique de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg.*
Tome premier, 1843 — Tome dix-septième, 1859.

3° *Bulletin de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg.*
Tome premier, 1860 — Tome trente-deux, 1888.

4° *Bulletin de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, Nouvelle Série.*
I (XXXIII), 1890 — III (XXXV), 1894.

5° *Bulletin de l'Académie des Sciences de St.-Pétersbourg, V-e Série.*
Volume I, 1894 — Volume XXV, 1906.

6° *Bulletin de l'Académie des Sciences, VI Série.*
Tome I, 1907 — Tome XXI, 1927.

7° *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, VII Série, Classe des sciences physico-mathématiques.*
1928 — 1930.

8° *Bulletin de l'Académie des Sciences de l'URSS, VII Série, Classe des sciences mathématiques et naturelles.*
1931 — 1935.

La *Série mathématique* paraît depuis l'an 1937:

№№ 1—4 (pp. 1—636), 1937 constituent le tome 1 de cette série
№№ 1—6 (pp. 1—628), 1938 » » » 2 » » »
№№ 1—6 (pp. 1—652), 1939 » » » 3 » » »

A partir de l'an 1940 le numéro de chaque tome de la *Série mathématique* est indiqué sur l'enveloppe et la feuille du titre du journal. Pour qu'il soit plus facile de citer, on indique devant chaque article le titre du journal, le numéro du tome, l'année et les pages où cet article est publié.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 5—16 Série mathématique

С. Л. СОБОЛЕВ

ОБ ОЦЕНКАХ НЕКОТОРЫХ СУММ ДЛЯ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ НА СЕТКЕ

В статье обобщаются принадлежащие автору оценки, относящиеся к семействам функций с интегрируемыми производными. Эти оценки оказываются верными, если производные заменить соответственными разностными отношениями.

1. Постановка задачи

Рассмотрим в n-мерном пространстве с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоторую область D, и пусть эта область удовлетворяет следующим условиям.

Внутри области D расположен некоторый $(n-1)$-мерный куб Ω такой, что на нем можно построить конечное число криволинейных параллелепипедов Δ_i, $i=1, 2, \ldots, N$, покрывающих всю область D. Эти параллелепипеды могут быть иногда самопересекающимися, но всегда куб с координатами $0 \leqslant y_i \leqslant 1$, $i=1, 2, \ldots, n$, может быть отображен на такой параллелепипед однозначным образом, причем якобиан преобразования ограничен и отличен от нуля, а первые производные существуют и непрерывны.

Если, например, область будет просто круг $(n=2)$, тогда возможность покрыть его конечным числом четырехугольников очевидна. Достаточен даже один извилистый самопересекающийся четырехугольник.



На фигуре изображено, каким образом это покрытие осуществляется. Части незаштрихованные покрываются один раз, части с редкой штриховкой — два раза и части с густой штриховкой—три раза. Очевидно, что точки такой области будут достижимы при помощи острия подвижного сферического сектора V постоянной величины и формы с радиусом шаровой поверхности ρ и углом раствороения α. Кроме того такая область будет, очевидно, ограниченной. Ее можно целиком заключить внутрь некоторой сферы n-мерного пространства с радиусом R.

Условия, налагаемые нами на область, не являются существенными. Мы наложили их лишь в целях возможного упрощения рассуждений.

Аналогичные условия были уже рассмотрены в предыдущих работах автора *.

Построим теперь кубическую сетку в нашей области с вершинами в точках

$$x_i = -3h,\ -2h,\ -h,\ 0,\ h,\ 2h,\ 3h,\ \ldots \tag{1}$$

Рассмотрим совершенно произвольную функцию, заданную в узлах сетки

$$u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} = u\,(\alpha_1 h,\ \alpha_2 h,\ \ldots,\ \alpha_n h). \tag{2}$$

Рассмотрим первые разностные отношения для этой функции:

$$\Delta_{00\ldots\overset{(i)}{1}00\ldots0}\, u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_i+\frac{1}{2},\,\alpha_{i+1},\,\ldots,\,\alpha_n} = \frac{u_{\alpha_1,\,\alpha_2\ldots\alpha_{i+1},\ldots\alpha_n} - u_{\alpha_1\ldots\alpha_n}}{h}. \tag{3}$$

Мы относим, таким образом, разность $\Delta_{00\ldots1\ldots0}$ к точке, лежащей по середине отрезка, соединяющего те узлы сетки, в которых берутся значения функции. Аналогично строятся разности высших порядков, которые мы будем относить каждый раз к середине отрезка, на котором взяты рассматриваемые значения u.

Выбросим теперь из области D те точки сетки, которые не являются вершиной никакого куба со сторонами lh, лежащего целиком внутри D. Из оставшейся области мы сохраним наибольшую связную часть D', содержащую некоторую фиксированную точку P_0.

Исключим затем из рассмотрения все те разности, которые относятся к ребру хоть одного из таких кубов, принадлежащих взятой нами связной части D' области D.

Составим теперь выражения

$$\left.\begin{aligned} \sigma_l &= \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=l} \Big[\sum_{D'} |\Delta_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n} u|^p h^n\Big]^{\frac{1}{p}}, \\ \sigma_0 &= \Big[\sum_{D'} |u_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n}|^q h^n\Big]^{\frac{1}{q}}, \\ \sigma &= \sum_{D'} |u_{\alpha_1\ldots\alpha_n}|\, h^n, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

где

$$p > 1, \quad q > 1, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{l}{n} \tag{5}$$

и суммирование распространено на все рассматриваемые точки области D'. Сделаем еще одну важную дополнительную оговорку. Для нашей цели удобнее производить суммирование $\sum\limits_{D'} |u|^p h^n$, $\sum\limits_{D'} |u|\, h^n$ и т. д. по области D' следующим образом. Сначала для каждого куба сетки, входящего в состав D', составим среднюю арифметическую значений функций $|u|$, $|u^p|$ и т. д. в углах этого куба, а затем просум-

* См. Докл. Ак. Наук СССР, I (1936), 267—271; III (1936), 107 и 311—314; XX (1938), 5—9; Матем. сборн. 2 (44):3 (1937), 465—499; 4 (46):3 (1938), 471—497.

мируем по всем кубам, умножив на h^n. При таком способе суммирования те слагаемые, которые отвечают значению u в некоторой внутренней точке, будут входить в нашу сумму так же, как и обычно. Что же касается слагаемых, которые стоят на границе D' и точки которых принадлежат не 2^n, а меньшему числу кубов из D', то они войдут в составляемую сумму с коэффициентом, меньшим единицы. Аналогично суммы, содержащие разности, нужно построить точно таким же образом. Эта оговорка не является необходимой, она лишь несколько облегчит нашу задачу в дальнейшем.

Если считать функцию u заданной не только в узлах сетки, но и во всей области D, то величины эти при $h \to 0$ переходят соответственно в

$$\left.\begin{aligned} I_l &= \sum_{\beta_1+\ldots+\beta_n=l} \int\limits_D \cdots \int \left| \frac{\partial^l u}{dx_1^{\beta_1} \ldots dx_n^{\beta_n}} \right|^p dx_1 \ldots dx_n, \\ I_0 &= \int\limits_D \cdots \int |u|^q dx_1 \ldots dx_n, \\ I &= \int\limits_D \cdots \int |u| dx_1 \ldots dx_n. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

В работе автора «Об одной теореме функционального анализа» [Мат. сборн. 4 (46) : 3 (1938)] доказано, что между величинами I_l, I_0 и I существует неравенство

$$I_0 \leqslant M I_l + L I, \quad (7)$$

в котором постоянные M и L не зависят от направления координатных осей и от выбора функции u, а зависят лишь от вида области D, т. е. от радиуса R заключающего ее шара и от размера шарового сектора V.

Задачей настоящей статьи является доказательство следующей основной теоремы, обобщающей этот результат.

ТЕОРЕМА. *Величины σ_l, σ_0 и σ связаны неравенством*

$$\sigma_0 \leqslant M \sigma_l + L \sigma, \quad (8)$$

где M и L не зависят ни от выбора функции u, ни от параметра сетки h, а зависят лишь от формы области.

Интегральное неравенство (7), доказанное в цитированной работе в несколько измененном виде, позволило автору развить способ интегрирования нелинейных гиперболических уравнений в частных производных с помощью аппроксимации. Новые неравенства дают, очевидно, возможность развить еще один метод решения таких уравнений с помощью конечных разностей. Этот вопрос будет рассмотрен впоследствии.

2. Леммы о среднем значении

Для дальнейшего нам будет очень полезно доказать несколько совершенно элементарных лемм.

ЛЕММА I. *Для любой функции* $u(y_1, \ldots, y_n)$, *заданной в кубе* $0 \leqslant \leqslant y_i \leqslant 1$ *и дифференцируемой в нем, имеет место неравенство*

$$\left| \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} u\, dy_1 \ldots dy_n - \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n-1}} u(y_1, \ldots, y_{n-1}, 0)\, dy_1 \ldots dy_{n-1} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{\partial u}{\partial y_n} \right| dy_1 \ldots dy_n. \tag{9}$$

Доказательство этого предложения очевидно. Оно вытекает из тождества

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} u\, dy_1 \ldots dy_n - \overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n-1}} u\big|_{y_n=0}\, dy_1 \ldots dy_{n-1} =$$

$$= \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} (1-y_n) \frac{\partial u}{\partial y_n}\, dy_1 \ldots dy_n. \tag{10}$$

ЛЕММА II. *Если*

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n-1}} u(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, 0)\, dy_1 \ldots dy_{n-1} = 0, \tag{11}$$

то

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} |u|\, dy_1 \ldots dy_n \leqslant \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{\partial u}{\partial y_n} \right| dy_1 \ldots dy_n. \tag{12}$$

Для доказательства представим функцию u в виде

$$\left.\begin{aligned} u &= u_1 - u_2 \\ u_1 &= u, \quad \text{если } u \geqslant 0, \\ u_2 &= -u, \quad \text{если } u \leqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

Будем строить $\frac{\partial u_1}{\partial y_n}$ и $\frac{\partial u_2}{\partial y_n}$. При этом точки, где производная у функции u существовала, а у функции u_1 и следовательно u_2 она не существует, могут лежать на множестве меры нуль на каждой прямой

$$y_j = \text{const}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Очевидно, что

$$\overbrace{\int \cdots \int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n-1}} \left(\int_0^1 \left[\left| \frac{\partial u_1}{\partial n} \right| + \left| \frac{\partial u_2}{\partial n} \right| \right] dy_n \right) dy_1 \ldots dy_{n-1} =$$

$$= \overbrace{\int \cdots \int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i \leqslant 1 \\ i=1,2,\ldots,n}} \left| \frac{\partial u}{\partial y_n} \right| dy_1 \ldots dy_n. \tag{14}$$

Из леммы I при этом имеем

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant 1\\ i=1,2,\ldots,n}} u_1 dy_1 \ldots dy_n \leqslant \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant 1\\ i=1,2,\ldots,n-1}} u_1 dy_1 \ldots dy_{n-1} +$$

$$+ \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant 1\\ i=1,2,\ldots,n-1}} \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u_1}{\partial y_n}\right| dy_n\right) dy_1 \ldots dy_{n-1}, \tag{15}$$

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant 1\\ i=1,2,\ldots,n}} u_2 dy_1 \ldots dy_n \geqslant \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant 1\\ i=1,2,\ldots,n-1}} u_2 dy_1 \ldots dy_{n-1} -$$

$$- \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1}_{\substack{0\leqslant y_i\leqslant 1\\ i=1,2,\ldots,n-1}} \left(\int_0^1 \left|\frac{\partial u_2}{\partial y_n}\right| dy_n\right) dy_1 \ldots dy_{n-1}. \tag{16}$$

Вычитая (16) из (15) и принимая во внимание (11), получаем нашу лемму.

ЛЕММА III. *Рассмотрим среднее значение функции* u *по области с любым весом* $p(x_1, \ldots, x_n)$

$$U = \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{D} up\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{17}$$

где

$$\overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{D} p\, dx_1 \ldots dx_n = 1,$$

а также среднее значение функции u *на* $(n-1)$*-мерном кубе* Ω

$$U_0 = \frac{1}{\Omega} \overbrace{\int\cdots\int}^{n-1} u\, d\Omega. \tag{18}$$

Тогда имеет место неравенство

$$|U - U_0| \leqslant M \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{D} \sum \left|\frac{\partial u}{dx_i}\right| dx_1 \ldots dx_n, \tag{19}$$

где постоянная M *зависит от весовой функции* p *и области* D, *но не зависит от выбора функции* u.

Для доказательства ограничимся сначала тем случаем, когда U_0 равно нулю. При этом неравенство (19) приобретает вид

$$|U| \leqslant M \overbrace{\int\cdots\int}^{n}_{D} \sum \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx_1 \ldots dx_n. \tag{20}$$

Это неравенство сразу вытекает из предыдущей леммы, так как для любого из параллелепипедов Λ_i получим

$$\overbrace{\int\limits_{\Lambda_i}\cdots\int}^{n} |u|\,|p|\,dx_1\ldots dx_n \leqslant M_i \overbrace{\int\limits_{\Lambda_i}\cdots\int}^{n} \sum \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx_1\ldots dx_n \qquad (21)$$

(постоянная M_i зависит от того, какова оценка коэффициентов в преобразовании области Λ_i в параллелепипед и от максимума величины веса p). Отсюда

$$|U| \leqslant \overbrace{\int\limits_{D}\cdots\int}^{n} |u|\,|p|\,dx_1\ldots dx_n \leqslant \sum \overbrace{\int\limits_{\Lambda_i}\cdots\int}^{n} |u|\,|p|\,dx_1\ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant \sum M_i \overbrace{\int\limits_{D}\cdots\int}^{n} \sum \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| dx_1\ldots dx_n. \qquad (22)$$

Для того чтобы свести общий случай к рассмотренному частному, рассмотрим функцию $u_1 = u - U$. Для нее условия первой части леммы, очевидно, соблюдаются. Кроме того $\frac{\partial u_1}{\partial x_i} = \frac{\partial u}{\partial x_i}$.

U_1 — среднее значение u_1 по области D—будет, очевидно, выражаться так:

$$U_1 = U - U_0. \qquad (23)$$

Отсюда сразу получаем доказательство нашей леммы в общем случае.

З а м е ч а н и е. Если мы будем двигать куб Ω внутри области D, то постоянная M в формуле (19) будет, вообще говоря, изменяться. Однако если мы потребуем, например, чтобы расстояние между Ω и границей D оставалось больше некоторого фиксированного числа ε_0, можно считать M не зависящей от выбора Ω.

3. Интерполирование и вспомогательные теоремы

Чтобы доказать основную теорему, мы воспользуемся интерполированием. Вместо функции u мы в каждом кубе сетки построим свою мультилинейную функцию

$$\bar{u} = c_0 \sum c_i x_i + \sum c_{ij} x_i x_j + \ldots + \sum c_{ij\ldots k} x_i x_j \ldots x_k + \\ + \ldots + c_{12\ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n \qquad (24)$$

таким образом, чтобы она в узлах сетки принимала заданные наперед значения. Эта функция будет, очевидно, непрерывна и будет иметь ограниченные частные производные по всем переменным. Непосредственное интегрирование показывает, что среднее арифметическое от $\bar{u}$ по кубу равно среднему арифметическому значению u в вершинах.

К этой функции можно непосредственно применить теорему, доказанную нами в цитированной работе; здесь мы дадим ей несколько видоизмененную формулировку.

ТЕОРЕМА I. *Если среднее значение функции u, имеющей ограниченные производные в области D', равно нулю, то интеграл от ее q-ой степени удовлетворяет неравенству*

$$\left[\overbrace{\int_{D'}\cdots\int}^{n}|u|^q\,dx_1\ldots dx_n\right]^{\frac{1}{q}}\leqslant M\left[\overbrace{\int_{D'}\cdots\int}^{n}\sum\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^p dx_1\ldots dx_n\right]^{\frac{1}{p}},\quad (25)$$

где

$$\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}.$$

Так как доказательство этой теоремы и ее формулировка были приведены в цитированной статье несколько иначе, мы укажем, как нужно его видоизменить, чтобы убедиться в справедливости теоремы в приведенной здесь формулировке. Прежде всего заметим, что нет никакой надобности считать производные от u непрерывными функциями. Достаточна ограниченность производных. Это предложение очевидно, если заменить сначала функцию приближающейся к ней средней, а затем перейти к пределу.

Доказательство теоремы основывалось на изучении интегрального тождества (7, 13) цитированной работы, которое для нашего случая принимает вид

$$u(x_1^0,\ldots,x_n^0)=\sum\overbrace{\int_{V_0}\cdots\int}^{n}\mu_i\frac{\partial u}{\partial x_i}\,dx_1\ldots dx_n+\overbrace{\int_{V_0}\cdots\int}^{n}\mu u\,dx_1\ldots dx_n.\quad (26)$$

Здесь V_0 обозначает шаровой сектор с вершиной в точке $x_1,\ldots,x_n$, лежащей внутри области. Интеграл $\overbrace{\int_{V_0}\cdots\int}^{n}\mu\,dx_1\ldots dx_n$ равен единице, в чем легко убедиться, подставив в тождество (26) $u\equiv1$.

Первые слагаемые правой части оцениваются так же, как и раньше, на основании теоремы об обобщенных потенциалах. Для оценки последнего слагаемого воспользуемся леммой III. Проведем внутри сектора V_0 $(n-1)$-мерный куб Ω; пусть среднее значение по этому кубу будет U_0'. В силу леммы III это среднее значение отличается не больше чем на

$$M\overbrace{\int_{D'}\cdots\int}^{n}\sum\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|dx_1\ldots dx_n\quad (27)$$

как от последнего члена формулы (26), так и от среднего значения u по области (это среднее равно нулю).

Отсюда на основании классических неравенств Гёльдера и Минковского

$$\overbrace{\int \ldots \int_{V_0}}^{n} \mu u \, dx_1 \ldots dx_n \leqslant 2M \overbrace{\int \ldots \int_{D}}^{n} \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| dx_1 \ldots dx_n \leqslant$$

$$\leqslant L_1 \left[\overbrace{\int \ldots \int_{D'}}^{n} \sum \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \right]. \quad (28)$$

Из неравенства (28) легко получим доказательство теоремы. После этих замечаний мы можем перейти к доказательству второй теоремы.

ТЕОРЕМА II. *Если среднее значение* функции u, заданной на сетке в области D', равно нулю, то для этой функции имеет место неравенство*

$$\left[\sum_{D'} h^n |u|^q \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant M \left[\sum_{D'} h^n \sum_{i} |\Delta_i u|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \quad (29)$$

где

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}. \quad (30)$$

Чтобы доказать неравенство (29), мы построим прежде всего функцию $\bar{u}$ с помощью описанного процесса интерполирования. Среднее значение $\bar{u}$ по области D' равно нулю на основании сделанного замечания, поэтому функция $\bar{u}$ удовлетворяет условиям теоремы I, и мы получим

$$\left[\overbrace{\int \ldots \int_{D'}}^{n} |\bar{u}|^q dx_1 \ldots dx_n \right]^{\frac{1}{q}} \leqslant M \left[\overbrace{\int \ldots \int_{D'}}^{n} \sum \left| \frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i} \right|^p dx_1 \ldots dx_n \right]^{\frac{1}{p}}. \quad (31)$$

Переходим к оценке интересующей нас суммы

$$\left[\sum_{D'} h^n |u|^q \right]^{\frac{1}{q}} = \left[\sum h^n \frac{1}{2^n} \sum_{\lambda} |u|^q \right]^{\frac{1}{q}}, \quad (32)$$

где $\sum\limits_{\lambda}$ обозначает сумму значений $|u|^q$ в вершинах некоторого кубика λ сетки, а $\sum\limits_{D', \lambda}$ — сумму по всем кубам λ, входящим в состав D'.

Рассмотрим следующую задачу на максимум и минимум. Найдем крайние границы отношения

$$X_n^{(p)} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{2^n \int\limits_{0 \leqslant y_i \leqslant 1} \ldots \int |c_0 + \sum c_i x_i + \ldots + \sum c_{ij \ldots k} x_i x_j \ldots x_k + \ldots + c_{12 \ldots n} x_1 x_2 \ldots x_n|^p dx_1 \ldots dx_n}{|c_0|^p + |c_0 + c_1|^p + \ldots + |c_0 + c_1 + c_2 + \ldots + c_{12 \ldots n}|^p} \geqslant$$

$$\geqslant x_n^{(p)} \quad (33)$$

по всем значениям $c_0, c_1, \ldots, c_{12 \ldots n}$. Под интегралом в числителе стоит мультилинейная функция, принимающая в углах куба значения $c_0, c_1, \ldots, c_{12 \ldots n}$.

* Под средним значением мы будем понимать среднее арифметическое от средних значений u по всем кубам, из которых состоит область D'.

Минимум (33) не может быть равен нулю, а максимум бесконечности. В самом деле, в силу однородности числителя и знаменателя можно всегда считать знаменатель равным единице. При таком предположении все $c_{ij\dots k}$ будут ограничены, а следовательно будет ограниченным и числитель (33). Тем самым мы установили ограниченность максимума. Далее, если бы интеграл в числителе мог стать сколь угодно близким к нулю, то он, в силу компактности многообразия значений c, достигал бы значения нуль, и тогда, при такой системе значений $c_{ij\dots k}$, подинтегральная функция была бы везде равна нулю в силу непрерывности. Это, однако, невозможно, ибо из ее значений в углах куба по крайней мере одно отлично от нуля. Следовательно, минимум этого отношения не нуль.

После этого очевидно, что

$$\frac{1}{2^n}\sum_{\lambda}|u|^q \leqslant \frac{1}{h^n \varkappa_n^{(q)}} \overbrace{\int_{\lambda}\dots\int}^{n} |\bar{u}|^q\,dx_1\dots dx_n. \tag{34}$$

Пользуясь (34), будем иметь

$$\left[\sum_{D'} h^n |u|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \left[\frac{1}{\varkappa_n^{(q)}}\sum \overbrace{\int_{\lambda}\dots\int}^{n} |\bar{u}|^q\,dx_1\dots dx_n\right]^{\frac{1}{q}} =$$

$$= \frac{1}{\varkappa_n^{(q)\frac{1}{q}}}\left[\overbrace{\int_{D'}\dots\int}^{n} |\bar{u}|^q\,dx_1\dots dx_n\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{35}$$

Оценим теперь правую часть формулы (31). Нетрудно проверить непосредственным вычислением, что значение $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ на ребре куба сетки, параллельном оси x, равно как раз значению разностного отношения $\Delta_i u$ на середине этого ребра. Функция $\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}$ внутри куба получается тем же мультилинейным интерполированием значений этой разности на ребрах, как получалась $\bar{u}$ из u; только здесь интерполирование будет $(n-1)$-мерным. Поэтому

$$\overbrace{\int_{\lambda}\dots\int}^{n} \sum_i \left|\frac{\partial \bar{u}}{\partial x_i}\right|^p dx_1\dots dx_n \leqslant \sum_i X_{n-1}^{(p)} \sum_{\lambda} |\Delta_i u|^p h^n. \tag{36}$$

Сопоставляя (31), (35) и (36), получим искомое неравенство (29), что и требовалось доказать.

4. Доказательство основной теоремы

Рассмотрим теперь произвольную функцию u, заданную на сетке. Нетрудно видеть, что из этой функции всегда можно вычесть такой полином P, степени $l-1$, чтобы среднее значение ее и всех ее разностей до порядка $l-1$ включительно по области равнялось нулю. Чтобы

добиться этого, можно, например, последовательно выбрать сначала форму Q_{l-1} степени $(l-1)$ вида

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2\ldots\alpha_n=l-1} c_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}=Q_{l-1}$$

так, чтобы обратить в нуль средние значения по D' разностей порядка $l-1$ от $u-Q_{l-1}$; затем выбрать форму Q_{l-2} так, чтобы обратить внутрь разности порядка $l-2$ от $u-Q_{l-1}-Q_{l-2}$ и т. д.

Пусть

$$u_2=u-P$$

имеет все эти средние от разностей равными нулю.

Для u_2 и всех ее разностей до порядка $l-1$ справедлива теорема II, доказанная в предыдущем параграфе. Разности порядка l от u_2 равны соответственным разностям от функции u, поэтому мы получим серию неравенств

$$\left[\sum_{D'} h^n |u_2|^{\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{l}{n}}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{l}{n}} \leqslant M_1\left[\sum_{D',\,i} h^n |\Delta_{0\ldots 1\ldots 0}^{\;(i)} u_2|^{\frac{1}{\frac{1}{p}-\frac{l-1}{n}}}\right]^{\frac{1}{p}-\frac{l-1}{n}} \leqslant \ldots$$

$$\ldots \leqslant M_l\left[\sum_{D'}\sum_{\alpha} h^n |\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_n} u_2|^p\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{37}$$

Чтобы покончить с этим вопросом, остается связать $\left[\sum\limits_{D'} h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}}$ с $\left[\sum\limits_{D'} h^n |u|^q\right]^{\frac{1}{q}}$. Это можно было бы сделать бесчисленным множеством способов. Мы докажем предварительно следующую лемму.

ЛЕММА IV. *Рассмотрим множество всевозможных кубических ток Ξ с различным направлением координатных осей и различной величиной параметра h. Пусть это множество будет $E(\Xi)$. Рассмотрим в области D многообразие всех многочленов степени $l-1$ от $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и таких, у которых сумма квадратов коэффициентов равна единице. Каждый такой многочлен будет изображаться точкой ξ на единичной сфере в пространстве коэффициентов. Будем изучать функцию $M_\Xi(\xi)$, определенную как*

$$M_\Xi(\xi)=\sum_{\Xi} h^n |P_\xi|. \tag{38}$$

Тогда существует такое число h_0 и постоянная $m>0$, что коль скоро $h<h_0$,

$$M_\Xi(\xi)>m. \tag{39}$$

В самом деле, если мы допустим противное, то найдется такая последовательность сеток Ξ_j с параметром h, стремящимся к нулю, и такая последовательность полиномов ξ_j, что

$$M^{\Xi_j}(\xi_j)<\varepsilon,$$

где ε — любое наперед заданное число. Но так как множество ξ конечномерное, то можно выбрать из него сходящуюся подпоследовательность ξ_k, которой соответствует равномерно сходящаяся последовательность полиномов P_{ξ_k}. В силу равностепенной непрерывности этих полиномов, если только параметр h достаточно мал, величина $M_{\varepsilon_k}(\xi_k)$ будет сколь угодно близка к выражению

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} |P_{\xi_k}(x_1, \ldots, x_n)|\, dx_1 \ldots dx_n, \tag{40}$$

и следовательно, этот интеграл будет сколь угодно мал. Вместе с тем, если

$$\lim P_{\xi_k}(x_1, \ldots, x_n) = P_0(x_1, \ldots, x_n), \tag{41}$$

то

$$\overbrace{\int \cdots \int_D}^{n} |P_0(x_1, \ldots, x_n)|\, dx_1 \ldots dx_n = 0, \tag{42}$$

что противоречит тому, что у P_0 сумма квадратов коэффициентов равна единице.

Из этой леммы вытекает следствие для оценки коэффициентов полинома P, введенного выше.

Следствие. Существует такая постоянная N_1, что если h меньше h_0, то все коэффициенты полинома P могут быть оценены с помощью неравенств

$$|c_{ij\ldots k}| \leqslant N_1 \sum_{D'} h^n |P|. \tag{43}$$

После этого замечания классическое неравенство Минковского дает

$$\left[\sum_{D'} h^n |u|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant \left[\sum_{D'} h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}} + \left[\sum_{D'} h^n |P|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{44}$$

Так как в области D очевидно

$$|P| \leqslant \sum |c_{ij\ldots k}| \max|x_i| \max|x_j| \ldots \max|x_k| \leqslant N_2 \left[\sum_{D'} h^n |P|\right], \tag{45}$$

то

$$\left[\sum_{D'} h^n |P|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant N_3 \sum_{D'} h^n |P|. \tag{46}$$

Заметим далее, что

$$\sum_{D'} h^n |P| \leqslant \sum_{D'} h^n |u| + \sum_{D'} h^n |u_2|. \tag{47}$$

На основании неравенства Минковского будем иметь

$$\sum_{D'} h^n |u_2| \leqslant \left[\sum_{D'} h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{48}$$

Сопоставив (46), (47) и (48), получим

$$\left[\sum_{D'} h^n |P|^q\right]^{\frac{1}{q}} \leqslant N_3 \sum_{D'} h^n |u| + N_3 \left[\sum_{D'} h^n |u_2|^q\right]^{\frac{1}{q}}. \tag{49}$$

Из (44) и (37) имеем

$$\sigma_0 \leqslant M\sigma_l + L\sigma,$$

что и требовалось доказать.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
20. X. 1939.

S. SOBOLEFF. SUR L'ÉVALUATION DE QUELQUES SOMMES POUR UNE FONCTION DÉFINIE SUR UN RÉSEAU

RÉSUMÉ

L'auteur examine les sommes des différences finies d'une fonction définie sur un réseau

$$\sigma_0 = \sum h^n |u|^q, \quad \sigma_l = \sum \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_n=l} h_n |\Delta_{\alpha_1\alpha_2\ldots} u|^p,$$

$$\sigma = \sum h^n |u|.$$

Il démontre que pour chaque fonction u on a

$$\sigma_0 \leqslant M\sigma_l + L\sigma,$$

où les constantes M et L ne dépendent ni de la fonction u, ni du paramètre h du réseau.

Ce résultat est une généralisation des évaluations analogues pour les intégrales des dérivées d'une fonction [voir notre article «Sur un théorème d'analyse fonctionnelle», Recueil mathem. 4(46) : 3 (1938), 471—497]. Les traits principaux de la démonstration sont exposés en français dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de l'URSS.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 17—26 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В статье указывается прием решения некоторых краевых задач при помощи бесконечных систем дифференциальных уравнений.

1

Рассмотрим функциональное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \varphi\left[\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

где $l > 0$ — постоянная, $\varphi(z) \geqslant \alpha > 0$ — непрерывная функция для всех $z > 0$, имеющая конечную первую производную. Требуется найти решение $u(x, t)$ уравнения (1) по условиям

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \ u(x, 0) = F(x), \ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F_1(x).$$

Положим, что

$$F(x) = \sum_1^\infty a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad F_1(x) = \sum_1^\infty b_k \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Предположим, что ряды $\sum_1^\infty k^{5+\varepsilon} a_k^2$, $\sum_1^\infty k^{3+\varepsilon} b_k^2$, где $\varepsilon > 0$, сходятся; это условие, которое назовем условием I, влечет за собой, очевидно, что ряды $\sum_1^\infty k^2 |a_k|$ и $\sum_1^\infty k |b_k|$ также сходятся, т. е. что ряды $F''(x)$ и $F_1'(x)$ абсолютно сходятся; в частности, высказанное требование соблюдается, если $|a_k| < \frac{M}{k^{3+\varepsilon}}$, $|b_k| < \frac{M}{k^{2+\varepsilon}}$, где M — некоторая постоянная.

Покажем, что *при соблюдении условия I искомое решение существует и для достаточно малых t представляется в виде ряда* (полагаем $l = \pi$ для упрощения письма)

$$u(x, t) = \sum_{1}^{\infty} A_k(t) \sin kx, \tag{2}$$

абсолютно сходящегося так же, как и его производные первых двух порядков, где коэффициенты $A_k(t)$ определяются из бесконечной системы дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$A_k''(t) + k^2 \varphi\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi}{2} i^2 A_i^2(t)\right) A_k(t) = 0 \tag{3}$$

при начальных условиях $A_k(0) = a_k$, $A_k'(0) = b_k$.

Далее, мы покажем, что *если периодические функции* $F(x)$, $F_1(x)$ (с периодом 2π) *аналитичны, то найденное решение* (2) *существует и аналитично относительно* x *для всех вещественных* $t \gtrless 0$.

2

Покажем сначала, что *система* (3) *имеет систему решений при достаточно малых вещественных* t, *удовлетворяющую начальным условиям, если коэффициенты* a_k, b_k *удовлетворяют условию* II, *что* $\sum_{1}^{\infty} k^3 a_k^2$, $\sum_{1}^{\infty} k b_k^2$ *сходятся* (которое менее ограничительно, чем условие I).

Заметим, что если $a_k = b_k = 0$ при $k > n$, то система конечна, а потому существование решения для достаточно малых t вытекает из классической теоремы Коши. Кроме того нетрудно видеть, что в этом случае решение существует при любых t. В самом деле, умножив каждое из уравнений (3) на A_k', сложим их и проинтегрируем. Получим

$$\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} (A_k'(t))^2 + \int_{0}^{t} \sum_{1}^{\infty} k^2 A_k'(t) A_k(t) \varphi\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi}{2} k^2 A_k^2(t)\right) dt = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} b_k^2,$$

или, полагая

$$\int_{0}^{z} \varphi(z)\, dz = \Phi(z),$$

$$\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} (A_k'(t))^2 + \frac{1}{\pi} \Phi\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi}{2} k^2 A_k^2(t)\right) = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} b_k^2 + \frac{1}{\pi} \Phi\left(\sum_{1}^{\infty} \frac{\pi}{2} k^2 a_k^2\right) = C,$$

и принимая во внимание, что $\Phi(z) \geqslant \alpha z$, имеем

$$\frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} (A_k'(t))^2 + \frac{\alpha}{2} \sum_{1}^{\infty} k^2 A_k^2(t) \leqslant C, \tag{4}$$

откуда следует, что $A_k'(t)$ и $A_k(t)$ остаются ограниченными при всяком t, а потому, в частности, при n конечном, теорема Коши обеспечивает существование решения при $t + h$, если оно существует при t, где h есть постоянная, не зависящая от t, — следовательно, решение существует при всяком t. Обозначим через $A_{k,n}(t)$ решения системы (3), при условии, что $A_{k,n}(0) = a_k$, $A_{k,n}'(0) = b_k$ для $k \leqslant n$, и $A_{k,n}(0) = A_{k,n}'(0) = 0$

при $k > n$ (в таком случае также $A_{k,n}(t) = 0$ при любом t для всех $k > n$).

В силу (4), последовательность функций $A_{k,n}(t)$, а также их производных $A'_{k,n}(t)$ для каждого определенного k ограничена. Поэтому можно выбрать возрастающую последовательность чисел $n_1, n_2, \ldots, n_s, \ldots$ так, чтобы при $s \to \infty$, $A_{k,n_s}(t)$ стремились к некоторым непрерывным функциям $A_k^*(t)$ в любом данном интервале $(0, t)$, причем при s достаточно большом, $|A_{k,n_s}(t) - A_k^*(t)| < \varepsilon_k$, каковы бы ни были данные числа $\varepsilon_k > 0$ и $k \leqslant k_0$, где k_0 — данное произвольно большое число. Поэтому ряд $\sum\limits_1^\infty k^2 A_k^{*2}(t) \leqslant \frac{2C}{a}$ будет сходящимся и притом равномерно* сходящимся для достаточно малых t.

Но каждое уравнение (3) с начальными условиями $A_{k,n}(0) = a_k$, $A'_{k,n}(0) = b_k$ $(k \leqslant n)$ равнозначно уравнению

$$A_{k,n}(t) = a_k + b_k t + k^2 \int\limits_0^t (y - t)\, \varphi\Big(\sum_1^\infty \frac{\pi}{2} i^2 A_{i,n}^2(y)\Big) A_{k,n}(y)\, dy \qquad (3^{\text{bis}})$$

$$(A_{i,n}(y) = 0 \text{ при } i > n).$$

Ввиду того что все $A_{k,n_s}(t)$ $(k \leqslant n_s)$ удовлетворяют этим уравнениям, причем $A_{k,n_s}(t)$ при данном k равномерно приближается к $A_k^*(t)$ ($A_k^*(0) = a_k$, $A_k^{*\prime}(0) = b_k$) и $\sum\limits_1^\infty \frac{\pi}{2} i^2 A_{i,n_s}^2(t)$ равномерно стремится к $\sum\limits_1^\infty \frac{\pi}{2} i^2 A_i^{*2}(t)$, тем же уравнениям удовлетворяют и $A_k^*(t)$ при любом k.

Следовательно $A_k^*(t) = A_k(t)$ дважды дифференцируемы и удовлетворяют системе уравнений (3) и требуемым начальным условиям; при этом обе производные $A_k^*(t)$ являются соответственными пределами производных $A_{k,n_s}(t)$.

3

Вследствие (4) ряд $\sum\limits_1^\infty |A_k(t)|$ будет сходящимся при всех конечных t, т. е. ряд (2) будет абсолютно сходящимся. Поэтому, суммируя уравнения (3), предварительно помножив каждое на $\frac{1}{k^2}\sin kx$, можем утверждать абсолютную сходимость ряда

$$-\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} A_k''(t) \sin kx = \frac{\partial^2 u_2(x, t)}{\partial t^2},$$

* Учитывая неравенство (6) 3-го параграфа.

где

$$u_2(x, t) = -\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} A_k(t) \sin kx = \left(\frac{x}{\pi} - 1\right) \int_0^x y\, u(y, t)\, dy +$$

$$+ x \int_x^\pi \left(\frac{y}{\pi} - 1\right) u(y, t)\, dy,$$

т. е. $\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u(x, t)$.

Таким образом при достаточно малых t соблюдается уравнение

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} = \varphi\left(\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right) u(x, t). \qquad (1^{\text{bis}})$$

Для того чтобы из уравнения (1^{bis}) следовало уравнение (1), достаточно, чтобы кроме ряда (2) были абсолютно сходящимися и его производные первых двух порядков; для этого нам понадобится условие I.

Положим

$$z_{1,n} = \sum_1^\infty \left[k^3 A_{k,n}^2 + \frac{k A_{k,n}'^2}{\varphi\left(\sum_1^\infty \frac{\pi}{2} i^2 A_{i,n}^2\right)}\right],$$

где мы попрежнему полагаем $A_{k,n} = 0$ при $k > n$. Очевидно, что если $z_{1,n}$ имеет не зависимую от n верхнюю границу $L_1(t)$ для какого-нибудь t, то эта же величина $L_1(t)$ будет верхней границей также и для

$$z_1(t) = \sum_1^\infty \left[k^3 A_k^2(t) + \frac{k A_k'^2(t)}{\varphi\left(\frac{\pi}{2} \sum_1^\infty i^2 A_i^2(t)\right)}\right],$$

где

$$A_k = \lim_{n \to \infty} A_{k,n}, \quad A_k' = \lim_{n \to \infty} A_{k,n}'.$$

Предполагая ряд $\sum_1^\infty k^3 a_k^2 + k b_k^2$ сходящимся и учитывая, что $\alpha \leqslant \varphi(y) \leqslant \beta$, где β — определенная постоянная, если $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2} \sum_1^\infty k^2 A_k^2(t) \leqslant \frac{C\pi}{\alpha}$, имеем

$$z_{1,n}(0) \leqslant L_1(0) = \sum_1^\infty k^3 a_k^2 + \frac{k b_k^2}{\alpha}.$$

Принимая во внимание уравнения (3), имеем (для краткости пишем сразу z_1 вместо $z_{1,n}$)

$$\frac{dz_1}{dt} = -\frac{\pi \varphi'}{\varphi^2} \sum_1^\infty k A_k'^2 \sum_1^\infty k^2 A_k A_k'.$$

Замечая, что

$$\sum_1^\infty \frac{kA_k'^2}{\varphi} \leqslant z_1\,, \quad \frac{2}{\sqrt{\varphi}}\left|\sum_1^\infty k^2 A_k A_k'\right| \leqslant z_1\,,$$

находим

$$\left|\frac{dz_1}{dt}\right| < \frac{\pi}{2}\left|\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}}\right| z_1^2 \leqslant N z_1^2\,, \tag{5}$$

полагая $N = \max \frac{\pi}{2}\left|\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}}\right|$.

Следовательно $\left|d\frac{1}{z_1}\right| < N\,dt$, откуда $\left|\frac{1}{z_1(t)} - \frac{1}{z_1(0)}\right| < Nt$, так что для всех * $t < \frac{1}{Nz_1(0)}$ имеем

$$z_1(t) < \frac{z_1(0)}{1 - Nz_1(0)\,t}\,. \tag{6}$$

Положим вообще

$$z_{p,n} = \sum_1^\infty k^p \left[k^2 A_{k,n}^2 + \frac{A_{k,n}'^2}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty i^2 A_{i,n}^2\right)}\right].$$

В случае ограниченности $z_{p,n}$ при всяком n ряд

$$z_p = \sum_1^\infty k^p \left[k^2 A_k^2 + \frac{A_k'^2}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty i^2 A_i^2\right)}\right]$$

также будет сходящимся, поэтому для нахождения его верхней границы можем для сокращения письма оперировать непосредственно над z_p. Таким образом

$$\frac{dz_p}{dt} = -\frac{\pi\varphi'}{\varphi^2}\sum_1^\infty k^p A_k'^2 \sum_1^\infty k^2 A_k A_k'\,,$$

следовательно, подобно предыдущему,

$$\left|\frac{dz_p}{dt}\right| < \frac{\pi}{2}\left|\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi}}\right| z_p z_1 \leqslant N z_p z_1\,; \tag{5bis}$$

откуда, вследствие (6),

$$\left|\frac{d\log z_p}{dt}\right| \leqslant \frac{Nz_1(0)}{1 - Nz_1(0)\,t} \qquad \left(t < \frac{1}{Nz_1(0)}\right),$$

поэтому

$$\left|\log\frac{z_p(t)}{z_p(0)}\right| \leqslant |\log(1 - Nz_1(0)\,t)|\,.$$

Следовательно

$$z_p(t) \leqslant \frac{z_p(0)}{1 - Nz_1(0)\,t}\,.$$

* Аналогичное заключение справедливо и для $t < 0$.

В частности, полагая $p=3+\varepsilon$ и предполагая выполненным условие I, что $\sum\limits_{1}^{\infty} k^{3+\varepsilon}(k^2 a_k^2+b_k^2)$ сходится, убеждаемся в сходимости рядов $\sum\limits_{1}^{\infty} k^{5+\varepsilon} A_k^2(t)$ и $\sum\limits_{1}^{\infty} k^{3+\varepsilon} A_k'^2(t)$, откуда заключаем что *при*

$$t < NL_1(0) = N\sum_{1}^{\infty} k\left(k^2 a_k^2 + \frac{b_k^2}{\alpha}\right)$$

ряд (2)

$$u(x,\ t) = \sum_{1}^{\infty} A_k(t)\sin kx$$

сходится абсолютно вместе со своими производными первых двух порядков и представляет требуемое решение уравнения (1).

4

Допустим теперь, что заданные функции $F(x)$ и $F_1(x)$ аналитические, так что существует такое значение $R>1$ и $M>0$, что

$$k^5 a_k^2 < \frac{M}{R^k}, \quad k^3 b_k^2 < \frac{M}{R^k}. \tag{7}$$

Рассмотрим функцию $F_k(t) = k^2 A_k^2(t) + A_k'^2(t)$; из уравнений (3) имеем

$$F_k'(t) = 2A_k'(t)\,[k^2 A_k(t) + A_k''(t)] =$$

$$= 2k^2 A_k'(t)\,A_k(t)\left[1-\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum_{1}^{\infty} i^2 A_i^2(t)\right)\right],$$

поэтому

$$|F_k'(t)| < 2C_1 k^2\,|A_k'(t)\,A_k(t)| \leqslant C_1 k F_k(t),$$

где C_1 — не зависимая от t постоянная. Следовательно

$$F_k(t) < F_k(t_1)\,e^{C_1 k|t-t_1|} \leqslant F_k(t_1)\,R^k, \text{ если } e^{C_1|t-t_1|} \leqslant R.$$

Таким образом, если для некоторого t_1 ряд

$$z(t_1,\ R) = \sum_{1}^{\infty} R^k\left[k^3 A_k^2(t_1) + \frac{kA_k'^2(t_1)}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum\limits_{1}^{\infty} i^2 A_i^2(t)\right)}\right]$$

сходится, то

$$z(t,\ 1) = z_1(t) = \sum_{1}^{\infty}\left[k^3 A_k^2(t) + \frac{kA_k'^2(t)}{\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum\limits_{1}^{\infty} i^2 A_i^2(t)\right)}\right]$$

будет равномерно сходиться при $|t-t_1| \leqslant \frac{1}{C_1}\log R$. В частности, вследствие (7), $z(0,\ R)$ сходится, а потому функция $z_1(t)$ конечна и непрерывна при $t \leqslant \frac{1}{C_1}\log R$.

С другой стороны, применяя к $z(t, R)$ то же рассуждение, которое мы выше применили к $z_p(t)$, мы видим, что если $z(t, R)$ конечно при каком-нибудь значении $t = t_0$, то $z(t, R) < \frac{z(t_0, R)}{1 - Nz_1(t_0)(t - t_0)}$, пока $Nz_1(t_0)(t - t_0) < 1$.

Из этого следует, что *не может быть такого конечного значения* t, *при котором ряд* $z(t, R)$ *не был бы сходящимся.*

В самом деле, предположим, что ряд $z(t, R)$ сходится при всех положительных $t < t_1$; в таком случае, согласно доказанному выше, ряд $z_1(t)$ равномерно сходится, когда $t_1 - \frac{1}{C_1} \log R \leqslant t \leqslant t_1$. Поэтому существует такое конечное значение L, что $z_1(t) < L$ в этом промежутке; но, выбирая $t_0 < t_1$ настолько близким к t_1, чтобы $NL(t_1 - t_0) < 1$, мы видим, что $z(t_1, R)$ также должно быть конечным. Таким образом не может быть такого значения t_1, чтобы ряд $z(t, R)$ был сходящимся при всех $t < t_1$ и не был бы сходящимся при $t = t_1 + \frac{1}{2NL}$. Следовательно если начальные функции $F(x)$ и $F_1(x)$ аналитические, то ряд (2) представит решение уравнения (1) при всех вещественных t и будет при этом аналитической функцией от x.

5

Тот же метод применим и в том случае, когда вместо $\int\limits_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$ вторая часть уравнения (1) зависит от $\int\limits_0^l u^2\, dx$ или от $\int\limits_0^l \left(\frac{\partial^p u}{\partial x^p}\right)^2 dx$, где $p > 1$.

Еще проще соответствующая задача для параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \varphi\left(\int\limits_0^\pi \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(функция $\varphi > 0$ предполагается здесь лишь н е п р е р ы в н о й) об определении решения $u(x, t)$, обращающегося в нуль при $x = 0$ и $x = \pi$ при начальном условии

$$u(x, 0) = F(x) = \sum_1^\infty a_k \sin kx.$$

Действительно, полагая попрежнему

$$u(x, t) = \sum_1^\infty A_k(t) \sin kx, \tag{8}$$

имеем для определения $A_k(t)$ бесконечную систему уравнений первого порядка

$$A_k'(t)+k^2\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty i^2 A_i^2(t)\right)A_k(t)=0. \tag{9}$$

Принимая во внимание, что $\varphi>0$, заключаем, что $A_k'A_k<0$. Поэтому $A_k^2(t)$ является убывающей функцией. Следовательно, при условии, что

$$\int_0^\pi\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{t=0}^2 dx=\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty i^2 a_i^2$$

сходится, ряды $\sum\limits_1^\infty k^2A_k^2(t)$, $\sum\limits_1^\infty A_k'^2(t)$, $\sum\limits_1^\infty |A_k(t)|$ будут равномерно сходящимися при всех $t>0$.

Кроме того в данном случае абсолютно сходящимися будут не только первая производная по t и вторая производная по x ряда (8), но и все его последовательные производные по x. В самом деле, пусть $a_{k_0}\gtrless 0$ для некоторого k_0; в таком случае из (9) находим

$$\frac{A_k'(t)}{k^2A_k(t)}=\frac{A_{k_0}'(t)}{k_0^2A_{k_0}(t)},$$

откуда при всяком k

$$A_k(t)=a_k\left(\frac{A_{k_0}(t)}{a_{k_0}}\right)^{\left(\frac{k}{k_0}\right)^2}.$$

Из уравнения

$$A_{k_0}'(t)+k_0^2A_{k_0}(t)\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum_1^\infty k^2a_k\left(\frac{A_{k_0}(t)}{a_{k_0}}\right)^{\frac{k^2}{k_0^2}}\right)=0$$

определение $A_{k_0}(t)$ приводится к квадратуре

$$t=\int_{A_{k_0}}^{a_{k_0}}\frac{dz}{k_0^2z\,\varphi\left(\frac{\pi}{2}\sum\limits_1^\infty k^2a_k\left(\frac{z}{a_{k_0}}\right)^{\frac{k^2}{k_0^2}}\right)}. \tag{10}$$

Таким образом

$$u(x,t)=\sum_1^\infty a_k\left(\frac{A_{k_0}(t)}{a_{k_0}}\right)^{\frac{k^2}{k_0^2}}\sin kx, \tag{11}$$

и принимая во внимание, что $0<\frac{A_{k_0}(t)}{a_{k_0}}<1$ при $t>0$, заключаем, что ряд (11) будет *при любом* $t>0$ не только бесконечно дифференцируем по x, но будет по необходимости *аналитической целой функцией* x. Очевидно, кроме того, что $u(x,t)$ стремится к нулю

при $t=\infty$, какова бы ни была данная начальная функция $F(x)$, так как из (10) видно, что $t=\infty$ лишь при $A_{k_0}=0$.

Замечание. К квадратурам приводится также и соответствующая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi\left(\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)u,$$

решение которой задается начальными значениями

$$u(x,0)=F(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F_1(x).$$

Полагая

$$\int_0^l (F'(x))^2\,dx=A,\qquad \int_0^l F'(x)\,F_1'(x)\,dx=B,\qquad \int_0^l (F_1'(x))^2\,dx=C,$$

представим $u(x,t)$ в виде

$$u(x,t)=F(x)\,u_1(t)+F_1(x)\,u_2(t).$$

Тогда из уравнения (10) получим два уравнения

$$\frac{d^2u_1}{dt^2}=\varphi\,(Au_1^2+2Bu_1u_2+Cu_2^2)\,u_1,$$
$$\frac{d^2u_2}{dt^2}=\varphi\,(Au_1^2+2Bu_1u_2+Cu_2^2)\,u_2$$

с начальными условиями $u_1(0)=1$, $u_1'(0)=0$, $u_2(0)=0$, $u_2'(0)=1$, решение которых, как известно, приводится к квадратурам.

Математический институт им. В. А. Стеклова Академии Наук СССР.

Поступило 26. X. 1939.

S. BERNSTEIN. SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

RÉSUMÉ

On considère les équations de la forme suivante

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\varphi\left(\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\tag{1}$$

l est une constante et $\varphi(y)\geqslant\alpha>0$ est une fonction continue de $y\geqslant 0$ admettant une dérivée finie. On cherche la solution de (1) satisfaisant aux conditions

$$u(0,t)=u(l,t)=0,\quad u(x,0)=F(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=F_1(x).$$

En posant

$$F(x)=\sum_{1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \quad F_1(x)=\sum_{1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

on démontre que la solution existe pour t suffisamment petit, sous la condition

$$\sum_{1}^{\infty} k^{3+\varepsilon}[k^2 a_k^2 + b_k^2] < \infty \qquad (\varepsilon > 0). \tag{I}$$

De plus, si $F(x)$ et $F_1(x)$ sont des fonctions analytiques de x, la solution existe pour toute valeur réelle de t et est analytique par rapport à x.

La même méthode qui ramène le problème à l'intégration d'une infinité d'équations différentielles est ensuite appliquée à d'autres équations analogues à (1).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 27—36 Série mathématique

И. М. ВИНОГРАДОВ

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПО ДАННОМУ МОДУЛЮ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ, ПРИНАДЛЕЖАЩИХ АРИФМЕТИЧЕСКОЙ ПРОГРЕССИИ

В статье выводится довольно общая теорема, характеризующая распределение по данному модулю простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии.

В моей предыдущей работе* была дана довольно общая теорема, характеризующая распределение наименьших положительных вычетов по модулю q простых чисел некоторого интервала

$$N-A<p\leqslant N.$$

В настоящей работе тот же вопрос решается и для простых чисел, принадлежащих арифметической прогрессии. И здесь при весьма широких условиях оказывается возможным установить равномерное распределение наименьших положительных вычетов с довольно хорошими оценками.

Однако в настоящей работе я уже не буду излагать решение с той полнотой, как это было в указанной выше работе. Я ограничусь лишь основным случаем, при рассмотрении которого характерные особенности моего метода выступают наиболее отчетливо.

При изложении доказательств я буду опираться на некоторые леммы моей предыдущей работы. Эти леммы я привожу без доказательств.

Обозначения. Символом θ обозначаем число с условием $|\theta|\leqslant 1$. Полагаем

$$\{x\}=x-[x],\quad (x)=\min(\{x\},\ 1-\{x\}).$$

Буквою p обозначаем простое число. Символические неравенства

$$A\ll B,\quad B\gg A$$

показывают, что $A=O(B)$.

ЛЕММА 1. *Пусть* N — *целое* $>N_0$, *где* N_0 — *достаточно большое постоянное* >2, $r=\log N$, D *обозначает произведение простых* $\leqslant\sqrt{N}$,

* Известия Ак. Наук СССР, серия матем., 1939, стр. 371—398.

h — положительное постоянное $\leqslant \frac{1}{6}$, $\lambda = 1 + h$. *Тогда все делители* $d \leqslant N$ *числа* D *можно разбить на*

$$< r^{\frac{\log r}{\log \lambda}}$$

классов с условием, что для каждого из этих классов существует целое положительное τ *и* 3τ *чисел* $\gamma_1, \ldots, \gamma_\tau, G_1, \ldots, G_\tau, l_1, \ldots, l_\tau$ *со следующими свойствами:*

$$G_1 \geqslant G_2 \geqslant \ldots \geqslant G_\tau; \quad \gamma_s^\lambda = G_s; \quad l_s \geqslant 0;$$

всякое d, *принадлежащее выбранному классу, представляется в виде произведения*

$$d = g_1 \ldots g_\tau,$$

где g_s *есть произведение ровно* l_s *простых чисел* p *с условием*

$$\gamma_s \leqslant p^{l_s} < G_s,$$

так что

$$\gamma_s \leqslant g_s < G_s.$$

ЛЕММА 2. *Пусть* M *и* P — *целые,*

$$P > 0, \quad W \geqslant 1,$$

$$\alpha = \frac{a}{q}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 0,$$

$$S = \sum_{y=M+1}^{M+P} \min\left(W, \frac{1}{2(\alpha y)}\right).$$

Тогда имеем

$$S \ll \left(\frac{P}{q} + 1\right)(W + q \log q).$$

ЛЕММА 3. *Пусть* $N > 2$, $r = \log N$,

$$1 < d_0 < A \leqslant N, \quad \alpha = \frac{a}{q}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q < N.$$

Тогда имеем

$$\sum_{0 < d \leqslant d_0} \min\left(\frac{A}{d}, \frac{1}{2(\alpha d)}\right) \ll \left(d_0 + q + \frac{A}{q}\right) r.$$

ЛЕММА 4. *Пусть заданы две последовательности* (u) *и* (v) *целых положительных чисел,* $N \geqslant N_0$, *где* N_0 — *достаточно большое постоянное* > 1, $r = \log N$,

$$1 \leqslant U_1 < U_2 \leqslant N, \quad Q \leqslant A \leqslant N,$$

$$\alpha = \frac{a}{q}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant N,$$

$$0 \leqslant L < Q, \quad (Q, L) = 1, \quad (Q, q) = 1,$$

$$S = \sum_u \sum_v \varphi(u) e^{2\pi i a u v},$$

где суммирование распространяется на все системы значений u и v, принадлежащих последовательностям (u) и (v) и удовлетворяющих условиям

$$U_1 < u \leqslant U_2, \quad N - A < uv \leqslant N,$$

$$uv \equiv L \pmod{Q};$$

далее $\varphi(u)$ обозначает функцию, для рассматриваемых значений u, удовлетворяющую условию

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant f.$$

Тогда имеем

$$S \ll \frac{A}{Q} f r^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{U_2 Q}{A} + \frac{NQ}{AU_1} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}.$$

Доказательство. 1° Пусть S_{gh} обозначает сумму тех слагаемых суммы S, для которых

$$u \equiv g \pmod{Q}, \quad v \equiv h \pmod{Q}.$$

Тогда соответственно $\leqslant Q$ парам значений g и h, удовлетворяющих условию

$$gh \equiv L \pmod{Q},$$

сумма S разобьется на $\leqslant Q$ сумм S_{gh}. Поэтому в дальнейшем достаточно оценивать лишь суммы вида S_{gh}.

2° Весь интервал

$$U_1 < u \leqslant U_2$$

мы подразделим на $\ll r$ интервалов вида

$$U < u \leqslant U_0, \quad U_0 \leqslant 2U.$$

3° Рассмотрим часть S_0 суммы S_{gh}, отвечающую одному из таких интервалов. Подразделив в свою очередь последний интервал на

$$\ll \frac{N}{A}$$

новых интервалов вида

$$u_1 < u \leqslant u_2, \quad u_2 - u_1 \ll \frac{UA}{N},$$

будем иметь

$$S_0 = \sum S_1, \quad S_1 = \sum_{\substack{u_1 < u \leqslant u_2 \\ u \equiv g \pmod{Q}}} \varphi(u) \sum_{\substack{\frac{N-A}{u} < v \leqslant \frac{N}{u} \\ v \equiv h \pmod{Q}}} e^{2\pi i a u v}$$

$$S_1^2 \ll \left(\frac{UA}{QN} + 1\right) f^2 R; \quad R = \sum_u \sum_v e^{2\pi i a u (v - v_1)},$$

причем в последнем равенстве u прсбегает уже все целые числа с условиями $u_1 < u \leqslant u_2$, $u \equiv g \pmod Q$, а не только те, которые принадлежат последовательности (u).

Чтобы оценить R, изменим порядок суммирования. Очевидно v и v_1 могут принимать лишь значения с условиями

$$\frac{N-A}{u_2} < v \leqslant \frac{N}{u_1}, \quad \frac{N-A}{u_2} < v_1 \leqslant \frac{N}{u_1},$$

а u, при выбранных v и v_1, пробегает значения, лежащие в интервале

$$u' < u \leqslant u'',$$

$$u' = \max\left(u_1, \frac{N-A}{v}, \frac{N-A}{v_1}\right), \quad u'' = \min\left(u_1, \frac{N}{v}, \frac{N}{v_1}\right).$$

(Следует помнить при этом, что u, v и v_1 пробегают лишь числа, принадлежащие указанным выше арифметическим прогрессиям с разностью Q.) Поэтому, ввиду $u'' - u' \leqslant u_2 - u_1 \ll \frac{UA}{N}$, имеем

$$R \ll \sum_{v} \sum_{v_1} \min\left(\frac{UA}{QN} + 1, \frac{1}{2\,(\alpha\,(v - v_1))}\right),$$

или, замечая, что v, при данном v_1, пробегает числа, лежащие в интервале длиною

$$\frac{N}{u_1} - \frac{N-A}{u_2} = \frac{N(u_2 - u_1) + Au_1}{u_1 u_2} \ll \frac{A}{U},$$

согласно лемме 2 будем иметь

$$R \ll \left(\frac{A}{QU} + 1\right)\left(\frac{A}{qQU} + 1\right)\left(\frac{UA}{QN} + qr\right).$$

Вместе с тем окажется

$$S_1^2 \ll \left(\frac{UA}{QN} + 1\right) f^2 \left(\frac{A}{QU} + 1\right)\left(\frac{A}{qQU} + 1\right)\left(\frac{UA}{QN} + qr\right),$$

$$S_0 \ll \frac{N}{A} f \sqrt{\left(\frac{A}{QN} + \frac{1}{U}\right)\left(\frac{A}{Q} + U\right)\left(\frac{A}{qQ} + U\right)\left(\frac{A}{QN} + \frac{qr}{U}\right)} \ll$$

$$\ll \frac{A}{Q^2} f \sqrt{r} \sqrt{\left(1 + \frac{QN}{UA}\right)\left(1 + \frac{qQN}{UA}\right)\left(1 + \frac{QU}{A}\right)\left(\frac{1}{q} + \frac{QU}{A}\right)} \ll$$

$$\ll \frac{A}{Q^2} f \sqrt{r} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{QU_2}{A} + \frac{QN}{U_1 A} + \frac{qQ^2 N}{A^2}}$$

и вместе с тем очевидно

$$S \ll \frac{A}{Q} f r^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{U_2 Q}{A} + \frac{NQ}{AU_1} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}.$$

ТЕОРЕМА 1. *Пусть η — произвольно малое положительное постоянное $\leqslant \frac{1}{6}$,*

$$N > 2, \quad 1 \leqslant A \leqslant N,$$

$$\alpha=\frac{a}{q},\ (a,\ q)=1,\ 0<q\leqslant N,$$
$$0\leqslant L<Q,\ (Q,\ L)=1,\ (Q,\ q)=1,$$
$$S=\sum_{\substack{N-A<p\leqslant N\\ p\equiv L\ (\mathrm{mod}\ Q)}} e^{2\pi i\alpha q}$$

Тогда имеем

$$S\ll\frac{A}{Q}N^{\eta}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{N^{\frac{2}{3}}Q}{A}+\frac{NQ^2q}{A^2}}.$$

Доказательство. 1° Имеем

$$S=\sum_{d}\sum_{m}\mu(d)\,e^{2\pi i\alpha dm}+O(\sqrt{N}),$$

где d пробегает делители произведения всех простых чисел $\leqslant\sqrt{N}$, а m пробегает числа натурального ряда, причем суммирование распространяется на область

$$N-A<dm\leqslant N,$$
$$dm\equiv L\,(\mathrm{mod}\,Q).$$

Далее находим

$$\sum_{d}\sum_{m}\mu(d)\,e^{2\pi i\alpha dm}=T_0-T_1,$$

где T_0 есть сумма слагаемых, отвечающих значениям d с четным числом простых делителей, и T_1 есть сумма слагаемых, отвечающих значениям d с нечетным числом простых делителей. Мы рассмотрим далее какую-либо одну из сумм T_0 и T_1, которую обозначим символом T_2.

2° Числа d мы разобьем на классы с условиями, указанными в лемме 1, сохраняя все обозначения леммы 1.

3° Числа m мы также разобьем на $\ll r$ классов. Одному и тому же классу будут принадлежать все числа m, лежащие в некотором интервале вида

$$M<m\leqslant M_0,\quad M_0\leqslant 2M.$$

4° Часть суммы T_2, отвечающую выбранным классам значений d и m, мы обозначим символом T_3.

5° Пусть сначала

$$MG_1\ldots G_\tau>N^{\frac{1}{3}},$$

причем β — первое из чисел $1,\ldots,\tau$ с условием

$$MG_1\ldots G_\beta>N^{\frac{1}{3}}.$$

6° Пусть $\beta>1$. Тогда, полагая

$$u=mg_1\ldots g_\beta,\quad v=g_{\beta+1}\ldots g_\tau,$$

имеем

$$MG_1 \ldots G_{\beta-1} \leqslant N^{\frac{1}{3}}, \ G_\beta \leqslant G_{\beta-1}, \ MG_1 \ldots G_\beta \leqslant N^{\frac{2}{3}}.$$

Поэтому в рассматриваемом случае

$$T_3 = \sum_u \sum_v \varphi(u) e^{2\pi i \alpha u v},$$

где u и v пробегают целые числа с условиями

$$N^{\frac{1}{3\lambda}} < u \leqslant 2N^{\frac{2}{3}}, \ N - A < uv \leqslant N,$$

$$uv \equiv L \pmod{Q},$$

причем $|\varphi(u)| \ll N^{\eta_0}$; $\eta_0 \leqslant \frac{\eta}{2}$. Применяя лемму 4, получим

$$T_3 \ll \frac{A}{Q} N^{\eta_0} r^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{N^{\frac{2+h}{3}} Q}{A} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}, \quad r = \log N.$$

7° Пусть $\beta = 1$. Полагая ради краткости $l_1 = \varkappa$ и обозначая символом $\varkappa_1$ наименьшее целое с условием

$$MG_1^{\frac{\varkappa_1}{\varkappa}} > N^{\frac{1}{3}},$$

мы каждое d представим в форме

$$d = uv,$$

где u есть произведение $\varkappa_1$ простых сомножителей числа g_1, а v является произведением $\varkappa - \varkappa_1$ оставшихся сомножителей g_1 и всех $g_2, \ldots, g_\tau$.

Здесь имеем (при $\varkappa_1 > 1$)

$$T_3 = \frac{1}{\binom{\varkappa}{\varkappa_1}} T'_3; \ T'_3 = \sum_m \sum_u \sum_{\substack{v \\ (u,v)=1}} e^{2\pi i \alpha m u v}$$

Так же, как и раньше, выводим

$$N^{\frac{1}{3\lambda}} < mu \leqslant 2N^{\frac{2}{3}}.$$

Далее находим

$$T'_3 = \sum_\delta \mu(\delta) W_\delta, \ W_\delta = \sum_m \sum_{u_1} \sum_{v_1} e^{2\pi i \alpha \delta^2 m u_1 v_1},$$

где δ пробегает все делители числа g_1 и, при данном δ, u_1 и v_1 пробегают частные от деления чисел u и v на δ. Далее, применяя лемму 4, следует помнить, что дробь $\alpha\delta^2$ после сокращения сводится к дроби, знаменатель которой $\geqslant q\delta^{-2}$. Наконец, необходимо отметить, что переменные m, u_1 и v_1 пробегают значения с условием

$$\frac{N^{\frac{1}{3}}}{\delta} < mu_1 \leqslant \frac{2N^{\frac{2}{3}}}{\delta}, \quad \frac{N-A}{\delta^2} < mu_1 v_1 \leqslant \frac{N}{\delta^2},$$

$$mu_1 v_1 \delta^2 \equiv L \pmod{Q}.$$

8° Очевидно $\delta \leqslant \sqrt{N}$. Пусть, кроме того,

$$\delta \leqslant \delta_0 = \min\left(N^{\frac{1-h}{3}}, \sqrt{\frac{A}{Q}}\right).$$

Тогда можно применить лемму 4. Имеем

$$W_\delta \ll \frac{A}{\delta^2 Q} N^{\eta_0} r^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\delta^2}{q} + \frac{N^{\frac{2+h}{3}} Q\delta}{A} + \frac{NQ^2 q\delta^2}{A^2}}.$$

9° Если $\delta > \delta_0$, то очевидно

$$W_\delta \ll \frac{AN^{\eta_0}}{Q\delta^2} + \frac{N^{\frac{1}{2}+\eta_0}}{\delta}.$$

10° Ввиду 8° и 9°, суммируя на все δ, находим

$$T_3 \ll \frac{A}{Q} N^{\eta_0} r^{\frac{5}{2}} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{N^{\frac{2+h}{3}} Q}{A} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}.$$

Весьма просто тот же самый результат получим и при $\varkappa_1 = 1$.

11° Теперь рассмотрим случай

$$M > N^{\frac{1}{3}}.$$

В этом случае $d < N^{\frac{2}{3}}$ и

$$T_d = \sum_d S_d, \quad S_d = \sum_m e^{2\pi i \alpha d m},$$

где d и m пробегают числа избранных классов. При этом m в сумме S_d пробегает значения с условием

$$M < m \leqslant M_0, \quad \frac{N-A}{d} < m \leqslant \frac{N}{d}.$$

Здесь имеем при $A \geqslant N^{\frac{2}{3}} Q$

$$S_d \ll \min\left(\frac{A}{dQ}, \frac{1}{2(\alpha d)}\right)$$

и потому, согласно лемме 3,

$$T_3 \ll \left(N^{\frac{2}{3}} + q + \frac{A}{Qq}\right) r.$$

12° Наконец, в случае

$$MG_1 \ldots G_\tau \leqslant N^{\frac{1}{3}}$$

имеем

$$T_3 \ll N^{\frac{1}{3}} r.$$

13°. Собирая доказанное в 1°, 2°, 4°, 6°, 11°, 12° и полагая $h=\eta_0$, получим

$$S \ll \frac{A}{Q} N^{\eta} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{N^{\frac{2}{3}} Q}{A} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* ε — *произвольно малое положительное постоянное* $\leqslant \frac{1}{6}$,

$$N > 2,\ Q \leqslant A \leqslant N,$$
$$0 \leqslant L < Q,\ (Q, L)=1,\ 0 < q \leqslant N,\ (Q,\ q)=1,$$
$$0 < \sigma \leqslant 1.$$

Все простые числа p *с условием*

$$N - A < p \leqslant N,$$
$$p \equiv L \pmod{Q},$$

мы заменим их наименьшими положительными вычетами по модулю q. *Пусть* T *обозначает число всех этих вычетов (т. е. число всех простых чисел, удовлетворяющих вышеуказанному условию) и* T_1 *обозначает число тех из них, которые лежат в интервале*

$$0 \leqslant P < \sigma q.$$

Тогда имеем

$$T_1 = \sigma T + O\left(\frac{A}{Q} \Delta\right);$$

$$\Delta = N^{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{q} + \frac{N^{\frac{2}{3}} Q}{A} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}.$$

Доказательство. Обозначая буквою q_1 наибольшее целое число $< \sigma q$, имеем

$$qT_1 = \sum_{s=0}^{q_1} \sum_{k=0}^{q-1} \sum_{\substack{N-A<p\leqslant N \\ p\equiv L \pmod{Q}}} e^{2\pi i \frac{k(p-s)}{q}}.$$

Суммируя все члены правой части, отвечающие случаю $k=0$, получим

$$Tq_1.$$

Пусть теперь $k>0$, причем $(k,\ q)=\delta$. Тогда для суммы T_{1k} слагаемых правой части, отвечающих такому k, получим оценку

$$T_{1k} \ll \frac{A}{Q} N^{\eta} \sqrt{\frac{\delta}{q} + \frac{N^{\frac{2}{3}} Q}{A} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}\ \frac{1}{2\left(\frac{k}{q}\right)},\ \eta = \frac{\varepsilon}{3}.$$

Сумма всех T_{1k}, отвечающих данному δ, будет

$$\ll \frac{A}{Q} N^{\eta} r \frac{q}{\delta} \sqrt{\frac{\delta}{q} + \frac{N^{\frac{2}{3}} Q}{A} + \frac{NQ^2 q}{A^2}}.$$

Отсюда, замечая, что δ может иметь лишь $\ll N^{\eta}$ значений, получим

$$qT_1 - Tq_1 \ll \frac{A}{Q} q\Delta,$$

откуда, ввиду

$$\frac{q_1}{q} - \delta \ll \frac{1}{q}, \quad \frac{T}{q} \ll \frac{A}{Q} \Delta,$$

теорема следует непосредственно.

Пример 1. Положим $A = N$, $Q = \left[N^{\frac{1}{6}}\right]$, $q = \left[N^{\frac{1}{2}}\right]$, $\delta = \frac{1}{2}$. Тогда будем иметь

$$T_1 = \frac{1}{2} T + O\left(\frac{N^{1+\varepsilon-\frac{1}{12}}}{Q}\right).$$

Пример 2. Полагая $A = N^{0,9}$, $Q = [N^{0,1}]$, $q = [N^{0,5}]$, $\delta = \frac{1}{2}$, будем иметь

$$T_1 = \frac{1}{2} T + O\left(\frac{A}{Q} N^{\varepsilon - \frac{1}{20}}\right).$$

Видоизменение теоремы 2. Пусть ε — произвольно малое положительное постоянное $\leqslant \frac{1}{6}$, $N > 2$, $Q \leqslant A \leqslant N$,

$$0 \leqslant L < Q, \ (Q, L) = 1, \ 0 < q \leqslant N, \ (Q, q) = 1,$$
$$0 \leqslant \sigma \leqslant 1.$$

Рассмотрим все простые числа p с условием

$$N - A < p \leqslant N,$$
$$p \equiv L \pmod{Q}.$$

Представляя каждое такое p в форме

$$p = Qz + L,$$

заменим все z их наименьшими положительными вычетами Z по модулю q. Пусть T обозначает число всех этих вычетов (т. е. число всех простых чисел, удовлетворяющих вышеуказанному условию) и T_0 обозначает число тех из них, которые лежат в интервале

$$0 \leqslant Z < \sigma q.$$

Тогда имеем

$$T_0 = \sigma T + O\left(\frac{A}{Q} \Delta\right);$$

$$\Delta = N^{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{N^{\frac{2}{3}}Q}{A}+\frac{NQ^2q}{A^2}}\,.$$

Доказательство аналогично только что приведенному, так как здесь имеем

$$qT_0=\sum_{s=0}^{q_1}\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{\substack{N-A<p\leqslant N\\ p\equiv L \pmod Q}} e^{2\pi i\frac{k(p-Qs-L)}{q}}\,.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
28.XI.1939.

I. VINOGRADOW. DISTRIBUTION OF PRIMES OF AN ARITHMETICAL PROGRESSION TO A GIVEN MODULUS

SUMMARY

In the present paper we consider the problem of the distribution of primes of an arithmetical progression to a given modulus. We prove the following general

THEOREM. *Let* η *be an arbitrary positive constant* $\leqslant \frac{1}{6}$,

$$N>2,\ 1\leqslant A\leqslant N,$$

$$\alpha=\frac{a}{q},\ (a,q)=1,\ 0<q\leqslant N,$$

$$0\leqslant L<Q,\ (Q,L)=1,\ (Q,q)=1,$$

$$S=\sum_{\substack{N-A<p\leqslant N\\ p\equiv L \pmod Q}} e^{2\pi i\alpha p}.$$

Then we have

$$S\ll\frac{A}{Q}N^{\eta}\sqrt{\frac{1}{q}+\frac{N^{\frac{2}{3}}Q}{A}+\frac{NQ^2q}{A^2}}\,.$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 37–52 Série mathématique

Б. А. ВЕНКОВ

О ПРИВЕДЕНИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ КВАДРАТИЧНЫХ ФОРМ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе дается новый принцип приведения положительных квадратичных форм с n переменными, показывающий, что, начиная с $n=3$, существует континуум неэквивалентных выпуклых пирамид приведения с конечным числом граней. Тем самым оказывается решенной общая задача о свободе выбора основной области приведения.

ВВЕДЕНИЕ

Пусть

$$f(x_i) = \sum_{1}^{n} a_{ij} x_i x_j \quad (a_{ij} = a_{ji}) \tag{1}$$

— вещественная квадратичная форма с n переменными и

$$k = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2}$$

Форме (1) соответствует точка f с координатами a_{ij} $(i \leqslant j)$ в k-мерном пространстве $\mathfrak{F}$. Обозначим через $\mathfrak{P}$ множество точек $\mathfrak{F}$, для которых все диагональные миноры симметрической матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{3}$$

неотрицательны; положительным квадратичным формам соответствуют точки внутри $\mathfrak{P}$. Пусть G_n — группа унимодулярных подстановок n переменных $x_1, \ldots, x_n$ (т. е. линейных подстановок с целыми коэффициентами и определителем ± 1). Две формы назовем эквивалентными, если они связаны подстановкою группы G_n.

Задача приведения положительных форм состоит в отыскании внутри $\mathfrak{P}$ фундаментальной области группы G_n. Существование такой области для любого n в виде линейной пирамиды с конечным числом граней и вершиной в начале координат было впервые доказано Г. Минковским ([1]) [см. также прекрасный обзор Б. Н. Делоне ([2]), §§ 21 — 27]. Пирамида Минковского носит частный характер. Целью настоящей работы является построение более общей фундаментальной области, зависящей от про-

извольной положительной формы φ [область $V(\varphi)$, §§ 5—6]; при этом я пользуюсь свойствами так называемых совершенных форм [formes parfaites] Г. Ф. Вороного ([3]). Такое общее построение фундаментальной области позволяет ответить на некоторые принципиальные вопросы об этих областях, поставленные Б. Н. Делоне (см. § 10 настоящей статьи).

Конус положительности и совершенные формы

§ 1. Пусть

$$f = \sum a_{ij} x_i x_j, \quad \varphi = \sum b_{ij} x_i x_j$$

две квадратичные формы; положим

$$(f, \varphi) = \sum a_{ij} b_{ij} = a_{11} b_{11} + \ldots + a_{nn} b_{nn} + 2a_{12} b_{12} + \ldots + 2a_{n-1,n} b_{n-1,n}. \quad (4)$$

Очевидно, что при

$$\varphi = \sum \rho (\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n)^2$$

имеем

$$(f, \varphi) = \sum \rho f(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n). \quad (5)$$

Пусть $S = (p_{ij})$ квадратная матрица из n^2 элементов определителя Δ и S_1 — матрица алгебраических дополнений элементов S; обозначая вообще через fS квадратичную форму

$$f(p_{11} x_1 + \ldots + p_{1n} x_n,\ p_{21} x_1 + \ldots + p_{2n} x_n,\ \ldots,\ p_{n1} x_1 + \ldots + p_{nn} x_n),$$

можем записать еще свойство выражения (4):

$$(fS, \varphi S_1) = \Delta^2 (f, \varphi). \quad (6)$$

В частности, при $\Delta = \pm 1$, имеем

$$(fS, \varphi S'^{-1}) = (f, \varphi), \quad (7)$$

причем $'$ и $^{-1}$ суть, как обычно, знаки транспонированной и обратной матрицы.

§ 2. Определение конуса положительности $\mathfrak{P}$, данное во введении, можно заменить таким: $\mathfrak{P}$ есть множество форм f, для которых $f(x_i) \geqslant 0$ при всех вещественных x_i. Если форма (1) лежит на границе $\mathfrak{P}$, то один из диагональных миноров d_0 матрицы (3) равен 0; тогда и все диагональные миноры, охватывающие d_0, равны 0, так что и определитель формы f равен 0. По второму определению, для формы f, лежащей на границе $\mathfrak{P}$, имеем $f(x_i) = 0$ при некоторых вещественных, не равных одновременно нулю значениях x_i.

Пусть форма (1) пробегает конус $\mathfrak{P}$; множество точек $\bar{f}$ в $\mathfrak{F}$ с координатами

$$(a_{11}, \ldots, a_{nn}, 2a_{12}, \ldots, 2a_{n-1,n})$$

назовем *союзным* конусом $\overline{\mathfrak{P}}$. Плоскость в $\mathfrak{F}$ (с текущими координатами a_{ij})

$$p_{11} a_{11} + \ldots + p_{nn} a_{nn} + p_{12} a_{12} + \ldots + p_{n-1,n} a_{n-1,n} = M \quad (8)$$

назовем эллиптическою, параболическою или гиперболическою для конуса $\mathfrak{P}$, смотря по тому, проходит ли нормаль (εp_{ij}) (при надлежащем выборе знака $\varepsilon = \pm 1$) внутри, на границе или вне конуса $\overline{\mathfrak{P}}$. Эллиптическая плоскость либо не пересекает $\mathfrak{P}$, либо отсекает от него кусок конечных размеров; параболическая плоскость при $M=0$ касается $\mathfrak{P}$, гиперболическая плоскость при всяком M пересекает $\mathfrak{P}$. Плоскость (8) назовем эллиптическою, параболическою или гиперболическою для $\overline{\mathfrak{P}}$, смотря по тому, проходит ли нормаль (εp_{ij}) внутри, на границе или вне конуса $\mathfrak{P}$. Эти плоскости обладают для $\overline{\mathfrak{P}}$ теми же свойствами.

§ 3. В этом параграфе мы перечислим некоторые свойства так называемых совершенных форм; доказательство этих свойств читатель найдет в мемуаре Г. Ф. Вороного (3). Пусть $q_1, \ldots, q_n$ пробегают все системы n целых чисел без общего делителя; рассмотрим множество точек в $\mathfrak{F}$ с координатами

$$(q_1^2, \ldots, q_n^2, 2q_1q_2, \ldots, 2q_{n-1}q_n). \tag{9}$$

Все эти точки лежат на границе конуса $\overline{\mathfrak{P}}$. Пусть П — наименьшее выпуклое тело, содержащее точки (9); Вороной доказывает, что П есть многогранник, ограниченный бесконечным множеством плоскостей, эллиптических для $\overline{\mathfrak{P}}$. Напишем уравнения всех этих плоскостей:

$$\overset{\vee}{p}_{11} a_{11} + \ldots + \overset{\vee}{p}_{nn} a_{nn} + \overset{\vee}{p}_{12} a_{12} + \ldots + \overset{\vee}{p}_{n-1,n} a_{n-1,n} = M; \quad \nu = 1, 2, 3, \ldots, \tag{10}$$

причем $M > 0$ во всех уравнениях одно и то же. Пусть

$$\left.\begin{matrix} \overset{\vee}{l}_{11}, & \overset{\vee}{l}_{12}, & \ldots, & \overset{\vee}{l}_{1n} \\ \overset{\vee}{l}_{21}, & \overset{\vee}{l}_{22}, & \ldots, & \overset{\vee}{l}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \overset{\vee}{l}_{\sigma1}, & \overset{\vee}{l}_{\sigma2}, & \ldots, & \overset{\vee}{l}_{\sigma n} \end{matrix}\right\} \tag{11}$$

суть значения $q_1, \ldots, q_n$ для всех точек (9), лежащих на плоскости (10); числа каждой строки таблицы (11) определяются с точностью до общего множителя ± 1. Обозначая через ψ_ν положительную форму $\sum \overset{\vee}{p}_{ij} x_i x_j$, можем сказать, что M есть минимум ψ_ν для целых аргументов, и строки таблицы (11) суть все значения аргументов, при которых ψ_ν достигает минимума M. При этом уравнения

$$\psi_\nu(\overset{\vee}{l}_{\alpha1}, \ldots, \overset{\vee}{l}_{\alpha n}) = M, \ \alpha = 1, 2, \ldots, \sigma$$

(с фиксированным M) вполне определяют коэффициенты формы ψ_ν. Такая форма ψ_ν и называется совершенной формой (forme parfaite); соответствующую ей таблицу (11) будем называть совершенной таблицей. Число σ строк этой таблицы очевидно не меньше k [см. (2)].

Часть П, лежащая на плоскости (10), представляет собою $(k-1)$-мерный выпуклый многогранник Π_ν с вершинами в точках

$$[(\overset{\vee}{l}_{\alpha1})^2, \ldots, (\overset{\vee}{l}_{\alpha n})^2, 2\overset{\vee}{l}_{\alpha1}\overset{\vee}{l}_{\alpha2}, \ldots, 2\overset{\vee}{l}_{\alpha, n-1}\overset{\vee}{l}_{\alpha n}], \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \sigma. \tag{12}$$

Проведя из начала координат лучи в точки Π_ν, получим выпуклую k-мерную пирамиду Π'_ν с ребрами (12), которую будем называть совершенной пирамидой, соответствующей таблице (11) (или форме ψ_ν). Если взять любую точку Π'_ν и обозначить ее через f (§ 2), то форма f имеет вид

$$f = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \rho_\alpha (l^\nu_{\alpha 1} x_1 + \ldots + l^\nu_{\alpha n} x_n)^2, \text{ все } \rho_\alpha \geqslant 0. \qquad (13)$$

Совершенные пирамиды $\Pi'_1, \Pi'_2, \ldots$ заполняют всю внутренность конуса $\mathfrak{P}$ и не имеют общих внутренних точек.

Всякая унимодулярная (см. введение) подстановка переводит форму ψ_ν в себя или в другую, также совершенную форму. Пусть $\psi_\nu = \psi_\mu S$, где $S = (s_{ij})$ — унимодулярная матрица; если

$$l^\mu_{\alpha 1}, l^\mu_{\alpha 2}, \ldots, l^\mu_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma) \qquad (14)$$

есть таблица формы ψ_μ, то при надлежащем расположении строк этой таблицы имеем соотношения

$$\varepsilon_\alpha l^\mu_{\alpha i} = s_{i1} l^\nu_{\alpha 1} + s_{i2} l^\nu_{\alpha 2} + \ldots + s_{in} l^\nu_{\alpha n} \ (i = 1, 2, \ldots, n, \ \alpha = 1, 2, \ldots, \sigma),$$

где все ε_α равны ± 1. Формула (13) показывает далее, что если $\bar{f}$ пробегает пирамиду Π'_ν, то $\overline{fS'}$ пробегает пирамиду Π'_μ. Таблицы (11) и (14), а также пирамиды Π'_ν и Π'_μ назовем эквивалентными.

Вороной доказывает далее, что число строк σ любой совершенной таблицы (11) не превышает $2^n - 1$ и что определитель, составленный из n любых строк этой таблицы (так называемый характеристический определитель), также ограничен сверху пределом, зависящим только от n; среди этих характеристических определителей имеются неравные нулю. Отсюда выводится, что каждая совершенная таблица эквивалентна такой таблице, все элементы которой ограничены конкретным пределом, зависящим только от n; следовательно существует лишь конечное число неэквивалентных совершенных таблиц.

Леммы

§ 4. ЛЕММА 1. *Пусть*

$$\psi_\nu = \lambda_{\nu 1} x_1 + \ldots + \lambda_{\nu n} x_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r, \ 1 \leqslant r < n)$$

— вещественные линейно-независимые формы и ни при каких t плоскость $t_1\psi_1 + \ldots + t_r\psi_r = 0$ нерациональна; тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в области $|\psi_1| < \varepsilon, \ldots |\psi_r| < \varepsilon$ найдется n целых точек $(p_{i1}), \ldots, (p_{in})$ с определителем $\|p_{ij}\| = \pm 1$.

Заметим сначала, что если $\varphi = 0$ — любая рациональная плоскость, то можно найти целую точку, для которой $|\psi_1| < \varepsilon, \ldots, |\psi_r| < \varepsilon$, $\varphi \neq 0$. Действительно, при $r < n-1$ к формам $\psi_1, \ldots, \psi_r, \varphi$ можно присоединить линейные формы $\psi_{r+1}, \ldots, \psi_{n-1}$ так, чтобы $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}, \varphi$ были независимы; пусть ε_0 настолько мало, что в области $|\psi_1| < \varepsilon_0, \ldots, |\psi_{n-1}| < \varepsilon_0, |\varphi| < \varepsilon_0$

кроме (0) нет целых точек. Взяв $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, найдем по теореме Минковского о линейных формах целую точку $(x_i) \neq 0$, для которой $|\psi_1| < \varepsilon, \ldots, |\psi_{n-1}| < \varepsilon$; для этой точки, очевидно, $\varphi \neq 0$. Рассмотрим область

$$|\psi_1| < \frac{\varepsilon}{n}, \ldots, |\psi_r| < \frac{\varepsilon}{n}. \quad (15)$$

Полагая $\varphi = x_1$, найдем в области (15) целую точку (q_{i1}), для которой $q_{11} \neq 0$; полагая затем $\varphi = \begin{vmatrix} q_{11} & x_1 \\ q_{21} & x_2 \end{vmatrix}$, найдем в (15) целую точку (q_{i2}), для которой $\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, и т. д. Таким путем найдем в области (15) n целых точек $(q_{i1}), \ldots, (q_{in})$ с определителем $\|q_{ij}\| \neq 0$. Пусть затем $u_{11} > 0$ — наименьшее число, при котором точка $(u_{11}\, q_{i1})$ целая и вообще, при $m = 1, 2, \ldots, n$, $u_{mm} > 0$ — наименьшее число, при котором точка $(p_{im}) = (u_{m1}\, q_{i1} + \ldots + u_{mm}\, q_{im})$, с надлежаще выбранными $u_{m1}, \ldots, u_{m,m-1}$, — целая; тогда $u_{mm} \leqslant 1$, и можно предполагать $0 \leqslant u_{m1} < 1, \ldots, 0 \leqslant u_{m,m-1} < 1$. Для целых точек $(p_{i1}), \ldots, (p_{in})$ имеем $|\psi_1| < \varepsilon, \ldots, |\psi_r| < \varepsilon$ и, как легко видеть, $\|p_{ij}\| = \pm 1$. Лемма доказана.

ЛЕММА 2. *Пусть формы $\psi_1, \ldots, \psi_r$ удовлетворяют условию леммы 1 и $\mu_1, \ldots, \mu_r$ — любые вещественные числа; тогда для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в области $|\psi_1 + \mu_1| < \varepsilon, \ldots, |\psi_r + \mu_r| < \varepsilon$ найдется целая точка.*

Согласно лемме 1 переменные x_i можно преобразовать унимодулярной подстановкой в новые переменные x'_i так, чтобы в выражениях

$$\psi_\nu = \lambda'_{\nu 1} x'_1 + \ldots + \lambda'_{\nu n} x'_n \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

все λ' были по абсолютной величине меньше $\frac{2\varepsilon}{r}$. Так как $\psi_1, \ldots, \psi_r$ линейно независимы, то один из определителей r-го порядка, составленных из чисел λ', например

$$\begin{vmatrix} \lambda'_{11}, \ldots, \lambda'_{1r} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \lambda'_{r1}, \ldots, \lambda'_{rr} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля. Определим $\mu'_1, \ldots, \mu'_r$ из уравнений

$$\mu_\nu = \lambda'_{\nu 1} \mu'_1 + \ldots + \lambda'_{\nu r} \mu'_r \quad (\nu = 1, 2, \ldots, r)$$

и придадим $x'_1, \ldots, x'_n$ целые значения по условиям

$$|x'_1 + \mu'_1| \leqslant \frac{1}{2}, \ldots, |x'_r + \mu'_r| \leqslant \frac{1}{2}, x'_{r+1} = \ldots = x'_n = 0;$$

тогда для соответствующих целых x_i найдем $|\psi_1 + \mu_1| < \varepsilon, \ldots, |\mu_r + \psi_r| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 3. *Пусть $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ — любые независимые формы; при некотором постоянном K в области $|\psi_1| < K, \ldots, |\psi_{n-1}| < K$ можно бесчисленным множеством способов выбрать n целых точек $(p_{i1}), \ldots, (p_{in})$ с определителем $\|p_{ij}\| = \pm 1$.*

Данные формы ψ_ν можно преобразовать любой вещественной подстановкой

$$\chi_\nu = t_{\nu 1}\psi_1 + \ldots + t_{\nu, n-1}\psi_{n-1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

определителя $\neq 0$, а переменные x_i — любой унимодулярной подстановкой; достаточно доказать лемму для новых форм χ_ν в новых переменных x'_i. Предположим, что лемма доказана для $n-2$ форм с $n-1$ переменными. Если ни при каких t плоскость $t_1\psi_1 + \ldots + t_{n-1}\psi_{n-1} = 0$ нерациональна, то справедливость леммы 3 вытекает из леммы 1 для сколь угодно малого K. Если же при некоторых $t_1 \neq 0, t_2, \ldots, t_{n-1}$ форма $\chi_1 = t_1\psi_1 + \ldots + t_{n-1}\psi_{n-1}$ имеет целые без общего делителя коэффициенты, то, совершая надлежащее унимодулярное преобразование переменных, заменим данные формы такими:

$$\chi_1 = x'_1, \; \psi_\nu = \lambda'_{\nu 1}x'_1 + \lambda'_{\nu 2}x'_2 + \ldots + \lambda'_{\nu n}x'_n \quad (\nu = 2, \ldots, n-1),$$

и тогда справедливость леммы вытекает из предположенной ее справедливости для форм $\lambda'_{\nu 2}x'_2 + \ldots + \lambda'_{\nu n}x'_n$ $(\nu = 2, \ldots, n-1)$.

ЛЕММА 4. *Пусть* Φ, Φ' — *две положительные квадратичные формы одинакового определителя*, φ — *форма, союзная с* Φ; *тогда*

$$(\varphi, \Phi) \leqslant (\varphi, \Phi'), \tag{16}$$

причем знак равенства имеет место лишь для $\Phi = \Phi'$ [Минковский (1), § 8].

Ввиду важности для нас этой леммы, дадим более простое, чем у Минковского, ее доказательство.

Пусть S — вещественная матрица, для которой $\Phi S = x_1^2 + \ldots + x_n^2$; тогда $\varphi S_1 = x_1^2 + \ldots + x_n^2$ (матрицу S_1 см. в § 1). Полагая

$$\Phi' S = \sum a'_{ij} x_i x_j, \tag{17}$$

находим на основании (6), что неравенство (16) равносильно такому: $n \leqslant a'_{11} + \ldots + a'_{nn}$. Так как определитель формы (17) равен 1, то имеем два неравенства

$$a'_{11} + \ldots + a'_{nn} \geqslant n\sqrt[n]{a'_{11} \ldots a'_{nn}}, \; a'_{11} \ldots a'_{nn} \geqslant 1,$$

причем первое обращается в равенство лишь при $a'_{11} = \ldots = a'_{nn}$, второе — лишь при $a'_{ij} = 0$ $(i < j)$. Лемма доказана.

Геометрически неравенство (16) означает, что часть дискриминантной поверхности $\det \Phi = \mathrm{const}$, лежащая внутри $\mathfrak{P}$, расположена с одной стороны от касательной плоскости, проведенной в любой ее точке Φ (именно, со стороны, противоположной началу координат). Другими словами, дискриминантная поверхность выпукла к началу координат.

Определение области $V(\varphi)$

§ 5. Пусть φ — данная положительная форма, Φ — союзная с нею, Σ пробегает все унимодулярные матрицы; обозначим через $V(\varphi)$ множество точек f в пространстве $\mathfrak{F}$, удовлетворяющих всем неравенствам

$$(f, \Phi) \leqslant (f, \Phi\Sigma). \tag{18}$$

Предварительные замечания. 1) При $\Phi\Sigma \neq \Phi$ уравнение $(f, \Phi\Sigma - \Phi) = 0$ определяет гиперболическую для $\mathfrak{P}$ плоскость, и при различных Φ, $\Phi\Sigma_1$, $\Phi\Sigma_2$ плоскости

$$(f, \Phi\Sigma_1 - \Phi) = 0, \ (f, \Phi\Sigma_2 - \Phi) = 0$$

различны (лемма 4).

2) Пусть O — конечная область, лежащая целиком внутри $\mathfrak{P}$; тогда можно указать число $N = N(O)$ такое, что для всякой унимодулярной матрицы Σ, хоть один элемент которой превышает N по абсолютному значению, и для всякой формы f из O будем иметь неравенство (18). Пользуясь формулой Якоби

$$f = a_{11}\left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + \ldots\right)^2 + \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}{a_{11}} (x_2 + \ldots)^2 + \ldots,$$

можем представить каждую форму из O в виде

$$f = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_{i1} x_1 + \ldots + \lambda_{in} x_n)^2,$$

где все числа $|\lambda_{ij}|$ ограничены сверху и абсолютная величина определителя $\|\lambda_{ij}\|$ ограничена положительным пределом снизу. Если для матрицы $\Sigma = (p_{ij})$ имеем $(f, \Phi\Sigma) < (f, \Phi)$, то, обозначая форму $\Phi\Sigma$ через Φ' и пользуясь (5), получим

$$\sum_{i=1}^{n} \Phi'(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in}) < \sum_{i=1}^{n} \Phi(\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{in}),$$

что дает верхние пределы для всех чисел

$$|p_{j1}\lambda_{i1} + p_{j2}\lambda_{i2} + \ldots + p_{jn}\lambda_{in}| \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

и следовательно верхние пределы для чисел $|p_{ji}|$, что и требовалось доказать.

3) Пусть Σ — унимодулярная матрица, для которой $\Phi\Sigma \neq \Phi$. Применяя неравенство (16) (лемма 4) к форме $\Phi' = \Phi\Sigma$, получим $(\varphi, \Phi) < (\varphi, \Phi\Sigma)$, т. е. данная форма φ удовлетворяет всем нетривиальным неравенствам (18) со знаком $<$. Отсюда в связи с предыдущим замечанием вытекает, что φ есть внутренняя в обычном смысле слова точка области $V(\varphi)$ [т. е. достаточно малая окрестность φ целиком принадлежит $V(\varphi)$].

4) Всякая точка $V(\varphi)$ принадлежит конусу $\mathfrak{P}$. Если бы точка f из $V(\varphi)$ не принадлежала $\mathfrak{P}$, то мы имели бы

$$f = -(\lambda_{01} x_1 + \ldots + \lambda_{0n} x_n)^2 \pm (\lambda_{11} x_1 + \ldots + \lambda_{1n} x_n)^2 \pm \ldots \pm (\lambda_{r1} x_1 + \ldots + \lambda_{rn} x_n)^2,$$

где

$$\psi_\nu = \lambda_{\nu 1} x_1 + \ldots + \lambda_{\nu n} x_n, \ \nu = 0, 1, \ldots, r \quad (0 \leqslant r \leqslant n - 1)$$

— вещественные, независимые формы; для любой унимодулярной матрицы Σ можем написать ($\Phi\Sigma = \Phi'$):

$$-\Phi(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0n}) \pm \Phi(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}) \pm \ldots \pm \Phi(\lambda_{r1}, \ldots, \lambda_{rn}) \leqslant$$
$$\leqslant -\Phi'(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0n}) \pm \Phi'(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}) \pm \ldots \pm \Phi'(\lambda_{r1}, \ldots, \lambda_{rn}). \quad (19)$$

Если $r < n-1$, то к $\psi_0, \ldots, \psi_r$ присоединяем произвольные формы $\psi_{r+1}, \ldots, \psi_{n-1}$ так, чтобы $\psi_0, \ldots, \psi_{n-1}$ были независимы. Применим к формам $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ лемму 3; согласно этой лемме существует бесконечное множество унимодулярных матриц Σ, для которых $\Phi'(\lambda_{11}, \ldots, \lambda_{1n}), \ldots \ldots, \Phi'(\lambda_{n-1,1}, \ldots, \lambda_{n-1,n})$ остаются ограниченными и для которых следовательно $\Phi'(\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0n})$ бесконечно растет. При этом правая часть (19) стремится к $-\infty$, что невозможно.

§ 6. Пусть $S_0 = 1, S_1, S_2, \ldots$ — все унимодулярные матрицы; рассмотрим ряд областей

$$V(\varphi),\ V(\varphi S_1),\ V(\varphi S_2), \ldots \quad (20)$$

Если f — любая положительная форма, то существует лишь конечное число унимодулярных матриц Σ, для которых $(f, \Phi\Sigma)$ не превосходит заданного предела, и следовательно существует матрица $\Sigma = S'^{-1}$, для которой $(f, \Phi\Sigma)$ принимает наименьшее значение; для этой матрицы имеем $(f, \Phi S'^{-1}) \leqslant (f, \Phi\Sigma)$, т. е. f принадлежит области $V(\varphi S)$. Далее, при $\varphi S_1 \neq \varphi S_2$, области $V(\varphi S_1)$ и $V(\varphi S_2)$ не имеют общих внутренних точек, так как если бы f лежала внутри $V(\varphi S_1)$ и принадлежала $V(\varphi S_2)$, то мы имели бы $(f, \Phi S_1'^{-1}) < (f, \Phi S_2'^{-1}) \leqslant (f, \Phi S_1'^{-1})$, что невозможно. Итак, области (20) заполняют регулярно всю внутренность конуса $\mathfrak{P}$.

Пусть S — любая унимодулярная матрица; если f пробегает область $V(\varphi)$, то fS пробегает область $V(\varphi S)$. Действительно, применяя к неравенствам (18) формулу (7), получим $(fS, \Phi S'^{-1}) \leqslant (fS,\ \Phi S'^{-1} \cdot S'\Sigma S'^{-1})$, и так как $S'\Sigma S'^{-1}$ одновременно с Σ пробегает все унимодулярные матрицы, то ясно, что fS принадлежит к $V(\varphi S)$. В частности автоморфизм формы φ (т. е. целочисленная подстановка S, для которой $\varphi S = \varphi$) переводит всякую точку $V(\varphi)$ в точку той же области.

Если внутренние точки f и f_1 областей $V(\varphi)$ и $V(\varphi S_1)$ связаны соотношением $fS = f_1$, то $\varphi S = \varphi S_1$. Действительно, f_1 лежит внутри $V(\varphi S)$ и $V(\varphi S_1)$, что по замеченному выше возможно лишь при $\varphi S = \varphi S_1$. В частности, если две внутренние точки области $V(\varphi)$ эквивалентны, то они могут быть связаны лишь аутоморфизмом формы φ.

Из всего сказанного вытекает, что если φ — положительная форма, не имеющая аутоморфизмов (кроме двух тождественных $S = \pm 1$), то $V(\varphi)$ дает внутри $\mathfrak{P}$ точную фундаментальную область группы G_n.

Основные теоремы

§ 7. ТЕОРЕМА 1. *Пусть f — положительная форма области $V(\varphi)$ и точка $\bar{f}$ (лежащая внутри $\bar{\mathfrak{P}}$) принадлежит совершенной пирамиде* (§ 3) *с таблицей*

$$l_{\alpha 1}, l_{\alpha 2}, \ldots, l_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma); \tag{21}$$

тогда числа $|l_{\alpha i}|$ ограничены сверху конкретным пределом, зависящим только от формы φ и числа n.

По формуле (13) имеем

$$f = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \rho_\alpha (l_{\alpha 1} x_1 + \ldots + l_{\alpha n} x_n)^2, \text{ все } \rho_\alpha \geqslant 0. \tag{22}$$

Так как f принадлежит $V(\varphi)$, то можем написать неравенство

$$\sum_{\alpha=1}^{\sigma} \rho_\alpha \Phi(l_{\alpha 1}, l_{\alpha 2}, \ldots, l_{\alpha n}) \leqslant \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \rho_\alpha \Phi(\bar{l}_{\alpha 1}, \bar{l}_{\alpha 2}, \ldots, \bar{l}_{\alpha n}), \tag{23}$$

причем в правой части

$$\bar{l}_{\alpha 1}, \bar{l}_{\alpha 2}, \ldots, \bar{l}_{\alpha n} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma) \tag{24}$$

есть любая совершенная таблица, эквивалентная (21). Пусть

$$L_1, L_2, \ldots, L_q \tag{25}$$

полная система неэквивалентных совершенных таблиц.

Образуем в пространстве переменных $x_1, \ldots, x_n$ n постепенно расширяющихся эллипсоидов $E_1, E_2, \ldots, E_n$ следующим образом. Пусть M_1 есть наибольшее из чисел $\Phi(l_1, \ldots, l_n)$, когда $l_1, \ldots, l_n$ пробегает все строки всех таблиц (25); тогда эллипсоид E_1 определяется условием $\Phi(x_1, \ldots, x_n) \leqslant M_1$. Пусть, далее, (l'_i) — примитивная целая точка эллипсоида E_1 [т. е. $l'_1, \ldots, l'_n$ без общего делителя] и L_t одна из таблиц (25). Возьмем подряд каждую строку $s_1, \ldots, s_n$ таблицы L_t, найдем унимодулярную подстановку, переводящую строку $s_1, \ldots, s_n$ в строку $l'_1, \ldots, l'_n$, и преобразуем затем этой подстановкой всю таблицу L_t; получим ряд таблиц

$$L'_1, L''_t, \ldots \tag{26}$$

Эти таблицы (число которых равно числу строк L_t) обладают, очевидно, следующим свойством: всякая совершенная таблица, эквивалентная L_t и содержащая строку (l'_i), эквивалентна одной из таблиц (26) и притом так, что переходная подстановка переводит строку (l'_i) в строку $\pm(l'_i)$. Беря за (l'_i) последовательно все примитивные точки E_1 и для каждой (l'_i) за L_t все таблицы (25), обозначим через M_2 максимум Φ для всех строчек всех полученных таблиц (26); тогда $\Phi(x_i) \leqslant M_2$ будет эллипсоид E_2.

Предположим, что уже определен эллипсоид E_r $(2 \leqslant r < n)$. Пусть $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ r независимых примитивных целых точек E_r и (s_i) пробегает σ' строк таблицы L_t. Выбираем из $2\sigma'$ строк $(s_1, \ldots, s_n)$, $(-s_1, \ldots, -s_n)$ всевозможными способами r линейно-независимых строк $(s'_i), \ldots, (s_i^{(r)})$ и определяем, эквивалентны ли эти строки строкам $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$; если да, то находим переходную унимодулярную подстановку и преобразовываем ею всю таблицу L_t. Получим ряд таблиц (26),

которые опять обладают свойством: всякая совершенная таблица, эквивалентная L_t и содержащая строки $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$, эквивалентна одной из таблиц (26) так, что переходная подстановка переводит каждую из строк $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ в себя. Проделав это для всевозможных систем r независимых точек $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ из E_r и для каждого набора точек для всех таблиц L_t, обозначим через M_{r+1} максимум Φ для всех строчек всех полученных таблиц (26); тогда $\Phi(x_i) \leqslant M_{r+1}$ будет эллипсоид E_{r+1}.

Беря в неравенстве (23) за таблицу (24) ту из таблиц L_t, которая эквивалентна (21), находим хоть для одного значка α неравенство $\Phi(l_{\alpha i}) \leqslant \Phi(\bar{l}_{\alpha i}) \leqslant M_1$, т. е. в таблице (21) найдется строка $(l_{\alpha i})$ такая, что точка $(l_{\alpha i})$ принадлежит эллипсоиду E_1. Предположим уже доказанным, что в таблице (21) найдутся r линейно-независимых строк $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ $[1 \leqslant r < n]$, для которых точки $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ принадлежат эллипсоиду E_r. Тогда (21) есть некоторая совершенная таблица, содержащая строки $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ и, по сказанному выше, она эквивалентна таблице вида (26) так, что переходная подстановка S переводит строки $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ в себя; заметим при этом, что если в таблице (21) найдутся строки, линейно-зависимые с $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$, то подстановка S переводит каждую из этих строк также в себя. Беря в правой части (23) таблицу (26), эквивалентную (21), находим, что в обеих частях неравенства (23) будут одинаковы члены, соответствующие строкам $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$ и всем строкам таблицы (21), линейно-зависимым с $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)})$. В остальных членах неравенства (23) коэффициенты $\rho_\alpha \geqslant 0$ не могут быть все нулями (иначе f не была бы положительной формой) и потому для одного из этих членов будем иметь $\Phi(l_{\alpha i}) \leqslant \Phi(\bar{l}_{\alpha i}) \leqslant M_{r+1}$, т. е. мы доказали, что $r+1$ строк таблицы (21): $(l'_i), \ldots, (l_i^{(r)}), (l_i^{(r+1)}) = (l_{\alpha i})$, содержатся в эллипсоиде E_{r+1}.

Таким путем докажем, что в таблице (21) найдутся n линейно-независимых строк $(l'_i), \ldots, (l_i^{(n)})$, принадлежащих эллипсоиду E_n; числа l, стоящие в этих строках, ограничены следовательно пределом, зависящим только от формы Φ и числа n. Что касается остальных строк таблицы (21), то каждая из них выражается линейно через строки $(l'_i), \ldots, (l_i^{(n)})$, причем коэффициенты в этих выражениях суть отношения двух характеристических определителей таблицы (21); а так как эти определители для любой совершенной таблицы ограничены пределом, зависящим только от n (§ 3), то и для остальных элементов таблицы (21) получаем предел, зависящий только от Φ и n. Теорема доказана.

Следствие. Если положительная форма f принадлежит областям $V(\varphi)$ и $V(\varphi S)$, то элементы унимодулярной матрицы S ограничены пределом, зависящим лишь от φ и n.

Пусть $\bar{f}$ принадлежит совершенной пирамиде с таблицей (21), так что имеем формулу (22); по теореме 1

$$|l_{\alpha i}| < K \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, \sigma; \quad i = 1, 2, \ldots, n),$$

где $K = K(\varphi, n)$ — постоянная. По § 6 форма fS^{-1} также принадлежит $V(\varphi)$; полагая $S^{-1} = (p_{ij})$, получим из (22)

$$fS^{-1} = \sum_{\alpha=1}^{\sigma} \rho_\alpha (\bar{l}_{\alpha 1} x_1 + \ldots + \bar{l}_{\alpha n} x_n)^2,$$

где числа

$$\bar{l}_{\alpha i} = p_{1i} l_{\alpha 1} + p_{2i} l_{\alpha 2} + \ldots + p_{ni} l_{\alpha n}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \sigma, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

образуют совершенную таблицу, эквивалентную (21). Применяя опять теорему 1, имеем $|\bar{l}_{\alpha i}| < K$ и так как среди характеристических определителей таблицы (21) найдутся не равные нулю, то получаем пределы для чисел p_{ij}, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 2. *Если форма f области $V(\varphi)$ лежит на границе $\mathfrak{P}$ и разлагается на r квадратов независимых линейных функций ($1 \leqslant r < n$), то f унимодулярной подстановкой преобразуется в форму с r переменными.*

Заметим сначала, что если f_1 — положительная форма определителя d, F_1 — союзная с нею, $\psi = \lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n$ — любая линейная форма, то существует такое разложение f_1 на n квадратов, при котором один из квадратов имеет вид $K\psi^2$. Действительно, приравнивая нулю определитель формы $f_1 - K\psi^2$, находим искомое значение $K = \frac{d}{F_1(\lambda_i)}$. Аналогично, если f лежит на границе $\mathfrak{P}$ и представляется в виде

$$f = \sum_{m=1}^{r} \psi_m^2 = \sum_{m=1}^{r} (\lambda_{m1} x_1 + \ldots + \lambda_{mn} x_n)^2, \tag{27}$$

то для любой линейной комбинации $\psi = t_1\psi_1 + \ldots + t_r\psi_r$ существует разложение f на квадраты вида $f = K\psi^2 + \ldots$ Это замечание вытекает из предыдущего, если ввести новые переменные $x_1' = \psi_1, \ldots, x_r' = \psi_r$.

Приступая к доказательству теоремы, положим, что данная форма f имеет вид (27). Так как f принадлежит $V(\varphi)$, то для всякой формы Φ', эквивалентной Φ, имеем

$$\sum_{m=1}^{r} \Phi(\lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{mn}) \leqslant \sum_{m=1}^{r} \Phi'(\lambda_{m1}, \ldots, \lambda_{mn}). \tag{28}$$

Если ни при каких t плоскость $t_1\psi_1 + \ldots + t_r\psi_r = 0$ нерациональна, то для сколь угодно малого ε (лемма 1) можно найти унимодулярную матрицу S, все строки которой удовлетворяют неравенствам $|\psi_1| < \varepsilon, \ldots, |\psi_r| < \varepsilon$; для $\Phi' = \Phi S$ правая часть (28) будет сколь угодно мала, а левая представляет положительное число. Это противоречие показывает, что при некоторых t форма $\psi = t_1\psi_1 + \ldots + t_r\psi_r$ имеет целые, без общего делителя, коэффициенты и по замеченному выше разложение f на квадраты (27) можно заменить разложением вида $f = e_1\psi^2 + \ldots$ Преобразовывая x_i унимодулярной подстановкой так, чтобы $\psi = x_1'$, можем написать $fS_1 = e_1 x_1^2 + \ldots$

Предположим, что уже найдены унимодулярные матрицы $S_1, \ldots, S_c$ $(1 \leqslant c < r)$ такие, что

$$fS_1 \ldots S_c = e_1 x_1^2 + e_2(\eta_{21}x_1 + x_2)^2 + \ldots + e_c(\eta_{c1}x_1 + \ldots + \eta_{c,\,c-1}x_{c-1} + x_c)^2 + \\ + (\xi_{c+1,1}\,x_1 + \ldots + \xi_{c+1,n}\,x_n)^2 + \ldots + (\xi_{r1}x_1 + \ldots + \xi_{rn}x_n)^2, \tag{29}$$

причем

$$\omega_1 = \xi_{c+1,c+1}x_{c+1} + \ldots + \xi_{c+1,n}x_n, \ \ldots, \ \omega_{r-c} = \xi_{r,\,c+1}x_{c+1} + \ldots + \xi_{rn}x_n \tag{30}$$

— независимые формы переменных $x_{c+1}, \ldots, x_n$. Форма (29) принадлежит области $V(\varphi S_1 \ldots S_c)$ (§ 6); обозначая поэтому через Φ_c форму, союзную с $\varphi S_1 \ldots S_c$, и через Φ'_c — любую эквивалентную Φ_c, имеем неравенство

$$e_1\Phi_c(1, 0, \ldots, 0) + \ldots + e_c\Phi_c(\eta_{c1}, \ldots, \eta_{c,\,c-1}, 1, 0, \ldots, 0) + \\ + \sum_{m=c+1}^{r} \Phi_c(\xi_{m1}, \ldots, \xi_{mn}) \leqslant e_1\Phi'_c(1, 0, \ldots, 0) + \ldots \\ \ldots + e_c\Phi'_c(\eta_{c1}, \ldots, \eta_{c,\,c-1}, 1, 0, \ldots, 0) + \sum_{m=c+1}^{r} \Phi'_c(\xi_{m1}, \ldots, \xi_{mn}).$$

Применяя это неравенство к форме $\Phi'_c = \Phi_c\Sigma$, где Σ — унимодулярная матрица вида

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & s_{1,c+1} & \ldots & s_{1n} \\ . & . & \ldots & . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & s_{c,c+1} & \ldots & s_{cn} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & s_{c+1,c+1} & \ldots & s_{c+1,n} \\ . & . & \ldots & . & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & s_{n,c+1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix} \tag{31}$$

получим

$$\sum_{m=c+1}^{r} \Phi_c(\xi_{m1}, \ldots, \xi_{mn}) \leqslant \sum_{m=c+1}^{r} \Phi_c(\xi_{m1} + \xi_{m,c+1}s_{1,c+1} + \ldots + \xi_{mn}s_{1n}, \ldots \xi_{mc} + \\ + \xi_{m,c+1}\,s_{c,\,c+1} + \ldots + \xi_{mn}s_{cn}, \ \xi_{m,\,c+1}s_{c+1,\,c+1} + \ldots + \\ + \xi_{mn}s_{c+1,n}, \ldots, \xi_{m,c+1}\,s_{n,\,c+1} + \ldots + \xi_{mn}s_{nn}). \tag{32}$$

Рассмотрим линейные формы (30); если ни при каких t форма $t_1\omega_1 + \ldots + t_{r-c}\omega_{r-c}$ не равна форме с целыми коэффициентами, то для сколь угодно малого ε найдем, по лемме 1, унимодулярную матрицу

$$\begin{pmatrix} s_{c+1,\,c+1} & \ldots & s_{c+1,\,n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ s_{n,\,c+1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix},$$

строки которой удовлетворяют неравенствам $|\omega_1| < \varepsilon, \ldots, |\omega_{r-c}| < \varepsilon$, и, по лемме 2, прямоугольную матрицу

$$\begin{pmatrix} s_{1,c+1} & \ldots & s_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ s_{c,c+1} & \ldots & s_{cn} \end{pmatrix},$$

строки которой удовлетворяют неравенствам

$$|\xi_{m1}+\xi_{m,\,c+1}s_{1,\,c+1}+\ldots+\xi_{mn}s_{1n}|<\varepsilon,\ \ldots,\ |\xi_{mc}+\xi_{m,\,c+1}s_{c,\,c+1}+\ldots$$
$$\ldots+\xi_{mn}s_{cn}|<\varepsilon, \quad m=c+1,\ \ldots,\ r;$$

применяя неравенство (32) к соответствующей матрице (31), получим в правой части опять сколь угодно малое, а в левой — положительное число, что невозможно. Итак, при некоторых t имеем

$$t_1\omega_1+\ldots+t_{r-c}\omega_{r-c}=p_{c+1}x_{c+1}+\ldots+p_nx_n,$$

где p — целые числа без общего делителя. Полагая

$$\sum_{m=c+1}^{r} t_{m-c}(\xi_{m1}x_1+\ldots+\xi_{mn}x_n)=\eta_{c+1,1}x_1+\ldots+\eta_{c+1,c}x_c+$$
$$+p_{c+1}x_{c+1}+\ldots+p_nx_n,$$

можем заменить разложение

$$(\xi_{c+1,1}x_1+\ldots+\xi_{c+1,n}x_n)^2+\ldots+(\xi_{r1}x_1+\ldots+\xi_{rn}x_n)^2$$

разложением вида

$$e_{c+1}(\eta_{c+1,1}x_1+\ldots+\eta_{c+1,c}x_c+p_{c+1}x_{c+1}+\ldots+p_nx_n)^2+\ldots$$

Преобразуя $x_{c+1},\ \ldots,\ x_n$ унимодулярной подстановкой в переменные

$$x'_{c+1}=p_{c+1}x_{c+1}+\ldots+p_nx_n,\ \ldots,\ x'_n,$$

найдем

$$fS_1\ldots S_cS_{c+1}=e_1x_1^2+\ldots+e_c(\eta_{c1}x_1+\ldots+\eta_{c,\,c-1}x_{c-1}+x_c)^2+$$
$$+e_{c+1}(\eta_{c+1,1}x_1+\ldots+\eta_{c+1,c}x_c+x_{c+1})^2+\ldots$$

Матрица $S_1\ldots S_r$ и будет искомой унимодулярной матрицей, переводящей f в форму с r переменными. Теорема доказана.

Следствие. Если f принадлежит $V(\varphi)$ и лежит на границе конуса $\mathfrak{P}$, то через точку f проходит бесчисленное множество плоскостей вида $(f,\ \Phi\Sigma-\Phi)=0$ (Σ — унимодулярная матрица).

По теореме 2 для некоторой унимодулярной матрицы S имеем

$$fS=\sum_{m=1}^{r}(\lambda_{m1}x_1+\ldots+\lambda_{mr}x_r)^2, \quad 1\leqslant r<n.$$

Полагая $\Phi S'^{-1}=\Phi_1$, имеем для всякой эквивалентной формы $\Phi'_1=\Phi_1\Sigma$

$$\sum_{m=1}^{r}\Phi_1(\lambda_{m1},\ \ldots,\ \lambda_{mr},\ 0,\ \ldots,\ 0)\leqslant\sum_{m=1}^{r}\Phi'_1(\lambda_{m1},\ \ldots,\ \lambda_{mr},\ 0,\ \ldots,\ 0). \quad (33)$$

Примем за Σ матрицу вида

$$\Sigma=\begin{pmatrix} 1 & \ldots & 0 & s_{1,\,r+1} & \ldots & s_{1n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 1 & s_{r,\,r+1} & \ldots & s_{rn} \\ 0 & \ldots & 0 & s_{r+1,\,r+1} & \ldots & s_{r+1,\,n} \\ \cdot & \ldots & \cdot & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & s_{n,\,r+1} & \ldots & s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Для всех таких матриц неравенство (33) обращается в равенство. Следствие доказано.

Конечность числа граней пирамиды $V(\varphi)$

§ 8. Пусть Σ_0 — унимодулярная матрица, для которой $\Phi\Sigma_0 \neq \Phi$. Плоскость $(f, \Phi\Sigma_0 - \Phi) = 0$ назовем гранью области $V(\varphi)$, если существует положительная форма f_0 из $V(\varphi)$, для которой в неравенствах $(f_0, \Phi) \leqslant (f_0, \Phi\Sigma)$ равенство имеет место лишь при $\Phi\Sigma = \Phi$ или $\Phi\Sigma = \Phi\Sigma_0$.

1. Если для положительной формы ψ из $V(\varphi)$ некоторые из неравенств $(\psi, \Phi) \leqslant (\psi, \Phi\Sigma)$ обращаются в равенства (именно, при $\Sigma = \Sigma_1, \ldots, \Sigma_l$), то одна из плоскостей

$$(f, \Phi\Sigma_m - \Phi) = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots, l) \tag{34}$$

будет гранью $V(\varphi)$. Можно предполагать, что $\Phi, \Phi\Sigma_1, \ldots, \Phi\Sigma_l$ различны. При $l = 1$ утверждение очевидно; при $l > 1$ заметим, что $(\varphi, \Phi\Sigma_m - \Phi) > 0$ [3) § 5], и рассмотрим линейные (в коэффициентах f) формы

$$\frac{(f, \Phi\Sigma_m - \Phi)}{(\varphi, \Phi\Sigma_m - \Phi)} \quad (m = 1, 2, \ldots, l). \tag{35}$$

Эти формы различны [1) § 5] и обращаются в нуль в точке $f = \varphi$. Поэтому в окрестности ψ можно найти точку ψ' такую, что значения форм (35) при $f = \psi'$ все различны и сколь угодно близки к нулю; пусть наименьшее из них соответствует значку $m = 1$. Положим

$$t = \frac{(\varphi, \Phi\Sigma_1 - \Phi)}{(\varphi - \psi', \Phi\Sigma_1 - \Phi)};$$

тогда для формы $f_0 = (1 - t)\varphi + t\psi'$ имеем

$$(f_0, \Phi\Sigma_1 - \Phi) = 0, \quad (f_0, \Phi\Sigma_m - \Phi) > 0 \quad (m = 2, \ldots, l).$$

Кроме того точка f_0 (сколь угодно близкая к ψ) удовлетворяет вместе с ψ и всем неравенствам $(f_0, \Phi) < (f_0, \Phi\Sigma)$, в которых $\Phi\Sigma \neq \Phi, \Phi\Sigma_1, \ldots$ $\ldots \Phi\Sigma_l$ [2) § 5]. Итак, плоскость $(f, \Phi\Sigma_1 - \Phi) = 0$ есть грань $V(\varphi)$.

2. Если положительная форма ψ не принадлежит $V(\varphi)$, то найдется грань, для которой $(\psi, \Phi\Sigma_0 - \Phi) < 0$. Рассмотрим отрезок $(1 - t)\varphi + t\psi$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$; по условию, существуют плоскости $(f, \Phi\Sigma - \Phi) = 0$, пересекающие этот отрезок во внутренней его точке, и так как число этих плоскостей конечно, из них можно выбрать одну или несколько, пересекающих отрезок в ближайшей к φ точке. Из этих последних плоскостей по предыдущему замечанию одна будет гранью, что и требовалось доказать.

Из доказанного замечания вытекает существование граней $V(\varphi)$ [так как по § 6 существуют положительные формы, не принадлежащие $V(\varphi)$].

3. Если ψ — форма области $V(\varphi)$, лежащая на границе $\mathfrak{P}$, то существуют грани $V(\varphi)$, проходящие через точку ψ. По следствию из теоремы 2 (§ 7) существует бесконечное множество плоскостей вида

$$(f, \Phi\Sigma_m - \Phi) = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots), \tag{36}$$

проходящих через ψ. Возьмем одну из них $(f, \Phi\Sigma_1 - \Phi) = 0$; так как

это плоскость гиперболическая для $\mathfrak{P}$ [1] § 5], то на ней лежит положительная форма ω. Пусть

$$(f, \Phi\Sigma'_s - \Phi) = 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, l)$$

—все плоскости, отличные от (36), для которых $(\omega, \Phi\Sigma'_s - \Phi) < 0$; так как для этих плоскостей $(\psi, \Phi\Sigma'_s - \Phi) > 0$, то при достаточно малом $t > 0$

$$t(\psi, \Phi\Sigma'_s - \Phi) - t(\omega, \Phi\Sigma'_s - \Phi) < (\psi, \Phi\Sigma'_s - \Phi) \quad (s = 1, 2, \ldots, l).$$

Тогда про форму $\omega' = (1-t)\psi + t\omega$ можем сказать, что она лежит на одной из плоскостей (36) и что неравенство $(\omega', \Phi\Sigma - \Phi) < 0$ может иметь место лишь для плоскостей (36). Соединяя, наконец, точки ω' и φ отрезком и рассуждая, как в предыдущем замечании, докажем, что одна из плоскостей (36) есть грань.

. На основании замечаний 1, 2, 3 легко доказать, что из неравенств $(f, \Phi\Sigma - \Phi) \geqslant 0$, определяющих область $V(\varphi)$, можно удержать лишь те, которые соответствуют граням $V(\varphi)$. Возьмем какую-нибудь грань и напишем уравнение ее в виде $(f, \Phi S'^{-1} - \Phi) = 0$ (S — унимодулярная матрица); для некоторой положительной формы f_0 имеем

$$(f_0, \Phi) = (f_0, \Phi S'^{-1}) < (f_0, \Phi\Sigma) \text{ при } \Phi\Sigma \neq \Phi, \Phi S'^{-1}. \tag{37}$$

Отсюда прежде всего вытекает, что f_0 принадлежит областям $V(\varphi)$ и $V(\varphi S)$, так что элементы матрицы S ограничены некоторым пределом (следствие из теоремы 1, § 7). Таким образом, число граней $V(\varphi)$ конечно, т. е. $V(\varphi)$ есть обыкновенная линейная пирамида. Далее, из (37) вытекает, что плоскость $(f, \Phi S'^{-1} - \Phi) = 0$ является гранью и для пирамиды $V(\varphi S)$, причем $V(\varphi)$ и $V(\varphi S)$ соприкасаются по этой грани; внутренние точки этой грани не принадлежат, кроме $V(\varphi)$ и $V(\varphi S)$, никаким другим пирамидам $V(\varphi\Sigma)$.

§ 9. Докажем, что всегда существуют ребра пирамиды $V(\varphi)$, лежащие на границе конуса $\mathfrak{P}$. Рассмотрим луч в $\mathfrak{F}$, идущий из начала координат в точку вида $f_0 = (q_1x_1 + \ldots + q_nx_n)^2$; легко видеть, что существует касательная к $\mathfrak{P}$ плоскость, не имеющая с $\mathfrak{P}$ общих точек, кроме точек луча f_0. Поэтому, для того чтобы указанный луч был ребром пирамиды $V(\varphi)$, необходимо и достаточно, чтобы f_0 принадлежала $V(\varphi)$. Если f_0 принадлежит $V(\varphi)$, то по теореме 2 (§ 7) f_0 унимодулярной подстановкой приводится к виду ax_1^2, т. е. $q_1, \ldots, q_n$ можно предполагать целыми числами без общего делителя; далее, $\Phi(q_i) \leqslant \Phi'(q_i)$ для любой эквивалентной Φ формы Φ'. Эти неравенства равносильны тому, что $\Phi(q_i)$ есть минимум формы Φ для целых аргументов. Итак, луч $t(q_1x_1 + \ldots + q_nx_n)^2$ $(0 < t < \infty)$ на границе $\mathfrak{P}$ является тогда и только тогда ребром $V(\varphi)$, когда числа $q_1, \ldots, q_n$ целые и дают представление минимума формы Φ.

§ 10. Если φ — положительная форма, обладающая автоморфизмами (§ 6), то очевидно можно найти сколь угодно близкие к φ, эквивалентные и различные между собою формы, так что ни при каком выборе фундаментальной области V группы G_n точка φ не может лежать внутри V. Напротив, если φ не имеет автоморфизмов, то из изложенного

выше вытекает, что существует выпуклая линейная с конечным числом граней фундаментальная область G_n (именно, $V(\varphi)$), внутри которой лежит φ. Эта теорема дает ответ на вопрос, предложенный мне Б. Н. Делоне.

При $n=2$ фундаментальную область группы G_2 дают условия приведения Лагранжа

$$0 \leqslant 2a_{12} \leqslant a_{11} \leqslant a_{22}. \tag{38}$$

Граница этой пирамиды сплошь состоит из форм, обладающих аутоморфизмами, откуда вытекает, что другой связной фундаментальной области группы G_2, кроме пирамиды (38) и ей эквивалентных, не существует. На этот факт впервые обратил внимание Б. Н. Делоне [см. ([2]), § 30]. Пусть φ — форма без аутоморфизмов и Σ — одна из подстановок, для которых $(f, \Phi\Sigma - \Phi) = 0$ есть грань $V(\varphi)$; очевидно при всех бесконечно малых изменениях φ подстановка Σ сохранит свое значение для области $V(\varphi)$. При этом, если $n > 2$, то положение плоскости $(f, \Phi\Sigma - \Phi) = 0$ может быть изменено надлежащим изменением формы φ. Итак, фундаментальная область группы G_n при $n > 2$ может меняться непрерывно.

Ленинградский гос. университет.

Поступило
28.IX.1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Minkowski H., Diskontinuitätsbereich für arithm. Äquivalenz, Ges. Abh., Bd. II, 1911.

[2] Делоне Б. Н., Геометрия положит. квадр. форм, Усп. матем. наук, III — IV, 1937 — 38.

[3] Voronoi G., Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, Crellé Journal, Bd. 133, 1908.

B. WENKOV. ÜBER DIE REDUCTION POSITIVER QUADRATISCHER FORMEN

ZUSAMMENFASSUNG

Es sei G_n die Gruppe der unimodulären ganzzahligen Substitutionen von n Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$, $\mathfrak{P}$ — der $\frac{n(n+1)}{2}$-dimensionale Raum der Koeffizienten a_{ij} der positiven quadratischen Formen $f = \sum_1^n a_{ij} x_i x_j$ $(a_{ij} = a_{ji})$. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Aufstellung in $\mathfrak{P}$ eines sehr allgemeinen Fundamentalbereiches der Gruppe G_n.

Ist $S = (p_{ij})$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ eine quadratische Matrix, so bezeichnen wir durch fS die Form $f(p_{11}x_1 + \ldots + p_{1n}x_n, \ldots)$; sind $f = \sum a_{ij} x_i x_j$ und $\varphi = \sum b_{ij} x_{ij}$ zwei quadratische Formen, so definieren wir das Symbol (f, φ) durch die Formel (4). Es sei φ eine gegebene positive quadratische Form, Φ — ihre Adjungierte, $\sum$ durchläuft die Gruppe G_n; $V(\varphi)$ ist die Menge der Formen f, welche allen Ungleichungen (18) genügen. $V(\varphi)$ ist der $\varkappa$-fache Fundamentalbereich der Gruppe G_n (wo $\varkappa$ die Anzahl der Automorphismen von φ ist). Der Verfasser beweist, dass $V(\varphi)$ eine Pyramide in $\mathfrak{P}$ mit einer endlichen Anzahl von Seiten ist.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 53—104 Série mathématiqu

М. А. НАЙМАРК

О САМОСОПРЯЖЕННЫХ РАСШИРЕНИЯХ ВТОРОГО РОДА СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье вводится понятие расширения второго рода линейного оператора и дается общий вид самосопряженных расширений второго рода замкнутого симметрического оператора. В связи с этим получается ряд других результатов, имеющих самостоятельный интерес.

Пусть H — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ *. Как известно **, всякий такой оператор допускает максимальные расширения, а в некоторых случаях самосопряженные (гипермаксимальные) расширения. При этом, однако, основное пространство $\mathfrak{H}$ остается неизменным, и расширение области определения H производится, не выходя за пределы $\mathfrak{H}$.

Настоящая работа посвящена другому виду расширения, которое я называю расширением второго рода оператора H в отличие от обычного расширения, которое я буду называть расширением первого рода и которое получается расширением самого пространства $\mathfrak{H}$. Именно, линейный оператор A в $\mathfrak{H}$ называется расширением второго рода оператора A_1 в пространстве $\mathfrak{H}_1$, где $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$, если область определения A пересекается с $\mathfrak{H}_1$ по области определения A_1 и если на этом пересечении A совпадает с A_1.

С описанным здесь переходом от A к A_1 часто приходится иметь дело при рассмотрении дифференциальных операторов, именно, при сужении области изменения независимых переменных. Наиболее интересным является тот случай, когда $A = H$ есть самосопряженный оператор; тогда A_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$.

Здесь сразу же возникают следующие вопросы:

1° Всякий ли замкнутый симметрический оператор имеет самосопряженные расширения второго рода?

2° Как охарактеризовать все самосопряженные расширения второго рода данного симметрического оператора?

В общих чертах эти вопросы решаются следующим образом.

Пусть H в $\mathfrak{H}$—самосопряженное расширение второго замкнутого

* В этой работе сепарабельность $\mathfrak{H}$ не предполагается.

** См. (7), стр. 90 или (10), стр. 339.

симметрического оператора H_1 в $\mathfrak{H}_1$. Обозначим через $\mathfrak{H}_2$ ортогональное дополнение $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}$, а через H_2 — оператор, определенный на пересечении $\mathfrak{H}_2$ с областью определения H и равный там H. Тогда значения H_2 входят в $\mathfrak{H}_2$, так что H_2 является замкнутым эрмитовым* оператором в $\mathfrak{H}_2$, причем его область определения a priori не должна быть обязательно плотной в $\mathfrak{H}_2$.

Обозначим, далее, через H_0 прямую сумму H_1 и H_2, т. е. оператор в $\mathfrak{H}$, определенный равенством

$$H_0(f_1+f_2)=H_1f_1+H_2f_2,$$

где H_1f_1, H_2f_2 имеют смысл. Очевидно, H_0 является замкнутым эрмитовым оператором в $\mathfrak{H}$, а H — расширением первого рода оператора H_0. Дефектные же пространства $\mathfrak{M}_0^-$, $\mathfrak{M}_0^+$ оператора H_0, т. е. совокупности векторов, ортогональных соответственно ко всем векторам вида $(H_0-i1)f$, $(H_0+i1)f$, являются прямыми суммами соответствующих дефектных пространств $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ и $\mathfrak{M}_2^-$, $\mathfrak{M}_2^+$ операторов H_1 и H_2. Отсюда легко выразить H через H_0 и через изометрический оператор U, отображающий $\mathfrak{M}_0^-=\mathfrak{M}_1^-\oplus\mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_0^+=\mathfrak{M}_1^+\oplus\mathfrak{M}_2^+$. При этом U изображается в виде матрицы $\|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ из четырех операторов, где U_{jk} — ограниченный оператор из $\mathfrak{M}_k^-$ в $\mathfrak{M}_j^+$. Таким образом область определения H состоит из векторов вида

$$f=f_0-\varphi+U\varphi=f_1+f_2-(\varphi_1+\varphi_2)+(U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2)+(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2),$$
$$\varphi_1\in\mathfrak{M}_1^-,\ \varphi_2\in\mathfrak{M}_2^-,$$

причем

$$Hf=H_0f_0+i\varphi+iU\varphi=$$
$$=H_1f_1+H_2f_2+i(\varphi_1+\varphi_2)+i(U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2)+i(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2).$$

Мы будем говорить, что H_2 и U *определяют* H.

Оказывается, что данные H_2 и U определяют самосопряженное расширение второго рода оператора H_1 тогда и только тогда, когда

$$\text{из}\quad f_1-\varphi_1+U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2=0\quad\text{следует}\quad f_1=\varphi_1=\varphi_2=0 \tag{1}$$

и

$$\text{из}\quad f_2-\varphi_2+U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2=0\quad\text{следует}\quad f_2=\varphi_1=\varphi_2=0. \tag{2}$$

В частности должно быть

$$U_{12}\varphi_2\neq0,\quad U_{21}\varphi_1\neq0,\quad U_{12}^*\psi_1\neq0,\quad U_{21}^*\psi_2\neq0 \tag{3}$$

при $\varphi_1\neq0$, $\varphi_2\neq0$, $\psi_1\neq0$, $\psi_2\neq0$ соответственно. Отсюда следует, что

$$\dim\mathfrak{M}_1^-=\dim\mathfrak{M}_2^+,\qquad \dim\mathfrak{M}_2^-=\dim\mathfrak{M}_1^+, \tag{4}$$

где $\dim\mathfrak{M}$ — мощность полной ортонормальной системы в $\mathfrak{M}$. В § 4 дан общий вид всех U, удовлетворяющих условию (3), а в § 5 — всех U, удовлетворяющих условиям (1) и (2).

---

* По поводу терминологии см., например, [1], стр. 387.

Тем самым дается решение 2°. Одновременно решается в положительном смысле и 1°. Более того, если хотя бы одно из чисел $\dim \mathfrak{M}_1^-$, $\dim \mathfrak{M}_1^+$ конечно, то область определения H_2 плотна в $\mathfrak{H}_2$; обратно, для всякого H_2 с плотной в $\mathfrak{H}_2$ областью определения, удовлетворяющего (4), существует оператор U такой, что H_2 и U определяют самосопряженное продолжение оператора H_1. Именно, в этом случае условия (1) и (2) сводятся к условию (3). Если же оба числа $\dim \mathfrak{M}_1^-$, $\dim \mathfrak{M}_1^+$ бесконечны, то для произвольного H_2, удовлетворяющего условию (4), существует U такой, что H_2 и U определяют некоторое самосопряженное расширение второго рода оператора H_1. В частности, если $\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_1^+$ и $\dim \mathfrak{M}_1^-$ — бесконечное кардинальное число, то существуют такие самосопряженные расширения второго рода H оператора H_1, что область определения H пересекается с $\mathfrak{H}_2$ только по нулю.

Распределение материала в работе следующее:

В § 1 рассмотрен наиболее общий случай, когда A — произвольный замкнутый оператор с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}$, и изучена связь между A^* и A_1^*, а также между их графиками.

В § 2 строятся H_1^* и $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ по данному H.

§ 3 посвящен эрмитовым операторам, область определения которых не обязательно плотна в рассматриваемом пространстве. Некоторые из полученных здесь теорем (особенно теоремы 8 и 9) имеют самостоятельный интерес.

В § 4 рассмотрены прямые суммы операторов, в частности, как уже упоминалось, рассмотрен общий вид изометрических операторов U, отображающих $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ и удовлетворяющих условию (3).

В § 5 дан общий вид всех самосопряженных расширений второго рода данного симметрического оператора.

Наконец, § 6 посвящен выводу спектральных (вообще неортогональных) разложений симметрического оператора, аналогичных разложениям Карлемана *. Однако связь этих разложений с карлемановскими остается пока не выясненной **.

В заключение пользуюсь случаем выразить благодарность А. И. Плеснеру за ряд ценных советов, данных им при выполнении этой работы.

§ 1. Часть замкнутого оператора в инвариантном подпространстве

Определение 1. Замкнутый оператор A в $\mathfrak{H}$ с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}$, мы будем называть N-оператором в $\mathfrak{H}$.

---

* Карлеман (2), часть I; изложение результатов Карлемана в абстрактной форме имеется также у Стона, (10) гл. IX, § 3.

** Примеч. при корректуре. Недавно мне удалось решить этот вопрос, а также охарактеризовать все карлемановские спектральные разложения симметрического оператора. Изложение этих результатов я надеюсь опубликовать в одном из ближайших номеров этого журнала.

Определение 2. Пусть A есть N-оператор в $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{H}_1$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$. Будем говорить, что $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно A, если*

$$\overline{\mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}_1} = \mathfrak{H}_1 \quad \text{и} \quad A(\mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}) \subset \mathfrak{H}_1. \tag{1}$$

Оператор A_1 в $\mathfrak{H}_1$, определенный равенством

$$A_1 = A \quad \text{на} \quad \mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}_1, \tag{2}$$

мы будем называть частью A в $\mathfrak{H}_1$, а A — расширением второго рода оператора A_1 в пространство $\mathfrak{H}$. В дальнейшем термин «расширение» будет всегда обозначать расширение второго рода.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{H}_1$ — замкнутое подпространство, инвариантное относительно A, и A_1 — часть A в $\mathfrak{H}_1$. Тогда A_1 есть N-оператор в $\mathfrak{H}_1$. Пусть, далее, E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$, а B_1 — оператор с областью определения*

$$\mathfrak{D}(B_1) = E_1\mathfrak{D}(A^*), \tag{3}$$

определенный равенством

$$B_1E_1f = E_1A^*f, \quad f \in \mathfrak{D}(H). \tag{4}$$

Тогда

$$A_1^* = \tilde{B}_1. \tag{5}$$

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Для доказательства второго заметим, что при $f \in \mathfrak{D}(A_1)$, $g = E_1\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{D}(A^*)$ имеем

$$(A_1f, E_1\varphi) = (E_1A_1f, \varphi) = (A_1f, \varphi) = (f, A^*\varphi) = (E_1f, A^*\varphi) = (f, E_1A^*\varphi). \tag{6}$$

Отсюда следует, что если $E_1\varphi = 0$, то и $(f, E_1A^*\varphi) = 0$ для всех $f \in \mathfrak{D}(A)$, следовательно, в силу (6), $E_1A^*\varphi = 0$. Это означает, что (4) определяет B_1 однозначно. Кроме того из (6) следует, что $E_1\varphi \in \mathfrak{D}(A_1^*)$ и $A_1^*E_1\varphi = E_1A^*\varphi = B_1E_1\varphi$, т. е.

$$B_1 \subset A_1^*;$$

следовательно ** и

$$\tilde{B}_1 \subset A_1^*. \tag{7}$$

Пусть теперь $f \in \mathfrak{D}(B_1^*)$; тогда для всех $E_1\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{D}(A^*)$ имеем

$$(\varphi, B_1^*f) = (E_1\varphi, B_1^*f) = (B_1E_1\varphi, f) = (E_1A^*\varphi, f) = (A^*\varphi, E_1f) = (A^*\varphi, f),$$

следовательно *** $f \in \mathfrak{D}(A^{**}) = \mathfrak{D}(A)$ и $B_1^*f = A^{**}f = Af$. Кроме того $f \in \mathfrak{H}_1$, следовательно $f \in \mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{D}(A_1)$ и $B_1^*f = A_1f$, так что

$$B_1^* \subset A_1.$$

---

* Здесь, как и в дальнейшем, $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{R}(A)$ обозначают области определения и изменения A; $\overline{\mathfrak{M}}$ — замыкание $\mathfrak{M}$ и $A\mathfrak{M}$ — область изменения A на $\mathfrak{M}$.

** $A \subset B$ означает, что B — расширение первого рода A, т. е. $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(B)$ и $Af = Bf$, если $f \in \mathfrak{D}(A)$; $\tilde{A}$ обозначает замыкание A (если таковое существует).

*** В силу известной теоремы Неймана ([8]) для всякого N-оператора A имеет место равенство $A^{**} = A$.

Отсюда, беря $*$, получаем

$$\tilde{B}_1 = B_1^{**} \supset A_1^*, \tag{8}$$

и сравнение с (7) дает, что $\tilde{B}_1 = A_1^*$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть* $\mathfrak{B}(A)$ — *график* * A *в* $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$; $\mathfrak{B}(A_1)$, $\mathfrak{B}(A_1^*)$ — *графики* A_1, A_1^* *в* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1$, *а* U — *унитарный оператор в* $\mathfrak{H}'$, *определяемый равенством*

$$U\{f, g\} = \{g, -f\}.$$

Пусть, далее, $E_1' = E_1 \oplus E_1$ — *оператор проектирования в* $\mathfrak{H}'$ *на* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1$. *Тогда* **

$$\mathfrak{B}(A_1^*) = E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) = E_1'(\mathfrak{B}(A^*) \oplus U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1))). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $\{f_0, g_0\} \in \mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)$. Тогда для любого $f \in \mathfrak{D}(A_1)$

$$0 = (\{f_0, g_0\}, \{A_1 f, -f\}) = (f_0, A_1 f) - (g_0, f) = (E_1 f_0, A_1 f) - (E_1 g_0, f),$$

следовательно, $E_1 f_0 \in \mathfrak{D}(A_1^*)$ и $A_1^* E_1 f_0 = E_1 g_0$. Это означает, что

$$E_1'\{f_0, g_0\} = \{E_1 f_0, E_1 g_0\} \in \mathfrak{B}(A_1^*),$$

так что

$$E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) \subset \mathfrak{B}(A_1^*). \tag{10}$$

Пусть, обратно, $\{f_0, g_0\} \in \mathfrak{B}(A_1^*)$. Тогда для любого $f \in \mathfrak{D}(A_1)$

$$0 = (A_1 f, f_0) - (f, g_0) = (\{A_1 f, -f\}, \{f_0, g_0\}) = (U\{f, A_1 f\}, \{f_0, g_0\}),$$

следовательно,

$$\{f_0, g_0\} \in \mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)$$

и

$$\{f_0, g_0\} = E_1'\{f_0, g_0\} \in E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)).$$

Сравнивая последний результат с (10), получаем, что

$$\mathfrak{B}(A_1^*) = E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)).$$

Кроме того

$$(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) \ominus \mathfrak{B}(A^*) = (\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) \ominus (\mathfrak{B}' \ominus U\mathfrak{B}(A)) = \\ = U\mathfrak{B}(A) \ominus U\mathfrak{B}(A_1) = U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1)),$$

следовательно,

$$\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1) = \mathfrak{B}(A^*) \oplus U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1))$$

и

$$\mathfrak{B}(A_1^*) = E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) = E_1'(\mathfrak{B}(A^*) \oplus U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1))).$$

---

* Графиком A называется совокупность пар вида $\{f, Af\}$, $f \in \mathfrak{D}(A)$; определение прямой суммы пространств и операторов см. в § 4.

** Знак $\oplus$ обозначает прямую сумму взаимно ортогональных подпространств. $\ominus$ — ортогональное дополнение.

ТЕОРЕМА 3. *Всякий элемент* $f \in \mathfrak{D}(A_1^*)$ *имеет вид*

$$f = E_1\varphi + E_1 A g_0, \tag{11}$$

где

$$\varphi \in \mathfrak{D}(A^*), \quad E_1 A g_0 \in \mathfrak{D}(A_1^*) \tag{12}$$

и

$$A_1^* E_1 A g_0 = -E_1 g_0. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{D}(A_1^*)$. Тогда $\{f, A_1^* f\} \in \mathfrak{B}(A_1^*)$, следовательно в силу (9)

$$\{f, A_1^* f\} = E_1' (\{\varphi, A^*\varphi\} + U\{g_0, g_0^*\}), \tag{14}$$

где

$$\varphi \in \mathfrak{D}(A^*), \quad \{g_0, g_0^*\} \in \mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1). \tag{15}$$

Из (14) получаем

$$\{f, A_1^* f\} = E_1'(\{\varphi, A^*\varphi\} + \{g_0^*, -g_0\} = E_1'\{\varphi + g_0^*, A^*\varphi - g_0\} = \\ = \{E_1\varphi + E_1 g_0^*, E_1 A^* f - E_1 g_0\},$$

следовательно

$$f = E_1\varphi + E_1 g_0^*, \quad A_1^* f = E_1 A^* f - E_1 g_0. \tag{16}$$

С другой стороны, $E_1\varphi \in \mathfrak{D}(B_1) \subset \mathfrak{D}(A_1^*)$ (см. теорему 1), и

$$A_1^* E_1 \varphi = B_1 E_1 \varphi = E_1 A^* f,$$

так что в силу (16)

$$A_1^* f = A_1^* E_1 \varphi - E_1 g_0, \quad -E_1 g_0 = A_1^*(f - E_1\varphi) = A_1^* E_1 g_0^*. \tag{17}$$

Кроме того из (15) следует, что $\{g_0, g_0^*\} \in \mathfrak{B}(A)$; поэтому $g_0^* = A g_0$ и из (17) мы получаем

$$A_1^* E_1 A g_0 = -E_1 g_0. \tag{18}$$

Утверждение теоремы следует теперь из (16) и (18).

Теорема 3 дает возможность построить замыкание $\tilde{B}_1 = A_1^*$ оператора B_1; более полные результаты получаются, если A — самосопряженный оператор.

§ 2. Свойства части самосопряженного оператора

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* H — *самосопряженный оператор в* $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ — *замкнутое подпространство, инвариантное относительно* H, *и* H_1 — *часть* H *в* $\mathfrak{H}_1$. *Тогда* H_1 — *замкнутый симметрический оператор в* $\mathfrak{H}_1$; *он является самосопряженным в том и только том случае, когда* $\mathfrak{H}_1$ *приводит* H.

Доказательство. В силу теоремы 1, H_1 есть N-оператор в $\mathfrak{H}_1$. Так как, кроме того, H_1 равен в своей области определения самосопряженному оператору H, то он — симметрический.

Пусть теперь H_1 — самосопряженный оператор. Тогда

$$H_1 = H_1^* \supset B_1,$$

следовательно, если $f \in \mathfrak{D}(H)$, то $E_1 f \in \mathfrak{D}(B_1) \subset \mathfrak{D}(H)$ и

$$E_1 Hf = E_1 H^* f = B_1 E_1 f = H_1 E_1 f = HE_1 f,$$

т. е. $\mathfrak{H}_1$ приводит H. Обратно, если $\mathfrak{H}_1$ приводит H, то очевидно что H_1 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$.

ТЕОРЕМА 5. *Пусть H, $\mathfrak{H}_1$, H_1 — те же, что и в теореме 4, а λ — произвольное комплексное число такое, что $I(\lambda) \neq 0$. Тогда всякий элемент $f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ представим в виде*

$$f = E_1 \varphi + \psi, \tag{1}$$

где $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$, а ψ удовлетворяет условию

$$H_1^* \psi = \lambda \psi.$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$; положим

$$\varphi = (H - \lambda 1)^{-1} (H_1^* - \lambda 1) f.$$

Очевидно, $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$ и, по теореме 1,

$$H_1^* E_1 \varphi = E_1 H \varphi,$$

следовательно

$$(H_1^* - \lambda 1) E_1 \varphi = E_1 H \varphi - \lambda E_1 \varphi = E_1 (H - \lambda 1) \varphi = (H_1^* - \lambda 1) f. \tag{2}$$

Положим

$$\psi = f - E_1 \varphi;$$

тогда

$$f = E_1 \varphi + \psi, \qquad \varphi \in \mathfrak{D}(H);$$

кроме того из (2) получаем

$$(H_1^* - \lambda 1) \psi = (H_1^* - \lambda 1)(f - E_1 \varphi) = 0, \qquad H_1^* \psi = \lambda \psi.$$

ТЕОРЕМА 6. *Пусть H, $\mathfrak{H}_1$, H_1 и λ — те же, что и в теореме 5. Тогда для всякого элемента ψ, удовлетворяющего условию $H_1^* \psi = \lambda \psi$, существует последовательность $f_n \in \mathfrak{D}(H)$ такая, что* *

$$E_1 H f_n = \lambda E_1 f_n; \qquad \psi = \lim_{n \to \infty} E_1 f_n. \tag{3}$$

Доказательство. В силу теоремы 1 существует последовательность $g_n \in \mathfrak{D}(H)$ такая, что

$$E_1 g_n \to \psi, \quad B_1 E_1 g_n = E_1 H g_n \to H_1^* \psi = \lambda \psi,$$

следовательно

$$E_1 (H - \lambda 1) g_n \to 0.$$

---

* Во всей этой работе, если не оговорено особо, предел рассматривается в смысле сходимости по норме (т. е. сильной сходимости).

Положим

$$\psi_n = (H - \lambda 1)^{-1} E_1 (H - \lambda 1) g_n;$$

тогда $\psi_n \in \mathfrak{D}(H)$ и, в силу непрерывности $(H - \lambda 1)^{-1}$, $\psi_n \to 0$. Кроме того

$$E_1 (H - \lambda 1) \psi_n = E_1 (H - \lambda 1) g_n,$$

следовательно

$$E_1 (H - \lambda 1)(g_n - \psi_n) = 0.$$

Отсюда, полагая $f_n = g_n - \psi_n$, имеем

$$f_n \in \mathfrak{D}(H), \qquad E_1 H f_n = \lambda E_1 f_n$$

и

$$\lim E_1 f_n = \lim E_1 g_n - \lim E_1 \psi_n = \psi - 0 = \psi.$$

Следствие 1. *Всякий элемент $f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ представим в виде*

$$f = E_1 \varphi + \psi,$$

где $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$, *а* ψ *есть предел последовательности* $E_1 f_n$ *такой, что* $f_n \in \mathfrak{D}(H)$ *и* $E_1 H f_n = \lambda E_1 f_n$.

Это следствие непосредственно получается из теорем 5 и 6.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{M}_\lambda$ — совокупность векторов $f \in \mathfrak{D}(B_1) = E_1 \mathfrak{D}(H)$ и $g \in \mathfrak{D}(H_1^*)$, удовлетворяющих соотношениям*

$$B_1 f = \lambda f, \qquad H_1^* g = \lambda g$$

Тогда

$$\mathfrak{M}_\lambda = \overline{\mathfrak{N}_\lambda}. \tag{4}$$

Это следствие является простой перефразировкой теоремы 6, ибо (3) можно переписать в виде

$$B_1 \psi_n = \lambda \psi_n, \quad \psi = \lim_{n \to \infty} \psi_n, \quad \psi_n = E_1 f_n.$$

Следствие 3. *Если для какого-нибудь λ $(I(\lambda) \neq 0)$ $\mathfrak{N}_\lambda$ конечномерно, то $H_1^* = B_1$.*

Доказательство. В самом деле, в этом случае

$$\mathfrak{M}_\lambda = \overline{\mathfrak{N}_\lambda} = \mathfrak{N}_\lambda \subset E_1 \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{D}(B_1).$$

С другой стороны, согласно теореме 5, всякий элемент $f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ имеет вид

$$f = E_1 \varphi + \psi, \quad \varphi \in \mathfrak{D}(H), \quad \psi \in \mathfrak{M}_\lambda;$$

следовательно

$$f \in \mathfrak{D}(B_1),$$

так что

$$\mathfrak{D}(B_1) = \mathfrak{D}(H_1^*), \qquad B_1 = H_1^*.$$

Следствие 4. *Если для какого-нибудь λ $(I(\lambda) \neq 0)$, $\mathfrak{N}_\lambda = (0)$, то H — максимальный оператор, дефектная полуплоскость которого не содержит λ.*

В самом деле, в этом случае $\mathfrak{M}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda = (0)$ и полуплоскость, содержащая λ, не является дефектной.

Следствие 5. *Если для λ_1 с $I(\lambda_1) > 0$ и для λ_2 с $I(\lambda_2) < 0$ $\mathfrak{N}_{\lambda_1} = \mathfrak{N}_{\lambda_2} = (0)$, то H_1—самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_1$ приводит $\mathfrak{H}$.*

Согласно следствию 4 обе полуплоскости не являются дефектными для H_1, так что H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$. Поэтому $\mathfrak{H}_1$ приводит H в силу теоремы 4.

Пример 1. Пусть $\mathfrak{H}$ — совокупность функций $f(x)$ с суммируемым квадратом модуля в интервале $(-\infty, \infty)$, $\mathfrak{D}(H)$ — совокупность $f(x) \in \mathfrak{H}$, абсолютно непрерывных в любом конечном интервале и таких, что $f'(x) \in \mathfrak{H}$. Для $f(x) \in \mathfrak{D}(H)$ положим

$$H f(x) = -i \frac{d f(x)}{dx};$$

как известно, H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Пусть $\mathfrak{H}_1$ — совокупность функций $\varphi(x)$ с суммируемым квадратом модуля в интервале $[0, 1]$; мы включим $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}$, отождествляя $\varphi(x)$ с функцией $f(x) \in \mathfrak{H}$, определяемой равенствами

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{почти всюду в } [0, 1] \\ 0 & \text{» » вне } [0, 1]. \end{cases}$$

Очевидно, $\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{D}(H)$ состоит из функций $\varphi(x)$, абсолютно непрерывных в интервале $[0, 1]$, равных нулю на концах $[0, 1]$ и таких, что $\varphi'(x) \in \mathfrak{H}_1$; следовательно

$$\overline{\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}_1.$$

Кроме того если $\varphi(x) \in \mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{D}(H)$, то $\varphi(x) = 0$ вне $[0, 1]$, а значит и

$$Hf(x) = -i \frac{d f(x)}{dx} = 0 \qquad \text{вне } [0, 1],$$

т. е. $H f(x) \in \mathfrak{H}_1$.

Таким образом $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно H и часть H_1 оператора H в $\mathfrak{H}_1$ определена в $\mathfrak{H}_1 \cdot \mathfrak{D}(H)$ равенством

$$H_1 \varphi(x) = -i \frac{d \varphi(x)}{dx}.$$

В силу теоремы 4, H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$. Далее, $\mathfrak{D}(B_1) = E_1 \mathfrak{D}(H^*) = E_1 \mathfrak{D}(H)$ состоит из функций $\varphi(x)$, абсолютно непрерывных в интервале $[0, 1]$ (без условия $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$) и таких, что $\varphi'(x) \in \mathfrak{H}_1$, причем B_1 определен для $\varphi \in \mathfrak{D}(B_1)$, $\varphi = E_1 f$, $f \in \mathfrak{D}(H)$ равенством

$$B_1 \varphi(x) = B_1 E_1 f(x) = E_1 H f(x) = -E_1 i \frac{d f(x)}{dx} = -i \frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Найдем теперь $\mathfrak{N}_\lambda$. Если $\varphi(x) \in \mathfrak{N}_\lambda$, то

$$-i\varphi'(x) = \lambda \varphi(x),$$

следовательно

$$\varphi(x) = Ce^{i\lambda x}.$$

Таким образом $\mathfrak{N}_\lambda$ одномерно; поэтому $\mathfrak{M}_\lambda=\mathfrak{N}_\lambda$ и $H_1^*=B_1$ (см. следствие 3), так что B_1 — замкнутый оператор в $\mathfrak{H}_1$. Полагая $\lambda=\pm i$, получаем, что индексом дефекта H_1 является (1, 1).

Пример 2. Пусть $\mathfrak{H}$ и H те же, что и в примере 1, а $\mathfrak{H}_1$ — совокупность функций $\varphi(x)$ с суммируемым квадратом модуля в интервале $[0, +\infty)$. Мы включим $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}$, отождествляя $\varphi(x)$ с функцией

$$f(x)=\begin{cases}\varphi(x) & \text{почти всюду в } [0, +\infty),\\ 0 & \text{» » вне } [0, +\infty).\end{cases}$$

Легко видеть, что и в этом случае $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно H, причем $\mathfrak{D}(H_1)=\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_1$ состоит из всех $\varphi(x)\in\mathfrak{H}_1$, абсолютно непрерывных в любом конечном подинтервале интервала $[0, +\infty)$, равных нулю при $x=0$ и таких, что $\varphi'(x)\in\mathfrak{H}_1$, а

$$H_1\varphi(x)=-i\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Далее, $\mathfrak{D}(B_1)=E_1\mathfrak{D}(H)$ состоит из всех $\varphi(x)\in\mathfrak{H}_1$, абсолютно непрерывных в любом конечном подинтервале интервала $(0, +\infty)$ (без условия $\varphi(0)=0$) и таких, что $\varphi'(x)\in\mathfrak{H}_1$, а

$$B_1\varphi(x)=-i\frac{d\varphi(x)}{dx}.$$

Если $\varphi(x)\in\mathfrak{N}_{-i}$, то $\varphi(x)=Ce^x$ и $\varphi(x)\in\mathfrak{H}_1$ только в том случае, когда $C=0$; следовательно $\mathfrak{N}_{-i}=(0)$. Если же $\varphi(x)=\mathfrak{N}_i$, то $\varphi(x)=Ce^{-x}$ и $\varphi(x)\in\mathfrak{H}_1$ при любом C; следовательно $\mathfrak{N}_i$ одномерно. Поэтому $H_1^*=B_1$; B_1 — замкнутый оператор и H_1 — симметрический оператор * с индексом дефекта (0, 1).

Пример 3. Пусть $\mathfrak{H}$ — совокупность функций $f(x, y)$ с суммируемым квадратом модуля в $[(-\infty, +\infty), (-\infty, +\infty)]$, а $\mathfrak{D}(H)$ — совокупность $f(x, y)\in\mathfrak{H}$ и удовлетворяющих следующим условиям:

1) почти для всех y функция $f(x, y)$ абсолютно непрерывна в любом конечном интервале $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$;

2) почти для всех значений x функция $f'_x(x, y)$ эквивалентна ** функции, абсолютно непрерывной в любом конечном интервале $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$;

3) $f''_{xy}(x, y)\in\mathfrak{H}$.

Для $f(x, y)\in\mathfrak{D}(H)$ положим

$$Hf(x, y)=f''_{xy}(x, y);$$

легко видеть, что H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$.

Пусть $\mathfrak{H}$ — совокупность функций $\varphi(x, y)$ с суммируемым квадратом модуля в квадрате $[[0, 1]; [0, 1]]$. Мы включим $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}$, отождествляя $\varphi(x, y)$ с функцией

* Как известно, H_1—так называемый элементарный (т. е. неприводимый с индексом дефекта (0, 1)) симметрический оператор. См., например, ([10]), теорема 10. 8.

** т. е. почти всюду равна.

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) \text{ почти всюду в } [[0, 1]; [0, 1]], \\ 0 \quad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{вне } [[0, 1]; [0, 1]]. \end{cases}$$

Тогда $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно H; $\mathfrak{D}(H_1)$ состоит из всех функций $\varphi(x, y) \in \mathfrak{H}_1$, удовлетворяющих следующим условиям:

a) почти для всех y функция $\varphi(x, y)$ абсолютно непрерывна в интервале $0 \leqslant x \leqslant 1$;

b) почти для всех x функция $\varphi'_x(x, y)$ эквивалентна функции, абсолютно непрерывной в $0 \leqslant y \leqslant 1$;

c) $\varphi''_{xy}(x, y) \in \mathfrak{H}_1$;

d) $\varphi(x, y) = 0$ на границе $[[0, 1]; [0, 1]]$. При этом

$$H_1 \varphi(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y).$$

В силу теоремы 4, H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$. Далее, $\mathfrak{D}(B_1) = E_1 \mathfrak{D}(H)$ состоит из всех функций $\varphi(x, y) \in \mathfrak{H}_1$, удовлетворяющих условиям a) — c), причем

$$B_1 \varphi(x, y) = \varphi''_{xy}(x, y).$$

По теореме 1, $H_1^* = \tilde{B}_1$, причем замыкание оператора B_1 можно построить, пользуясь следствием 1. В данном случае, как показал Гальперин *, можно также положить $\lambda = 0$, однако в общем случае этот результат не имеет места. В самом деле, если бы в следствии 1 всегда можно было положить $\lambda = 0$, то вышло бы, что оператор B_1 замкнут, если $\mathfrak{N}_0 = (0)$. Однако ниже мы увидим (см. добавление), что существуют операторы H в $\mathfrak{H}$ и такие подпространства $\mathfrak{H}_1$, инвариантные относительно H, что $\mathfrak{N}_0 = (0)$, в то время как $\tilde{B}_1 \neq B_1$.

§ 3. Эрмитовы операторы в гильбертовом пространстве

Определение 3. Линейный оператор H в $\mathfrak{H}$ мы будем называть эрмитовым, если для любых двух элементов $f, g \in \mathfrak{D}(H)$

$$(Hf, g) = (f, Hg).$$

Очевидно, эрмитов оператор является симметрическим в том и только в том случае, когда $\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}$.

ЛЕММА 1. *Пусть H—эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$. Определим оператор U_H в $\mathfrak{R}(H - i1)$ равенством*

$$U_H (U - i1) f = (H + i1) f, \qquad f \in \mathfrak{D}(H); \tag{1}$$

тогда U_H — изометрический оператор с областью определения $\mathfrak{R}(H - i1)$ и изменения $\mathfrak{R}(H + i1)$, причем

$$\text{из } U_H \varphi = \varphi \text{ следует } \varphi = 0. \tag{2}$$

* См. ([3]), теорема 3. 1.

Обратно, если U—произвольный изометрический оператор в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условию (2), *то существует эрмитов оператор H такой, что $U = U_H$. При этом*

$$\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{R}(U - 1), \qquad H(U\varphi - \varphi) = i(U\varphi + \varphi) \tag{3}$$

и соответствие

$$H \sim U_H$$

взаимно однозначно.

Доказательство этой леммы получается непосредственно из определения U через H.

Определение 4. Оператор U_H, определенный в лемме 1, мы будем называть трансформацией Кели оператора H. Введем обозначение

$$L^+ = \mathfrak{R}(H + i1), \quad L^- = \mathfrak{R}(H - i1).$$

Подпространства

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{H} \ominus L^-, \qquad \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{H} \ominus L^+$$

мы будем называть дефектными подпространствами оператора H, а пару $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, где * $\mathfrak{m} = \dim \mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{n} = \dim \mathfrak{M}^+$,—индексом дефекта H.

ЛЕММА 2. *Пусть H, H_1—эрмитовы операторы, а U_H, U_{H_1}—их трансформации Кели. Тогда соотношения*

$$H \subset H_1, \qquad U_H \subset U_{H_1}$$

эквивалентны и H замкнут тогда и только тогда, когда U_H замкнут, т. е. когда L^+, L^-—замкнутые подпространства в $\mathfrak{H}$.

Доказательство этой леммы мы опускаем ввиду его очевидности.

ЛЕММА 3. *Пусть H_1—замкнутый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$—его дефектные подпространства, а H—его самосопряженное расширение первого рода, т. е. самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условию $H \supset H_1$.*

Тогда $\mathfrak{D}(H)$ состоит из элементов f, представимых в виде

$$f = f_1 - \varphi + U\varphi, \tag{4}$$

где $f_1 \in \mathfrak{D}(H_1)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_1^-$, а U—изометрическое отображение $\mathfrak{M}_1^-$ на $\mathfrak{M}_1^+$ такое, что из

$$U_{H_1}\varphi_1 + U\varphi = \varphi_1 + \varphi, \quad \varphi_1 \in \mathfrak{D}(U_{H_1}), \quad \varphi \in \mathfrak{M}_1^- \tag{5}$$

следует

$$\varphi_1 = \varphi = 0;$$

* $\dim \mathfrak{M}$ обозначает мощность полного ортонормального базиса в замкнутом пространстве $\mathfrak{M}$.

при этом

$$Hf = H_1 f_1 + i\varphi + iU\varphi. \tag{6}$$

Обратно, если U—изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}_1^-$ на $\mathfrak{M}_1^+$ и удовлетворяющий условию (5), *а H—оператор, определенный равенствами* (4) *и* (6), *то H—самосопряженное расширение первого рода оператора H_1. Полученное таким образом соответствие между H и U взаимно однозначно.*

Доказательство. Пусть H—самосопряженное расширение первого рода оператора H_1. Тогда U_H – унитарный оператор и $U_H \supset U_{H_1}$. Так как U_H отображает $L_1^- = \mathfrak{D}(U_{H_1})$ на $L_1^+ = \mathfrak{R}(U_{H_1})$, то он отображает также $\mathfrak{M}_1^- = \mathfrak{H} \ominus L_1^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ = \mathfrak{H} \ominus L_1^+$. Положим $U = U_H$ на $\mathfrak{M}_1^-$; тогда U изометрически отображает $\mathfrak{M}_1^-$ на $\mathfrak{M}_1^+$. Кроме того первое из равенств (5) перепишется в виде

$$U_H(\varphi_1 + \varphi) = \varphi_1 + \varphi;$$

в силу леммы 1 отсюда следует, что $\varphi_1 + \varphi = 0$. Так как $\varphi_1 \perp \varphi$, то $\varphi_1 = \varphi = 0$, так что U удовлетворяет условию (5). $\mathfrak{D}(H)$ состоит из элементов f вида

$$f = U_H\psi - \psi, \qquad \psi \in \mathfrak{D}(U_H) = \mathfrak{H}$$

и

$$Hf = i(U_H\psi + \psi).$$

С другой стороны, так как $\mathfrak{D}(U_{H_1}) \oplus \mathfrak{M}_1^- = \mathfrak{H}$, то ψ можно представить в виде $\psi = \varphi_1 + \varphi$, $\varphi_1 \in \mathfrak{D}(U_{H_1})$, $\varphi \in \mathfrak{M}_1^-$; следовательно

$$f = U_H(\varphi_1 + \varphi) - (\varphi_1 + \varphi) = U_{H_1}\varphi_1 - \varphi_1 + U\varphi - \varphi = f_1 - \varphi + U\varphi,$$

где

$$f_1 = U_{H_1}\varphi_1 - \varphi_1 \in \mathfrak{D}(H_1),$$

и

$$Hf = i[U_H(\varphi_1 + \varphi) + (\varphi_1 + \varphi)] = i(U_{H_1}\varphi_1 + \varphi_1) + i\varphi + U\varphi = H_1 f_1 + i\varphi + U\varphi.$$

Пусть, обратно, U — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}_1^-$ на $\mathfrak{M}_1^+$ и удовлетворяющий условию (5). Тогда оператор U', определенный во всем $\mathfrak{H}$ равенством

$$U'(\varphi_1 + \varphi) = U_{H_1}\varphi_1 + U\varphi, \quad \varphi_1 \in \mathfrak{D}(U_{H_1}), \quad \varphi \in \mathfrak{M}_1^-,$$

будет, очевидно, унитарным оператором в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющим условию (2). Поэтому $U' = U_H$, где H — некоторый самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, и $H \supset H_1$, в силу $U_H \supset U_{H_1}$. Кроме того из построения $U' = U_H$ ясно, что H задается равенствами (4) и (6). Оператор U определяет, очевидно, H однозначно; с другой стороны, разным U соответствуют разные U_H, а следовательно разные H по лемме 1. Таким образом соответствие между H и U взаимно однозначно.

Замечание. Мы определили U_H равенством (1); но можно было бы ввести оператор V_H, полагая

$$V_H(H + i1)f = (H - i1)f, \tag{7}$$

так что

$$V_H = U_H^{-1}. \tag{8}$$

Легко проверить, что леммы 1, 2, 3 будут верны и в этом случае, если только всюду поменять i на $-i$ местами. Так, например, если H_1 и H те же, что и в лемме 3, то $\mathfrak{D}(H)$ будет состоять из элементов f вида

$$f = f_1 + \varphi - V\varphi, \tag{9}$$

где $f_1 \in \mathfrak{D}(H_1)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_1^+$, а V — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}_1^+$ на $\mathfrak{M}_1^-$ и такой, что

$$\text{из } V_{H_1}\varphi_1 + V\varphi = \varphi_1 + \varphi,\ \varphi_1 \in L_1^+,\ \varphi \in \mathfrak{M}_1^+ \text{ следует } \varphi_1 = \varphi = 0; \tag{10}$$

при этом

$$Hf = H_1 f_1 + i(\varphi + V\varphi). \tag{11}$$

Отметим, что если V и U соответствуют одному и тому же H, то $V = U^{-1}$.

ТЕОРЕМА 7. *Пусть H — замкнутый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$. Тогда*

$$\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^- = \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^+ = (0), \tag{12}$$

и *

$$\overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-} = \overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^+} = \mathfrak{H}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^-$; тогда $f \perp L^- = \mathfrak{R}(H - i1)$. В частности

$$(Hf, f) - i(f, f) = (Hf - if, f) = 0.$$

Так как (Hf, f) и (f, f) — действительные числа, то из этого равенства следует, что $(f, f) = 0$, а значит и $f = 0$. Таким образом $\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^- = (0)$; аналогично доказываем, что и $\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^+ = (0)$.

Пусть теперь $f \perp \mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-$. Тогда в частности $f \perp \mathfrak{M}^-$, а значит, в силу замкнутости H,

$$f \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{M}^- = L^- = \mathfrak{R}(H - i1).$$

Поэтому f представим в виде

$$f = Hg - ig, \quad g \in \mathfrak{D}(H).$$

С другой стороны, $f \perp \mathfrak{D}(H)$, а значит $f \perp g$, т. е.

$$(Hg, g) - i(g, g) = (Hg - ig, g) = (f, g) = 0.$$

Отсюда, как раньше, заключаем, что $g = 0$, следовательно и

$$f = Hg - ig = 0.$$

Таким образом из $f \perp \mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-$ следует $f = 0$; в силу известной теоремы Рисса [9] отсюда вытекает, что $\overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-} = \mathfrak{H}$. Аналогично доказываем, что и $\overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^+} = \mathfrak{H}$.

ТЕОРЕМА 8. *Если H — замкнутый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ — линейно независимы тогда и только тогда, когда $\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}$, т. е. когда H — симметрический оператор.*

Доказательство. Если H — симметрический оператор, то, как известно, $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ линейно независимы. Пусть, обратно, $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ линейно независимы. Положим $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ и определим оператор A следующим образом.

---

* Если $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два линейных многообразия в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ обозначает совокупность всех элементов вида $\varphi + \psi$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\psi \in \mathfrak{N}$.

Если $f \in \mathfrak{D}(A)$, то, в силу линейной независимости $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$, f однозначно представим в виде

$$f = g + \varphi + \psi, \quad g \in \mathfrak{D}(H), \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+, \tag{14}$$

и мы полагаем

$$Af = Hg - i\varphi + i\psi. \tag{15}$$

Так как представление (14) однозначно, то (15) определяет A однозначно и, согласно теореме 7,

$$\mathfrak{H} \supset \overline{\mathfrak{D}(A)} = \overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+} \supset \overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-} = \mathfrak{H},$$

так что

$$\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}. \tag{16}$$

Докажем, что A — замкнутый оператор. Пусть $f_n \in \mathfrak{D}(A)$, т. е.

$$f_n = g_n + \varphi_n + \psi_n, \quad g_n \in \mathfrak{D}(H), \quad \varphi_n \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi_n \in \mathfrak{M}^+$$

и

$$f_n \to f_0, \quad Af_n = Hg_n - i\varphi_n + i\psi_n \to h_0. \tag{17}$$

Тогда

$$Af_n - if_n = (Hg_n - ig_n) - 2i\varphi_n \to h_0 - if_0,$$
$$Af_n + if_n = (Hg_n + ig_n) + 2i\psi_n \to h_0 + if_0.$$

Но

$$Hg_n - ig_n \in L^-, \quad -2i\varphi_n \in \mathfrak{M}^-,$$

следовательно, вводя обозначение * $\varphi_0 = \frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^-}(h_0 - if_0)$, в силу непрерывности $P_{\mathfrak{M}^-}$, имеем

$$\varphi_n = -\frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^-}(Af_n - if_n) \to -\frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^-}(h_0 - if_0) = \varphi_0, \tag{18}$$

причем $\varphi_0 \in \mathfrak{M}^-$. Аналогично, вводя обозначение $\frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^+}(h_0 + if_0) = \psi_0 \in \mathfrak{M}^+$ получаем

$$\psi_n = \frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^+}(Af_n + if_n) \to \frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^+}(h_0 + if_0) = \psi_0 \tag{19}$$

Положим

$$g_0 = f_0 - \varphi_0 - \psi_0, \quad g_0^* = h_0 + i\varphi_0 - i\psi_0;$$

тогда из (17) — (19) следует, что

$$g_n = f_n - \varphi_n - \psi_n \to f_0 - \varphi_0 - \psi_0 = g_0,$$
$$Hg_n = Af_n + i\varphi_n - i\psi_n \to h_0 + i\varphi_0 - i\psi_0 = g_0^*.$$

В силу замкнутости H отсюда следует, что $g_0 \in \mathfrak{D}(H)$ и $g_0^* = Hg_0$, следовательно

$$f_0 = g_0 + \varphi_0 + \psi_0 \in \mathfrak{D}(A)$$

и

$$Af_0 = Hg_0 - i\varphi_0 + i\psi_0 = g_0^* - i\varphi_0 + i\psi_0 = h_0,$$

так что A — замкнутый оператор. Комбинируя этот результат с (16), получаем, что A есть N-оператор в $\mathfrak{H}$. Но в таком случае ** A^* также N-оператор в $\mathfrak{H}$. Докажем, что $A^* = H$; тем самым будет доказано, что H есть N-оператор в $\mathfrak{H}$, а следовательно что $\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}$.

* $P_{\mathfrak{M}}$ обозначает оператор проектирования на $\mathfrak{M}$.

** См. ([8]), теорема 2.

Прежде всего для

$$f \in \mathfrak{D}(A), \quad f = g + \varphi + \psi, \quad g \in \mathfrak{D}(H), \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+ \text{ и } g' \in \mathfrak{D}(H)$$

имеем $\varphi \perp Hg' - ig'$; отсюда

$$(g, Hg') + i(\varphi, g') = 0, \quad (\varphi, Hg') = -i(\varphi, g'),$$

и аналогично

$$(\psi, Hg') = i(\psi, g').$$

Поэтому

$$(Af, g') = (Hg - i\varphi + i\psi, g') = (Hg, g') - i(\varphi, g') + i(\psi, g') =$$
$$= (g, Hg') + (\varphi, Hg') + (\psi, Hg') = (f, Hg'),$$

так что

$$H \subset A^*. \tag{20}$$

С другой стороны, если $h \in \mathfrak{D}(A^*)$, то для всех

$$f \in \mathfrak{D}(A), \quad f = g + \varphi + \psi, \quad g \in \mathfrak{D}(H), \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+$$

имеем

$$(Af, h) = (f, A^*h),$$

т. е.

$$(Hg - i\varphi + i\psi, h) = (g + \varphi + \psi, A^*h). \tag{21}$$

Полагая, в частности, $g = 0$, $\psi = 0$, получаем, что

$$-i(\varphi, h) = (\varphi, A^*h), \quad (\varphi, A^*h - ih) = 0;$$

следовательно $A^*h - ih \in L^-$, т. е. имеет вид

$$A^*h - ih = Hg' - ig', \quad g' \in \mathfrak{D}(H). \tag{22}$$

Аналогично, полагая $g = 0, \varphi = 0$, получаем, что $A^*h + ih \in L^+$, следовательно, имеет вид

$$A^*h + ih = Hg'' + ig'', \quad g'' \in \mathfrak{D}(H). \tag{23}$$

Полагая теперь $\varphi = \psi = 0$, получаем, что

$$(Hg, h) = (g, A^*h);$$

следовательно, в силу (22),

$$(Hg + ig, h) = (g, A^*h) + (g, -ih) = (g, A^*h - ih) = (g, Hg' - ig') =$$
$$= (g, Hg') + (ig, g') = (Hg + ig, g').$$

Отсюда следует, что

$$(Hg + ig, h - g') = 0 \text{ для всех } g \in \mathfrak{D}(H),$$

т. е.

$$\psi_1 = h - g' \in \mathfrak{M}^+, \quad h = g' + \psi_1. \tag{24}$$

Аналогично, в силу (23), имеем

$$(Hg - ig, h) = (g, A^*h) + (g, ih) = (g, A^*h + ih) = (g, Hg'' + ig'') =$$
$$= (g, Hg'') + (-ig, g'') = (Hg - ig, g'');$$

отсюда, как и раньше, заключаем, что

$$\varphi_1 = h - g'' \in \mathfrak{M}^-, \quad h = g'' + \varphi_1. \tag{25}$$

Сравнение (24) и (25) дает

$$g' + \psi_1 = g'' + \varphi_1, \quad g' - g'' = \varphi_1 - \psi_1 = 0;$$

в силу предполагаемой линейной независимости $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$, отсюда следует, что

$$g' - g'' = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = 0,$$

а значит

$$g' = g'', \quad h = g' \in \mathfrak{D}(H)$$

и [см. (22)]

$$A^* g' - ig' = Hg' - ig', \quad A^* h = A^* g' = Hg'.$$

Таким образом $A^* \subset H$; комбинируя же это соотношение с (20), получаем, что $A^* = H$, и теорема 8 полностью доказана.

ТЕОРЕМА 9. *Если H — замкнутый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$, то всякий элемент $f \in \mathfrak{D}(H) \cdot (\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)$ представим в виде*

$$f = \varphi - X\varphi,$$

где X — некоторый изометрический оператор с областью определения $\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{M}^- (\mathfrak{M}^+ + \mathfrak{D}(H))$ и изменения $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{M}^+ (\mathfrak{M}^- + \mathfrak{D}(H))$. При этом, если $\varphi \in \mathfrak{M}^- \cdot \mathfrak{M}^+$, то $X\varphi = \varphi$.

Доказательство. Пусть $U = U_H$ — трансформация Кели H. Если $f \in \mathfrak{D}(H) \cdot (\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)$, то $f \in \mathfrak{D}(H)$, следовательно представим в виде

$$f = Ug - g, \quad g \in \mathfrak{D}(U) \cdot L^-.$$

С другой стороны, $f \in \mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$, следовательно имеет вид

$$f = \varphi + \psi, \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+,$$

так что

$$\varphi + \psi = Ug - g.$$

Отсюда

$$\varphi + g = Ug - \psi$$

и

$$\|\varphi + g\|^2 = \|Ug - \psi\|^2.$$

Так как

$$\varphi \perp g, \quad \psi \perp Ug \quad \text{и} \quad \|Ug\| = \|g\|,$$

то последнее равенство перепишется в виде

$$\|\varphi\|^2 + \|g\|^2 = \|g\|^2 + \|\psi\|^2,$$

откуда

$$\|\varphi\| = \|\psi\|. \tag{26}$$

Положим

$$\psi = -X\varphi; \tag{27}$$

в силу (26) X — изометрический оператор и f представим в виде

$$f = \varphi - X\varphi.$$

Если $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$, то $f = \varphi - X\varphi \in \mathfrak{D}(H)$; следовательно

$$\varphi = f + X\varphi \in \mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^+, \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-,$$

т. е. $\varphi \in \mathfrak{M}^- \cdot (\mathfrak{M}^+ + \mathfrak{D}(H))$. Обратно, если $\varphi \in \mathfrak{M}^- (\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^+)$, то

$$\varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \varphi = \psi + g, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+, \quad g \in \mathfrak{D}(H);$$

следовательно

$$g = \varphi - \psi \in \mathfrak{D}(H) \cdot (\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+),$$

так что $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$.

Таким образом $\mathfrak{D}(X)=\mathfrak{M}^-(\mathfrak{M}^+ + \mathfrak{D}(H))$. Аналогично доказывается утверждение относительно $\mathfrak{R}(X)$.

Пусть теперь $\varphi \in \mathfrak{M}^- \cdot \mathfrak{M}^+$; тогда $\varphi \in \mathfrak{D}(X)$ и $\varphi - X\varphi \in \mathfrak{D}(H)$. С другой стороны, $\varphi \in \mathfrak{M}^+$, $X\varphi \in \mathfrak{M}^+$, так что и $\varphi - X\varphi \in \mathfrak{M}^+$. Согласно теореме 7 отсюда следует, что

$$\varphi - X\varphi \in \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^+ = (0), \quad \varphi - X\varphi = 0, \quad \varphi = X\varphi.$$

§ 4. Прямая сумма гильбертовых пространств и операторы с областью определения в одной прямой сумме пространств и изменения в другой

Определение 5. Прямой суммой $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ двух гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ называется совокупность пар $\{f, g\}$, $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$, для которых введены операции сложения, умножения на скаляр и скалярного умножения следующим образом:

1° $$\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\},$$
2° $$\alpha\{f, g\} = \{\alpha f, \alpha g\},$$
3° $$(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2).$$

Очевидно, что $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ также образует гильбертово пространство.

В дальнейшем мы не будем делать различия между $\{f, 0\}$ и f и между $\{0, g\}$ и g; тогда $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ можно считать взаимно-ортогональными и взаимно дополняющими друг друга подпространствами $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$.

Определение 6. Пусть A_1, A_2 — линейные операторы с областями определения в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ и областями изменения* в $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$. Прямой суммой $A_1 \oplus A_2$ операторов A_1, A_2 мы назовем линейный оператор A, определенный в $\mathfrak{D}(A_1) + \mathfrak{D}(A_2)$ равенством

$$A(f+g) = A_1 f + A_2 g, \quad f \in \mathfrak{D}(A_1), \quad g \in \mathfrak{D}(A_2).$$

Очевидно, $A_1 \oplus A_2$ — линейный оператор с областью определения в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ и изменения в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$.

ЛЕММА 4. *Если* $\overline{\mathfrak{D}(A_1)} = \mathfrak{H}_1$ *и* $\overline{\mathfrak{D}(A_2)} = \mathfrak{H}_2$, *то* $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *и*

$$(A_1 \oplus A_2)^* = A_1^* \oplus A_2^*. \tag{1}$$

ЛЕММА 5. *Если A_1, A_2 — замкнутые линейные операторы, то и $A_1 \oplus A_2$ — замкнутый оператор.*

Следствие 6. *Прямая сумма N-операторов есть также N-оператор.*

Это следствие непосредственно получается из лемм 4 и 5.

ЛЕММА 6. *Если H_1, H_2 — эрмитовы операторы в $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ с дефектными подпространствами $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ и $\mathfrak{M}_2^-$, $\mathfrak{M}_2^+$, то $H = H_1 \oplus H_2$ — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ с дефектными подпространствами*

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-; \quad \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+. \tag{2}$$

* Операторы с областью определения в одном гильбертовом пространстве и изменения в другом рассмотрены Мурреем (4). В дальнейшем мы используем некоторые из его результатов.

Доказательство. Легко видеть, что $H = H_1 \oplus H_2$ — эрмитов оператор. Далее,

$$\mathfrak{R}(H - i1) = \mathfrak{R}(H_1 - i1) + \mathfrak{R}(H_2 - i1);$$

следовательно

$$h = f + g \perp \mathfrak{R}(H - i1), \quad f \in \mathfrak{H}_1, \ g \in \mathfrak{H}_2$$

тогда и только тогда, когда

$$f \perp \mathfrak{R}(H_1 - i1), \quad g \perp \mathfrak{R}(H_2 - i1).$$

Таким образом

$$(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) \ominus \mathfrak{R}(H - i1) = (\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}(H_1 - i1)) \oplus (\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{R}(H_2 - i1)),$$

т. е.

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-.$$

Аналогично доказывается, что $\mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$.

Следствие 7. *Прямая сумма симметрических операторов есть также симметрический оператор.*

Это следствие непосредственно вытекает из лемм 4 и 6.

ЛЕММА 7. *Существует взаимно-однозначное соответствие между классом всех ограниченных линейных операторов A из $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ и классом всех матриц $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$, где A_{jk} — линейный ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{H}_j'$, — такое, что если A и $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$ соответствуют друг другу, то*

$$A(f_1 + f_2) = (A_{11} f_1 + A_{12} f_2) + (A_{21} f_1 + A_{22} f_2), \ f_1 \in \mathfrak{H}_1, \ f_2 \in \mathfrak{H}_2. \qquad (3)$$

Доказательство. Пусть A — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ и E_1', E_2' — операторы проектирования в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ на $\mathfrak{H}_1'$ и $\mathfrak{H}_2'$ соответственно. Положим для $f_k \in \mathfrak{H}_k$, $k = 1, 2$

$$A_{jk} f_k = E_j' A f_k, \quad j = 1, 2. \qquad (4)$$

Очевидно, A_{jk} — линейный оператор из $\mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{H}_j'$ и, кроме того,

$$| A_{jk} f_k | = | E_j' A f_k | \leqslant | A f_k | \leqslant | A | \, | f_k |,$$

так что A_{jk} — ограниченный оператор.

Полученную таким образом матрицу $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$ мы ставим в соответствие с A, что в дальнейшем обозначаем так: $A \sim \| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$. Тогда

$$A(f_1 + f_2) = A f_1 + A f_2 = E_1' A f_1 + E_1' A f_2 + E_2' A f_2 + E_2' A f_2 = \\ = A_{11} f_1 + A_{12} f_2 + A_{21} f_2 + A_{22} f_2,$$

так что A и $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$ удовлетворяют соотношению (3). Обратно, если матрица $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$ задана, то оператор A, определенный равенством (3), является очевидно линейным оператором из $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$. Кроме того

$$| A(f_1 + f_2) |^2 = | A_{11} f_1 + A_{22} f_2 |^2 + | A_{21} f_1 + A_{22} f_2 |^2 \leqslant 2(| A_{11} f_1 |^2 + | A_{12} f_2 |^2) + \\ + 2(| A_{21} f_1 |^2 + | A_{22} f_2 |^2) \leqslant 2C^2 (| f_1 |^2 + | f_2 |^2) = 2C^2 | f_1 + f_2 |^2,$$

где

$$C^2 = \max(2 | A_{jk} |^2, \ j, k = 1, 2),$$

так что A — ограниченный оператор. Взаимная однозначность полученного соответствия очевидна.

ЛЕММА 8. *Если A, B — ограниченные линейные операторы из $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$, C — ограниченный линейный оператор из $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ в $\mathfrak{H}_1'' \oplus \mathfrak{H}_2''$, а α — скаляр, то из*

$$A \sim \| A_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}, \quad B \sim \| B_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}, \quad C \sim \| C_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}, \quad A^* \sim \| A'_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2} \tag{5}$$

следует

$$A + B \sim \| A_{jk} + B_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}, \quad CA \sim \left\| \sum_{p=1}^{2} C_{jp} A_{pk} \right\|_{j,\,k=1,\,2}, \quad \alpha A \sim \| \alpha A_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2},$$
$$A'_{jk} = A^*_{kj}. \tag{6}$$

Эта лемма непосредственно следует из равенства (4), определяющего A_{jk} по A.

Следствие 8. *Пусть $\dim(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) = \dim(\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2')$. Оператор $U \sim \| U_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}$ из $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ изометрически отображает $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ тогда и только тогда, когда*

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{p=1}^{2} U^*_{pj} U_{pk} = \delta_{jk} \cdot 1 \qquad (7)\\ &\sum_{p=1}^{2} U_{jp} U^*_{kp} = \delta_{jk} \cdot 1 \qquad (8)\end{aligned}\right\} \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k \\ 0 & \text{при } j \neq k \end{cases}, \quad j, k = 1, 2.$$

В самом деле, U отображает $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ тогда и только тогда, когда

$$U^*U = 1 \text{ и } UU^* = 1. \tag{9}$$

Так как $1 \sim \| \delta_{jk} \cdot 1 \|_{j,\,k=1,\,2}$, то, в силу (6), первое из равенств (9) эквивалентно (7), а второе (8).

ТЕОРЕМА 10. *Пусть $U \sim \| U_{jk} \|_{j,\,k=1,\,2}$ — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ и такой, что*

$$\text{из } U_{jk} f_k = 0, \; j \neq k, \; f_k \in \mathfrak{H}_k \text{ следует } f_k = 0 \tag{10}$$

и

$$\text{из } U^*_{jk} g_j = 0, \; j \neq k, \; g_j \in \mathfrak{H}_j' \text{ следует } g_j = 0 \tag{11}$$
$$(j, k = 1, 2).$$

Тогда

$$\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2', \; \dim \mathfrak{H}_2 = \dim \mathfrak{H}_1' \tag{12}$$

и

$$\left.\begin{aligned} U_{11} &= W_1 V_2^* B V_2, & U_{12} &= V_1 \sqrt{1 - W^* B^2 W}, \\ U_{21} &= \sqrt{1 - B^2}\, V_2, & U_{22} &= BW, \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где V_1, V_2 — изометрические операторы, отображающие $\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1'$ и $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2'$ соответственно, B — положительный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_2'$, удовлетворяющий условию

$$|Bf| < |f|, \; f \in \mathfrak{H}_2', \; f \neq 0, \tag{14}$$

*W — частично изометрический * оператор такой, что W^* имеет начальную область $\overline{B\mathfrak{H}_2'}$ и конечную в $\mathfrak{H}_2$; далее, W_1 — частично изометри-*

---

* О частично изометрических операторах см. ([5]), стр. 141—143, а также ([4]), стр. 312.

ческий оператор с начальной областью $\overline{V_2^* B \mathfrak{H}_2'}$ *и конечной в* $\mathfrak{H}_1'$ *такой, что оператор*

$$A = V_1^* W_1 V_2^* W \tag{15}$$

перестановочен с $B' = W^* B W$ *и*

$$B'(A+1) = 0. \tag{16}$$

Обратно, если $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2'$, $\dim \mathfrak{H}_2 = \dim \mathfrak{H}_1'$ *и* V_1, V_2, B, W, W_1 — *произвольные операторы, удовлетворяющие перечисленным условиям, а операторы* U_{jk} *определены равенствами* (13), *то* U_{jk} *удовлетворяют условиям* (10) *и* (11) *и оператор* $U \sim \|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ *изометрически отображает* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$.

Доказательство. Пусть $U \sim \|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ изометрически отображает $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ и операторы U_{jk} удовлетворяют условиям (10) и (11). Положим

$$B = \sqrt{U_{22} U_{22}^*}, \quad B' = \sqrt{U_{22}^* U_{22}};$$

так как U_{22} — ограниченный оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_2'$, то B, B' — ограниченные положительные самосопряженные операторы в $\mathfrak{H}_2', \mathfrak{H}_2$ соответственно и *

$$U_{22} = BW = WB', \quad B' = W^* B W, \tag{17}$$

где W — частично изометрический оператор с начальной областью $\overline{B' \mathfrak{H}_2}$ и конечной в $\mathfrak{H}_2'$, а W^* — частично изометрический оператор с начальной областью $\overline{B \mathfrak{H}_2'}$ и конечной в $\mathfrak{H}_2$. Применяя теперь следствие 8 и полагая в (8) $j = k = 2$, получаем

$$U_{21} U_{21}^* + U_{22} U_{22}^* = 1,$$

а значит, в силу (17),

$$U_{21} U_{21}^* + B^2 = 1. \tag{18}$$

Но $U_{21} U_{21}^*$ — положительный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_2'$, причем из $U_{21} U_{21}^* f = 0$ в силу (11) следует, что

$$|U_{21}^* f|^2 = (U_{21} U_{21}^* f, f) = 0, \ U_{21}^* f = 0, \ f = 0.$$

Пользуясь равенством (18), мы отсюда заключаем, что при $f \neq 0$, $f \in \mathfrak{H}_2'$

$$|Bf|^2 = (B^2 f, f) = (f, f) - (U_{21} U_{21}^* f, f) < (f, f) = |f|^2,$$

так что B удовлетворяет условию (14). Кроме того из (18) выводим, что

$$U_{21} U_{21}^* = 1 - B^2,$$

а так как $U_{21} f$, $U_{21}^* f$ равны нулю лишь при $f = 0$, то отсюда следует, что

$$U_{21} = \sqrt{1 - B^2}\, V_2, \tag{19}$$

где V_2 — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_2'$. Далее, полагая в (7) $j = k = 2$, получаем

$$U_{12}^* U_{12} + U_{22}^* U_{22} = 1,$$

следовательно

$$U_{12}^* U_{12} = 1 - U_{22}^* U_{22} = 1 - B'^2 = 1 - W^* B^2 W;$$

в силу (10) и (11) при $j = 1$, $k = 2$ отсюда следует, что

$$U_{12} = V_1 \sqrt{1 - W^* B^2 W}, \tag{20}$$

---

* См. (4), теорема 1.24.

где V_1 — изометрический оператор, отображающий $\tilde{\mathfrak{H}}_2$ на $\mathfrak{H}_1'$. Положим теперь в (7) $j = k = 1$; получим

$$U_{11}^* U_{11} + U_{21}^* U_{21} = 1,$$

следовательно, в силу (19),

$$U_{11}^* U_{11} = 1 - U_{21}^* U_{21} = 1 - V_2^* (1 - B^2) V_2 = V_2^* [1 - (1 - B^2)] V_2 = V_2^* B^2 V_2;$$

отсюда

$$U_{11} = W_1 \sqrt{V_2^* B^2 V_2} = W_1 V_2^* B V_2, \tag{21}$$

где W_1 — частично изометрический оператор с начальной областью $\overline{V_2^* B V_2 \mathfrak{H}_1} = \overline{V_2^* B \mathfrak{H}_2'}$ и конечной в $\mathfrak{H}_2'$.

Таким образом равенства (13) доказаны и остается доказать, что W_1 удовлетворяет условиям, указанным в формулировке теоремы. Положим для этого в (8) $j = k = 1$; получим

$$U_{11} U_{11}^* + U_{12} U_{12}^* = 1,$$

т. е., в силу (20) и (21),

$$W_1 V_2^* B^2 V_2 W_1^* + V_1 (1 - W^* B^2 W) V_1^* = 1,$$

откуда

$$W_1 V_2^* B^2 V_2 W_1^* = V_1 W^* B^2 W V_1^* = V_1 B'^2 V_1^*. \tag{22}$$

Так как W_1 изометричен в $V_2^* B \mathfrak{H}_2'$, то

$$W_1^* W_1 V_2^* B = V_2^* B, \tag{23}$$

следовательно, умножая (22) слева на W_1^*, получаем

$$V_2^* B^2 V_2 W_1^* = W_1^* V_1 B'^2 V_1^*;$$

отсюда, умножая слева на V_2 и справа на V_1, приходим к равенству

$$B^2 V_2 W_1^* V_1 = V_2 W_1^* V_1 B'^2,$$

т. е.

$$W B'^2 W^* V_2 W_1^* V_1 = V_2 W_1^* V_1 B'^2. \tag{24}$$

Так как $\overline{B' \mathfrak{H}_2}$ — начальная область W, то $W^* W = P_{\overline{B'\mathfrak{H}_2}}$; следовательно,

$$B' W^* W = W^* W B' = B'; \tag{25}$$

поэтому, умножая (24) слева на W^*, получаем

$$B'^2 W^* V_2 W_1^* V_1 = W^* V_2 W_1^* V_1 B'^2,$$

т. е., в силу (15),

$$B'^2 A^* = A^* B'^2.$$

Таким образом A^*, а значит и A перестановочен с B'^2; поэтому A перестановочен также и с B' и остается доказать, что A удовлетворяет равенству (16). Положим для этого в (7) $j = 2$, $k = 1$; получим

$$U_{12}^* U_{11} + U_{22}^* U_{21} = 0;$$

следовательно, в силу (19) — (21),

$$\sqrt{1 - B'^2} V_1^* W_1 V_2^* B V_2 + B' W^* \sqrt{1 - B^2} V_2 = 0.$$

Умножая обе части последнего равенства справа на V_2^* и пользуясь равенством

$$B = W B' W^*, \tag{26}$$

придем к равенству

$$\sqrt{1 - B'^2} V_1^* W_1 V_2^* W B' W^* + B' W^* \sqrt{1 - B^2} = 0;$$

в силу (25) и (15) отсюда следует, что

$$\sqrt{1-B'^2}AB'+B'W^*\sqrt{1-B^2}W=0. \tag{27}$$

Так как $WW^*=P_{\overline{B\mathfrak{H}_2'}}$, то WW^* перестановочен с B, а значит и с $\sqrt{1-B^2}$. В силу (25) отсюда следует, что

$$(W^*\sqrt{1-B^2}W)^2=W\sqrt{1-B^2}WW^*\sqrt{1-B^2}W=W^*WW^*(1-B^2)W=$$
$$=W^*WW^*(1-WB'^2W^*)W=(W W)^2(1-B'^2)=W^*W(1-B'^2). \tag{28}$$

С другой стороны, в силу перестановочности W^*W и B',

$$(W^*W\sqrt{1-B'^2})^2=W^*W(1-B'^2), \tag{29}$$

а так как операторы

$$W^*\sqrt{1-B^2}W \text{ и } W^*W\sqrt{1-B'^2}$$

— положительные самосопряженные, то из (28) и (29) следует, что

$$W^*\sqrt{1-B^2}W=W^*W\sqrt{1-B'^2}. \tag{30}$$

В силу (30) и (25) равенство (27) перепишется в виде

$$\sqrt{1-B'^2}B'A+\sqrt{1-B'^2}B'=0,$$

т. е.

$$\sqrt{1-B'^2}B'(A+1)=0. \tag{31}$$

Но из (20) и (10) следует, что $\sqrt{1-B'^2}$ не имеет собственного значения $\lambda=0$; поэтому

$$B'(A+1)=0.$$

Пусть теперь, обратно, $\dim\mathfrak{H}_1=\dim\mathfrak{H}_2'$, $\dim\mathfrak{H}_2=\dim\mathfrak{H}_1'$; B, W, W_1, V_1, V_2 — произвольные операторы, удовлетворяющие всем условиям, перечисленным в формулировке теоремы 10, а U_{jk} — операторы, заданные равенствами (13). Докажем, что оператор $U\sim\|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ изометрически отображает $\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1'\oplus\mathfrak{H}_2'$. Согласно следствию 8, достаточно доказать, что операторы U_{jk} удовлетворяют условиям (7) и (8). Прежде всего, в силу (23),

$$U_{11}^*U_{11}+U_{21}^*U_{21}=V_2^*BV_2W_1^*W_1V_2^*BV_2+V_2^*(1-B^2)V_2=$$
$$=V_2^*BV_2V_2^*BV_2+V_2^*(1-B^2)V_2=1.$$

Далее

$$U_{12}^*U_{12}+U_{22}^*U_{22}=(1-W^*B^2W)+W^*B^2W=1;$$

наконец, пользуясь равенствами (30), (16) и

$$W^*WW^*=W,$$

получаем, что

$$U_{12}^*U_{11}+U_{22}^*U_{21}=\sqrt{1-B'^2}V_1^*W_1V_2^*WB'W^*V_2+B'W^*\sqrt{1-B^2}V_2=$$
$$=\sqrt{1-B'^2}AB'W^*V_2+B'W^*\sqrt{1-B^2}WW^*V_2=\sqrt{1-B'^2}B'AW^*V_2+$$
$$+B'W^*W\sqrt{1-B'^2}W^*V_2=\sqrt{1-B'^2}B'(A+1)W^*V_2=0.$$

Итак,

$$U_{12}^*U_{11}+U_{22}^*U_{21}=0;$$

беря * от обеих частей этого равенства, получаем

$$U_{11}^*U_{12}+U_{21}^*U_{22}=0.$$

Таким образом мы доказали, что равенства (7) выполняются. Далее мы имеем

$$U_{11}U_{11}^* + U_{12}U_{12}^* = W_1V_2^*B^2V_2W_1^* + V_1(1-B'^2)V_1^* =$$
$$= V_1(V_1^*W_1V_2^*WB'^2W^*V_2W_1^*V_1 + 1 - B'^2)V_2^* = V_1(B'^2AA^* + 1 - B'^2)V_1^*. \quad (32)$$

Но, в силу (16),

$$AB' = B'A = -B';$$

следовательно

$$A^*B' = B'A^* = -B'. \quad (33)$$

Поэтому

$$B'AA^* = -B'A^* = B', \qquad B'^2AA^* = B'^2$$

и (32) перепишется в виде

$$U_{11}U_{11}^* + U_{12}U_{12}^* = V_1(B'^2 + 1 - B'^2)V_1^* = 1.$$

Кроме того

$$U_{21}U_{21}^* + U_{22}U_{22}^* = (1-B^2) + B^2 = 1,$$

и наконец, в силу (33), (16) и (30),

$$U_{21}U_{11}^* + U_{22}U_{12}^* = \sqrt{1-B^2}WB'W^*V_2W_1^* + WB'\sqrt{1-B'^2}V_1^* =$$
$$= WW^*\sqrt{1-B^2}WB'W^*V_2W_1^* + WB'\sqrt{1-B'^2}V_1^* =$$
$$= WW^*W\sqrt{1-B'^2}B'W^*V_2W_1^* + WB'\sqrt{1-B'^2}V_1^* =$$
$$= W\sqrt{1-B'^2}B'(W^*V_2W_1^*V_1 + 1)V_1^* = W\sqrt{1-B'^2}B'(A^*+1)V_1^* = 0.$$

Беря * в обеих частях, мы получим отсюда

$$U_{11}U_{21}^* + U_{12}U_{22}^* = 0,$$

так что равенства (8) также выполняются.

Таким образом $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ изометрически отображает $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ на $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ и остается только доказать, что операторы U_{jk} удовлетворяют условиям (10) и (11).

Если $U_{12}f_2 = 0$, $f_2 \in \mathfrak{H}_2$, то, в силу (14),

$$0 = |U_{12}f_2|^2 = |\sqrt{1 - W^*B^2W}f_2|^2 = ((1 - W^*B^2W)f_2, f_2) = |f_2|^2 - |BWf_2|^2 \geqslant$$
$$\geqslant |Wf_2|^2 - |BWf_2|^2 \geqslant 0;$$

следовательно

$$|f_2|^2 - |BWf_2|^2 = |Wf_2|^2 - |BWf_2|^2 = 0, \quad |f_2| = |Wf_2| = |BWf_2|.$$

Отсюда, в силу (14), $Wf_2 = 0$, а значит $|f_2| = |Wf_2| = 0$, $f_2 = 0$.

Далее, если $U_{21}f_1 = 0$, $f_1 \in \mathfrak{H}_1$, то

$$0 = |U_{21}f_1|^2 = |\sqrt{1-B^2}V_2f_1|^2 = |V_2f_1|^2 - |BV_2f_1|^2;$$

отсюда, в силу (14), $|Vf_1| = 0$, $|f_1| = 0$, $f_1 = 0$.

Таким образом условия (10) выполняются; совершенно аналогично можно доказать, что условия (11) также выполняются.

Следствие 9. *Пусть* $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2'$ *и* $\dim \mathfrak{H}_2 = \dim \mathfrak{H}_1'$, *а* C — *произвольный ограниченный оператор из* $\mathfrak{H}_2$ *в* $\mathfrak{H}_2'$, *удовлетворяющий условию* $|Cf| < |f|$ *при* $f \neq 0$, $f \in \mathfrak{H}_2$. *Тогда существует бесконечное множество изометрических операторов* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$, *которые отображают* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *на* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$, *удовлетворяют условиям* (10) *и* (11) *и для которых* $U_{22} = C$.

Доказательство. В силу теоремы 10, достаточно доказать, что по данным B, W, V_1, V_2, удовлетворяющим условиям теоремы 10, можно подобрать оператор W_1 такой, что оператор A, определенный равенством (15), перестановочен с B' и удовлетворяет равенству (16). Для этого же достаточно положить

$$W_1 = -V_1 W^* V_2.$$

В самом деле, так как W^* — частично-изометрический оператор с начальной областью $\overline{B\mathfrak{H}_2'}$ и конечной в $\mathfrak{H}_2$, то W_1 — частично-изометрический оператор с начальной областью $\overline{V_2^* B\mathfrak{H}_2'}$ и конечной в $V_1\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_1'$. Кроме того

$$A = -V_1^* V_1 W^* V_2 V_2^* W = -W^* W,$$

так что A перестановочен с B' и, в силу (25),

$$B'(A+1) = B'(-W^*W+1) = 0.$$

§ 5. Самосопряженные расширения данного симметрического оператора

ТЕОРЕМА 11. *Пусть H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$, а H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}\,(\supset \mathfrak{H}_1)$, который является расширением H_1; положим $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ и обозначим через H_2 оператор с областью определения $\mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{D}(H)\mathfrak{H}_2$, заданный равенством*

$$H_2 f = Hf, \qquad f \in \mathfrak{D}(H_2).$$

Тогда H_2 — замкнутый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}_2$. Пусть $\mathfrak{M}_1^-, \mathfrak{M}_1^+$; $\mathfrak{M}_2^-, \mathfrak{M}_2^+$ — дефектные подпространства H_1 и H_2; тогда $\mathfrak{D}(H)$ состоит из тех и только тех векторов $f \in \mathfrak{H}$, которые представимы в виде

$$f = (f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) + (f_2 - \varphi_2 + U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2), \tag{1}$$

где

$$f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-, \tag{2}$$

а $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ и $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ и удовлетворяющий следующим условиям:

$$\text{из } f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0 \text{ следует } f_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \tag{3}$$

$$\text{из } f_2 - \varphi_2 + U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2 = 0 \text{ следует } f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0; \tag{4}$$

при этом

$$Hf = [H_1 f_1 + i\varphi_1 + i(U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2)] + [H_2 f_2 + i\varphi_2 + i(U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2)]. \tag{5}$$

Пусть, обратно, H_2 — произвольный замкнутый эрмитов оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_2$ такой, что для него существует изометрический оператор $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$, отображающий $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ и удовлетворяющий условиям (3) и (4). Тогда оператор H в $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$, определенный для всех элементов f вида (1) равенством (5), является самосопряженным расширением H_1, причем $\mathfrak{D}(H)\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{D}(H_2)$ и $H_2 f = Hf$ для $f \in \mathfrak{D}(H_2)$.

Доказательство. Прежде всего из равенства (6) § 1, примененного к $A = H$ и $A_1 = H_1$, вытекает, что из $E_1 f = 0$, $f \in \mathfrak{D}(H)$ следует $E_1 Hf = 0$. Но это означает, что из $f \in \mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{D}(H)\mathfrak{H}_2$ следует $H_2 f = Hf \in \mathfrak{H}_2$, так что H_2 — линейный оператор в $\mathfrak{H}_2$. Кроме того H_2 является очевидно эрмитовым и замкнутым оператором. Положим H_0

$=H_1 \oplus H_2$; в силу лемм 5 и 6 § 4, H_0 — замкнутый эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$ с дефектными подпространствами

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-, \quad \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+, \tag{6}$$

причем очевидно, что $H \supset H_0$. Согласно лемме 3 § 3 отсюда следует, что $\mathfrak{D}(H)$ состоит из элементов f, представимых в виде

$$f = f_0 - \varphi + U\varphi, \quad f_0 \in \mathfrak{D}(H_0), \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \tag{7}$$

где U — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}^-$ на $\mathfrak{M}^+$, причем

$$Hf = H_0 f_0 + i\varphi + iU\varphi. \tag{8}$$

Но $f_0 \in \mathfrak{D}(H_0)$, $\varphi \in \mathfrak{M}^-$ тогда и только тогда, когда они представимы в виде

$$\left.\begin{array}{c} f_0 = f_1 + f_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \\ \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-; \end{array}\right\} \tag{9}$$

кроме того, в силу леммы 7 § 4, примененной к $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ и $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ вместо $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$, $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$, так что

$$U\varphi = U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 + U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2. \tag{10}$$

Из равенств (7) — (10) тотчас же следует, что $\mathfrak{D}(H)$ состоит из элементов, представимых в виде (1), причем имеет место равенство (5). Остается доказать, что $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ удовлетворяет условиям (3) и (4). Пусть

$$f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0; \tag{11}$$

в силу линейной независимости $\mathfrak{D}(H_1)$, $\mathfrak{M}_1^-$ и $\mathfrak{M}_1^+$ (H_1 — симметрический оператор!) отсюда следует

$$f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0.$$

С другой стороны, из (11) следует, что $f \in \mathfrak{H}_2$; следовательно

$$f \in \mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{D}(H_2),$$

т. е.

$$f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) \in \mathfrak{D}(H_2).$$

Так как $f_2 \in \mathfrak{D}(H_2)$, то и

$$h_2 = -\varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) \in \mathfrak{D}(H_2),$$

причем

$$H_2 h_2 = i\varphi_2 + i(U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2).$$

Отсюда

$$H_2 h_2 - ih_2 = 2i\varphi_2,$$

а так как $H_2 h_2 - ih_2 \in \mathfrak{R}(H_2 - i1)$, $2i\varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-$ и $\mathfrak{R}(H_2 - i1) \perp \mathfrak{M}_2^-$, то должно быть $\varphi_2 = 0$. Таким образом условие (3) выполняется.

Пусть теперь

$$f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0; \tag{12}$$

тогда $f \in \mathfrak{H}_1$; следовательно

$$f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = f \in \mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{D}(H_1). \tag{13}$$

В силу линейной независимости $\mathfrak{D}(H_1)$, $\mathfrak{M}_1^-$ и $\mathfrak{M}_1^+$, отсюда следует, что $f = f_1$ и

$$\varphi_1 = 0, \quad U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0. \tag{14}$$

При этом $Hf = H_1 f_1 \in \mathfrak{H}_1$; следовательно

$$H_2 f_2 + i\varphi_2 + iU_{22}\varphi_2 = 0. \tag{15}$$

Умножая (12) на $-i$ и складывая с (15), получим, в силу (14), что

$$H_2 f_2 - if_2 = -2i\varphi_2;$$

отсюда, как и выше, заключаем, что $\varphi_2 = 0$; в силу (12) и (14), отсюда следует, что и $f_2 = 0$.

Пусть теперь, обратно, H_2 — эрмитов оператор в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_2$, а $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — изометрический оператор, отображающий $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ и удовлетворяющий условиям (3) и (4). В силу леммы 3 § 3, равенства (1) и (5) определяют самосопряженный оператор H в $\mathfrak{H}$ в том и только том случае, когда из

$$U_{H_0}\varphi_0 + U\varphi = \varphi_0 + \varphi, \quad \varphi_0 \in \mathfrak{R}(H_0 - i1), \quad \varphi \in \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^- \tag{16}$$

следует

$$\varphi_0 = \varphi = 0.$$

По определению φ_0 и φ_1 эти векторы представимы в виде

$$\varphi_0 = (H_1 - i1) f_1 + (H_2 - i1) f_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \tag{17}$$

где

$$f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-,$$

причем

$$U_{H_0}\varphi_0 = (H_0 + i1)(f_1 + f_2) = (H_1 + i1) f_1 + (H_2 + i1) f_2.$$

Но тогда из (16) следует, что

$$(H_1 + i1) f_1 + (H_2 + i1) f_2 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) =$$
$$= (H_1 - i1) f_1 + (H_2 - i1) f_2 + \varphi_1 + \varphi_2,$$

значит

$$2if_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = -[2if_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2)].$$

Так как левая часть $\in \mathfrak{H}_1$, а правая $\in \mathfrak{H}_2$, то должно быть

$$2if_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = 0, \quad 2if_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0,$$

откуда, в силу (3) и (4), следует, что $f_1 = f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$. Но тогда, в силу (17), и $\varphi_0 = \varphi = 0$.

Итак, оператор H в $\mathfrak{H}$, определенный равенствами (1) и (5), самосопряженный.

Если теперь $f \in \mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_1$, то $f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0$; следовательно $f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $f = f_1 \in \mathfrak{D}(H_1)$ и $Hf = H_1 f_1 = H_1 f$. Так как, с другой стороны, очевидно, что $\mathfrak{D}(H_1) \subset \mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_1$, то мы получаем, что $\mathfrak{D}(H_1) = \mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_1$ и H — самосопряженное расширение H_1. Аналогично, если $f \in \mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_2$, то $f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = 0$; следовательно $f_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, $f = f_2 \in \mathfrak{D}(H_2)$ и $Hf = H_2 f_2 = H_2 f$.

Таким образом $\mathfrak{D}(H)\,\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{D}(H_2)$ и $Hf = H_2 f$ при $f \in \mathfrak{D}(H_2)$, так что теорема 11 полностью доказана.

В дальнейшем мы сохраняем все обозначения теоремы 11.

Следствие 10. *Пусть H — самосопряженное расширение H_1, а $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — оператор, связанный с H как в теореме 11. Тогда*

$$\text{из} \quad U_{jk}\varphi_k = 0, \quad \varphi_k \in \mathfrak{M}_k^-, \quad j \neq k \quad \text{следует} \quad \varphi_k = 0, \tag{18}$$

$$\text{из} \quad U_{jk}^*\psi_j = 0, \quad \psi_j \in \mathfrak{M}_j^+, \quad j \neq k \quad \text{следует} \quad \psi_j = 0, \tag{19}$$

$$\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^+, \quad \dim \mathfrak{M}_2^- = \dim \mathfrak{M}_1^+ \tag{20}$$

и области изменения U_{jk} *и* U^*_{jk} $(j \neq k)$ *плотны в* $\mathfrak{M}_j^+$ *и* $\mathfrak{M}_k^-$ *соответственно.*

Доказательство. Пусть, например, $U_{12}\varphi_2 = 0$. Полагая $f_1 = \varphi_1 = 0$, мы можем написать

$$f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = 0;$$

следовательно, в силу (3), должно быть $\varphi_2 = 0$. Совершенно аналогично получаем, что из $U_{21}\varphi_1 = 0$ следует $\varphi_2 = 0$. С другой стороны, в силу замечания на стр. 65, для оператора $V = U^{-1} = U^*$ имеет место предложение, аналогичное теореме 11, нужно только поменять $\mathfrak{M}_1^-$ и $\mathfrak{M}_1^+$, $\mathfrak{M}_2^-$ и $\mathfrak{M}_2^+$ местами. Поэтому, полагая $V \sim \| V_{jk} \|_{j,k=1,2}$, получаем, что

$$\text{из } V_{kj}\psi_j = 0, \quad \psi_j \in \mathfrak{M}_j^+, \quad j \neq k, \text{ следует } \psi_j = 0, \tag{21}$$

и остается только воспользоваться леммой 8 § 4, согласно которой $V_{kj} = U^*_{jk}$.

Таким образом условия (18) и (19) выполняются. Условие (20) следует из (18), (19) и теоремы 10 § 4 (равенство 12). Наконец, последнее утверждение непосредственно следует из (18) и (19).

Определение 7. Если замкнутый эрмитов оператор H_2 в $\mathfrak{H}_2$ и изометрический оператор $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ связаны с самосопряженным расширением H оператора H_1 как в теореме 11, то мы будем говорить, что H_2 и U определяют H.

Определение 8. Самосопряженное расширение H оператора H_1 мы будем называть регулярным, если $\overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \overline{\mathfrak{D}(H)\mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}_2$, и нерегулярным в противном случае; будем называть H выродившимся, если $\mathfrak{D}(H_2) = (0)$.

Определение 9. Самосопряженное расширение H оператора H_1 мы будем называть α-мерным, если $\dim \mathfrak{H}_2 = \alpha$.

ТЕОРЕМА 12. *Если хотя бы одно из дефектных подпространств оператора* H_1 *конечномерно, то всякое расширение оператора* H_1 *регулярно.*

Доказательство. Пусть H — расширение H_1, H_2 и $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — операторы, определяющие H, и пусть, например, $\mathfrak{M}_1^-$ конечномерно. (Случай, когда $\mathfrak{M}_1^+$ конечномерно, приводится к этому случаю умножением H_1 на -1.) В силу (20) $\mathfrak{M}_2^+$ также конечномерно. Кроме того, согласно следствию 10, $\overline{U_{21}\mathfrak{M}_1^-} = \mathfrak{M}_2^+$. В силу конечномерности $U_{21}\mathfrak{M}_1^-$, замыкание излишне, так что

$$U_{21}\mathfrak{M}_1^- = \mathfrak{M}_2^+. \tag{22}$$

Пусть теперь

$$f_2 - \varphi_2 + \psi_2 = 0, \quad \text{где} \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-, \psi_2 \in \mathfrak{M}_2^+. \tag{23}$$

Из (22) следует, что найдется элемент $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-$ такой, что

$$U_{21}\varphi_1 = \psi_2 - U_{22}\varphi_2, \tag{24}$$

так что (23) можно будет переписать в виде

$$f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0.$$

В силу (4) отсюда следует, что $f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0$, а значит и $\psi_2 = 0$.

Таким образом $\mathfrak{D}(H_2), \mathfrak{M}_2^-$ и $\mathfrak{M}_2^+$ линейно независимы; согласно теореме 8 § 3 отсюда следует, что $\overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \mathfrak{H}_2$, т. е. что H — регулярное расширение.

Следствие 11. *Симметрический, но несамосопряженный оператор не имеет конечномерных расширений.*

Доказательство. Пусть H — конечномерное расширение H_1, т. е. пространство $\mathfrak{H}_2$ конечномерно. Тогда $\mathfrak{M}_2^-$ и $\mathfrak{M}_2^+$ конечномерны; в силу (20) отсюда следует, что $\mathfrak{M}_1^-, \mathfrak{M}_1^+$ также конечномерны. Поэтому H регулярно, т. е. $\overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \mathfrak{H}_2$. В силу конечномерности $\mathfrak{H}_2$ замыкание излишне, т. е. $\mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{H}_2$ и H_2 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_2$. Согласно теореме 4 § 2, $\mathfrak{H}_2$ приводит H; следовательно $\mathfrak{H}_1$ также приводит H и H_1 — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}_1$.

ТЕОРЕМА 13. *Всякое регулярное расширение H оператора H_1 определяется замкнутым симметрическим оператором H_2 в $\mathfrak{H}_2$ и изометрическим оператором $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$, удовлетворяющими следующим условиям:*

$$\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^+, \quad \dim \mathfrak{M}_2^- = \dim \mathfrak{M}_1^+, \tag{25}$$

$$\text{из} \quad U_{jk}\varphi_k = 0, \quad \varphi_k \in \mathfrak{M}_k^-, \quad j \neq k, \quad \text{следует} \quad \varphi_k = 0, \tag{26}$$

$$\text{из} \quad U_{jk}^*\psi_j = 0, \quad \psi_j \in \mathfrak{M}_j^-, \quad j \neq k, \quad \text{следует} \quad \psi_j = 0. \tag{27}$$

Обратно, если замкнутый симметрический оператор H_2 и изометрический оператор $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$, отображающий $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$, удовлетворяют условиям (25) и (26), то они определяют регулярное самосопряженное расширение H оператора H_1.

Доказательство. Первая часть утверждения непосредственно следует из теоремы 11 и следствия 10. Чтобы доказать вторую часть, достаточно установить, что выполняются условия (3) и (4). Если

$$f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = 0, \quad f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-,$$

то, в силу линейной независимости $\mathfrak{D}(H_1), \mathfrak{M}_1^-, \mathfrak{M}_1^+$,

$$f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0.$$

Отсюда

$$U_{12}\varphi_2 = 0, \qquad \varphi_2 = 0,$$

так что условие (3) выполнено. Так как H_2 — симметрический оператор то условие (4) проверяется совершенно аналогично.

Теоремы 13 и 10 дают полное описание всех регулярных расширений данного замкнутого симметрического оператора. В силу теоремы 12 мы получаем, в частности, все расширения замкнутого симметрического оператора H_1, если хотя бы одно из дефектных подпространств H_1 конечномерно. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только такие операторы H_1, у которых оба дефектных подпространства бесконечномерны.

ТЕОРЕМА 14. *Для того чтобы операторы H_2 и $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ определяли самосопряженное расширение оператора H_1, необходимо и достаточно, чтобы $\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^+$, $\dim \mathfrak{M}_2^- = \dim \mathfrak{M}_1^+$ и чтобы операторы U_{jk} задавались равенствами*

$$\left.\begin{array}{ll} U_{11}=W_1V_2^*BV_2, & U_{12}=V_1\sqrt{1-W^*B^2W}, \\ U_{21}=\sqrt{1-B^2}V_2, & U_{22}=BW, \end{array}\right\} \quad (28)$$

где V_1, V_2 — изометрические операторы, отображающие $\mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+$ и $\mathfrak{M}_1^-$ на $\mathfrak{M}_2^+$ соответственно; B — положительный самосопряженный оператор в $\mathfrak{M}_2^+$, а W^* — частично изометрический оператор с начальной областью $\overline{B\mathfrak{M}_2^+}$ и конечной в $\mathfrak{M}_2^-$, причем B и W удовлетворяют условиям:

$$\text{из}\quad (1-W)\varphi_2=0, \quad \varphi_2\in\mathfrak{M}_2^- \quad \text{следует}\ \varphi_2=0, \quad (29)$$

$$|B\psi_2|<|\psi_2| \quad \text{при} \quad \psi_2\neq 0, \quad \psi_2\in\mathfrak{M}_2^+, \quad (30)$$

$$(1-W)\mathfrak{M}_2^-(\mathfrak{D}(H_2)+\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+)=(0); \quad (31)$$

наконец, W_1 — частично изометрический оператор с начальной областью $\overline{V_2^*B\mathfrak{M}_2^+}$ и конечной в $\mathfrak{M}_1^+$ такой, что оператор

$$A=V_1^*W_1V_2^*W \quad (32)$$

перестановочен с $B'=W^*BW$ и

$$B'(A+1)=0. \quad (33)$$

Доказательство. Пусть H_2 и U определяют самосопряженное расширение оператора H_1. В силу следствия 10 и теоремы 10 § 4 $\dim\mathfrak{M}_1^-=\dim\mathfrak{M}_2^+$, $\dim\mathfrak{M}_2^-=\dim\mathfrak{M}_1^+$ и операторы U_{jk} определяются равенствами (28). При этом все перечисленные свойства B, W, V_1, V_2, W_1, за исключением (29) и (31), следуют из теоремы 10. Остается доказать, что выполняются условия (29) и (31). Пусть

$$(1-W)\varphi_2=0, \qquad \varphi_2\in\mathfrak{M}_2^-; \quad (34)$$

положим $f_2=0$ и

$$\varphi_1=V_2^{-1}(\sqrt{1+B})^{-1}\sqrt{1-B}\,W\varphi_2.$$

Тогда $\varphi_1\in\mathfrak{M}_1^-$ и

$$\sqrt{1+B}\,V_2\varphi_1-\sqrt{1-B}\,W\varphi_2=0;$$

следовательно также

$$f_2+\sqrt{1-B}\,(\sqrt{1+B}\,V_2\varphi_1-\sqrt{1-B}\,W\varphi_2)-(1-W)\varphi_2=0,$$

т. е., в силу (28),

$$f_2+U_{21}\varphi_1-(1-B)W\varphi_2-(1-W)\varphi_2=0,$$
$$f_2-\varphi_2+(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2)=0.$$

Отсюда, в силу (4), следует, что $\varphi_1=\varphi_2=0$, так что условие (29) выполнено.

Пусть теперь

$$h\in(1-W)\mathfrak{M}_2^-(\mathfrak{D}(H_2)+\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+);$$

тогда h имеет вид

$$h=(1-W)\varphi_2=f_2+\sqrt{1-B}\,\psi_2,$$

где

$$\varphi_2\in\mathfrak{M}_2^-, \quad \psi_2\in\mathfrak{M}_2^+, \quad f_2\in\mathfrak{D}(H_2).$$

Положим

$$\varphi_1=V_2^{-1}(\sqrt{1+B})^{-1}(\psi_2+\sqrt{1-B}\,W\varphi_2);$$

тогда $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-$ и

$$\sqrt{1+B}\, V_2\varphi_1 - \sqrt{1-B}\, W\varphi_2 = \psi_2,$$

следовательно

$$(1-W)\varphi_2 = f_2 + \sqrt{1-B}\,(\sqrt{1+B}\, V_2\varphi_1 - \sqrt{1-B}\, W\varphi_2).$$

Отсюда

$$f_2 - \varphi_2 + \sqrt{1-B^2}\, V_2\varphi_1 + BW\varphi_2 = 0,$$

т. е., в силу (28),

$$f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0.$$

Согласно (4) отсюда следует $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, а значит и $h = 0$, так что условие (31) также выполнено.

Пусть теперь, обратно, $\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^+$, $\dim \mathfrak{M}_2^- = \dim \mathfrak{M}_1^+$, а операторы U_{jk} определяются равенствами (28), причем V_1, V_2, B, W, W_1 удовлетворяют всем условиям, перечисленным в формулировке теоремы 14. Тогда оператор $U \sim \| U_{jk} \|_{j, k=1, 2}$ изометрически отображает $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^-$ и, согласно теореме 11, нужно только доказать, что U удовлетворяет условиям (3) и (4). Итак, пусть

$$f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0, \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-,$$

т. е.

$$f_2 - \varphi_2 + \sqrt{1-B^2}\, V_2\varphi_1 + BW\varphi_2 = 0. \tag{35}$$

Отсюда

$$(1-W)\varphi_2 - \sqrt{1-B^2}\, V_2\varphi_1 + (1-B)\, W\varphi_2 = f_2,$$

следовательно

$$(1-W)\varphi_2 = f_2 + \sqrt{1-B}\,(\sqrt{1+B}\, V_2\varphi_1 - \sqrt{1-B}\, W\varphi_2).$$

Так как левая часть $\in (1-W)\mathfrak{M}_2^-$, а правая $\in \mathfrak{D}(H_2) + \sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+$, то, в силу (31), $(1-W)\varphi_2 = 0$. Поэтому, согласно (29), $\varphi_2 = 0$, так что (35) перепишется в виде $f_2 + U_{21}\varphi_1 = 0$. Но $\mathfrak{D}(H_2)$ и $\mathfrak{M}_2^+$ линейно независимы (см. § 3, теорема 7), следовательно

$$f_2 = 0, \quad U_{21}\varphi_1 = 0.$$

В силу теоремы 10 § 4 отсюда следует, что $\varphi_1 = 0$, так что условие (4) проверено. Условие же (3) следует из теоремы 10 и рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 13.

ТЕОРЕМА 15. *Пусть H_1 — произвольный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$ с индексом дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, где $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ — бесконечные кардинальные числа, а H_2 — произвольный эрмитов оператор в $\mathfrak{H}_2$ с индексом дефекта $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$. Тогда существует бесчисленное множество изометрических операторов $U \sim \| U_{jk} \|_{j, k=1, 2}$, отображающих $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ на $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ и таких, что H_2 и U определяют самосопряженное расширение оператора H_1.*

Доказательство. В силу теоремы 14 и следствия 9 § 4 достаточно доказать, что, каков бы ни был H_2 с индексом дефекта $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$, можно подобрать B и W так, чтобы удовлетворялись условия (29), (30) и (31). Положим

$$P^+ = \mathfrak{M}_2^+\,(\mathfrak{D}(H_2) + \mathfrak{M}_2^-), \quad P^- = \mathfrak{M}_2^-\,(\mathfrak{D}(H_2) + \mathfrak{M}_2^+),$$
$$Q^+ = \mathfrak{M}_2^+ \ominus P^+, \qquad Q^- = \mathfrak{M}_2^- \ominus P^-,$$

и обозначим через X изометрический оператор, построенный для H_2 как в теореме 9, так что $\mathfrak{D}(X)=P^-$, $\mathfrak{R}(X)=P^+$. Дополним X до изометрического оператора X', отображающего $\overline{P}^-$ на $\overline{P}^+$. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\dim Q^+ \leqslant \dim Q^-$, ибо случай $\dim Q^+ > \dim Q^-$ можно привести к предыдущему, умножая H_1 и H_2 на -1. Пусть R — произвольное замкнутое подпространство в Q^-, такое, что $\dim R = \dim Q^+$; расширим X' произвольным образом до изометрического оператора X'', отображающего $\overline{P}^- \oplus R$ на $\mathfrak{M}_2^+$.

Пусть теперь B — произвольный положительный самосопряженный оператор в $\mathfrak{M}_2^+$, удовлетворяющий условиям

$$0 < |B\psi_2| < |\psi_2| \quad \text{при} \quad \psi_2 \neq 0, \quad \psi_2 \in \mathfrak{M}_2^+, \tag{36}$$

$$\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+ \neq \mathfrak{M}_2^+. \tag{37}$$

Условие (37) означает, что оператор $(\sqrt{1-B})^{-1}$ — неограниченный; по известной теореме Неймана *, отсюда следует, что существует в $\mathfrak{M}_2^+$ самосопряженный оператор C такой, что

$$\mathfrak{D}(C)\,\mathfrak{D}\left((\sqrt{1-B})^{-1}\right)=(0),$$

т. е.

$$\mathfrak{D}(C)\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+=(0). \tag{38}$$

Пусть Y — трансформация Кели C; положим

$$\left.\begin{aligned} W &= YX'' \quad \text{на} \quad \overline{P}^- \oplus R, \\ W &= 0 \quad \text{на} \quad Q^- \ominus R, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

и покажем, что B и W удовлетворяют всем условиям теоремы 14. Прежде всего, в силу (36), $\overline{B\mathfrak{M}_2^+}=\mathfrak{M}_2^+$; следовательно W^* — частично изометрический оператор с начальной областью $\mathfrak{M}_2^+=\overline{B\mathfrak{M}_2^+}$ и конечной $\overline{P}^- \oplus R \subset \mathfrak{M}_2^-$. Далее, если

$$(1-W)\varphi_2=0, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-, \tag{40}$$

то

$$\varphi_2 = W\varphi_2;$$

так как левая часть $\in \mathfrak{M}_2^-$, правая $\in \mathfrak{M}_2^+$, то $\varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-\mathfrak{M}_2^+$. Поэтому $X''\varphi_2 = X\varphi_2 = \varphi_2$ (см. § 3, теорема 9), и (40) перепишется в виде

$$(1-Y)\varphi_2=0.$$

Так как Y — трансформация Кели, то, в силу леммы 1 § 3, отсюда следует, что $\varphi_2=0$, так что условие (29) выполняется. Наконец, если

$$h \in (1-W)\,\mathfrak{M}_2^-\,(\mathfrak{D}(H_2)+\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+),$$

то h представим в виде

$$h=(1-W)\varphi_2, \qquad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-,$$

$$h=f_2+\sqrt{1-B}\,\psi_2, \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \psi_2 \in \mathfrak{M}_2^+,$$

откуда

$$f_2=\varphi_2-(W\varphi_2+\sqrt{1-B}\,\psi_2).$$

* См. ([6]), теорема 18.

В силу теоремы 9 § 3, отсюда следует, что $\varphi_2 \in \mathfrak{D}(X) = P^-$ и

$$W\varphi_2 + \sqrt{1-B}\,\psi_2 = X\varphi_2.$$

Кроме того $W\varphi_2 = YX\varphi_2$, следовательно

$$YX\varphi_2 + \sqrt{1-B}\,\psi_2 = X\varphi_2,$$

откуда

$$\sqrt{1-B}\,\psi_2 = (1-Y)\,X\varphi_2.$$

Но левая часть последнего равенства $\in \sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+$, а правая $\in \mathfrak{D}(C)$ (см. § 3, лемма 1); в силу (38), отсюда следует, что $(1-Y)\,X\varphi_2 = 0$, $X\varphi_2 = 0$, $\varphi_2 = 0$; следовательно

$$h = (1-W)\,\varphi_2 = 0.$$

Таким образом условие (31) также выполняется, и теорема 15 доказана.

Теоремы 12—15 дают полное описание всех самосопряженных расширений данного симметрического оператора.

Следствие 12. *Для того чтобы замкнутый симметрический оператор H_1 имел нерегулярные расширения, необходимо и достаточно, чтобы оба дефектных подпространства H_1 были бесконечномерны.*

Это следствие получается непосредственно из теорем 12 и 15.

Следствие 13. *Для того чтобы замкнутый симметрический оператор H_1 имел выродившиеся расширения, необходимо и достаточно, чтобы его индекс дефекта имел вид $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число, причем в этом случае H_1 имеет бесчисленное множество выродившихся расширений.*

Доказательство. Если H_1 имеет выродившееся расширение, то для него $\mathfrak{D}(H_2) = (0)$, следовательно $\mathfrak{M}_2^+ = \mathfrak{M}_2^- = \mathfrak{H}_2$. Поэтому, обозначая $\dim \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{m}$, получаем, в силу (20), что $\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^- = \mathfrak{m}$. При этом, согласно теореме 12, $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число. Обратно, если H_1 имеет индекс дефекта $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$, где $\mathfrak{m}$ — бесконечное кардинальное число, то достаточно применить теорему 15 к оператору H_2 в пространстве $\mathfrak{H}_2$ размерности $\mathfrak{m}$ такому, что $\mathfrak{D}(H_2) = (0)$.

§ 6. Спектральные семейства для симметрического оператора

ТЕОРЕМА 16. *Пусть H_1 — произвольный замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$. Тогда существует семейство ограниченных самосопряженных операторов $E_1(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ в $\mathfrak{H}_1$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1° *при $\lambda_2 > \lambda_1$, $E_1(\Delta) = E_1(\lambda_2) - E_1(\lambda_1)$ — положительно определенный оператор;*

2° *$E_1(\lambda)$ — непрерывная слева* функция параметра λ;*

3° *$E_1(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$, $E_1(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to +\infty$;*

---

* Непрерывность и предел оператора здесь рассматриваются в смысле сходимости по норме на каждом элементе $\mathfrak{H}_1$.

4° для всякого элемента $f \in \mathfrak{H}_1$ и произвольного конечного интервала $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$ $E_1(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$, причем

$$H_1^* E_1(\Delta) f = \int_\Delta \lambda dE_1(\lambda) f; \tag{1}$$

5° $f \in \mathfrak{D}(H_1)$ тогда и только тогда, когда сходится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E_1(\lambda) f, f), \tag{2}$$

причем

$$Hf = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_1(\lambda) f. \tag{3}$$

Если, кроме того, H_1 — максимальный оператор, а π — полуплоскость собственных значений H_1^*, то

$$6^\circ \quad \left. \begin{aligned} (H_1 - \lambda 1)^{-1} f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_1(\mu) f}{\mu - \lambda} \\ (H_1^* - \bar{\lambda} 1)^{-1} f &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_1(\mu) f}{\mu - \bar{\lambda}} \end{aligned} \right\} \text{ при } \lambda \in \pi, \; I(\lambda) \neq 0.$$

В этом случае условия 1° — 4° определяют $E_1(\lambda)$ однозначно и сходимость (2) является необходимым и достаточным условием для сильной сходимости $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda dE_1(\lambda) f$.

Доказательство. Пусть H в $\mathfrak{H}$ какое-нибудь самосопряженное расширение H_1, $E(\lambda)$ — спектральное разложение H, а E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$. Положим для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1(\lambda) f = E_1 \cdot E(\lambda) f$$

и докажем, что $E_1(\lambda)$ удовлетворяет условиям 1° — 5°. Для $f \in \mathfrak{H}_1$ мы имеем $E_1 f = f$, следовательно

$$(E_1(\Delta) f, f) = (E_1 \cdot E(\Delta) f, f) = (E(\Delta) f, E_1 f) = (E(\Delta) f, f) \geqslant 0.$$

Таким образом условие 1° выполняется; условия же 2° и 3° непосредственно следуют из аналогичных свойств $E(\lambda)$ и ограниченности E_1.

Для доказательства 4° отметим, что для конечного интервала Δ всегда $E(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H)$; согласно теореме 1, примененной к $A = H$, отсюда следует, что $E_1(\Delta) f = E_1 \cdot E(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ и

$$H_1^* E_1(\Delta) f = E_1 H E(\Delta) f = E_1 \int_\Delta \lambda \, dE(\lambda) f = \int_\Delta \lambda \, dE_1 E(\lambda) f = \int_\Delta \lambda \, dE_1(\lambda) f,$$

причем все интегралы сходятся сильно (ибо E_1 ограничен).

Перейдем к доказательству 5°. Пусть $f \in \mathfrak{H}_1$; в этом случае $f \in \mathfrak{D}(H_1)$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathfrak{D}(H)$, следовательно когда сходится

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda) f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(E(\lambda) f, E_1 f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(E_1(\lambda) f, f).$$

При этом $H_1 f = Hf \in \mathfrak{H}_1$, следовательно

$$H_1 f = E_1 H_1 f = E_1 H f = E_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE(\lambda) f = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_1(\lambda) f,$$

а сильная сходимость $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_1(\lambda) f$ следует из сильной сходимости $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE(\lambda) f$.

Пусть теперь $E_1(\lambda)$ — произвольное семейство самосопряженных ограниченных операторов, удовлетворяющее условиям 1°—4°. Из 1° и 2° следует, что $(E_1(\mu) f, f)$ — возрастающая ограниченная функция μ, следовательно $(E_1(\mu) f, g)$ $(f, g \in \mathfrak{H}_1)$ — функция с ограниченной вариацией в интервале $(-\infty, \infty)$. Поэтому при $I(\lambda) \neq 0$ существует интеграл

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda}\, d(E_1(\mu) f, g),$$

т. е. существует слабый предел

$$B(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda}\, dE_1(\mu) = \lim_{N_1, N_2 \to +\infty} \int_{-N_1}^{N_2} \frac{1}{\mu - \lambda}\, dE_1(\lambda)$$

и $B(\lambda)$ — ограниченный оператор. Кроме того из 4° и слабой замкнутости H_1^* легко следует, что, для любого $f \in \mathfrak{H}_1$, $B(\lambda) f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ и

$$H_1^* B(\lambda) f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\mu - \lambda}\, d \int \mu' dE_1(\mu') f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu}{\mu - \lambda}\, dE_1(\mu) f;$$

следовательно

$$(H_1^* - \lambda 1) B(\lambda) f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu - \lambda}{\mu - \lambda}\, dE_1(\mu) f = f. \tag{4}$$

Пусть теперь H_1 — максимальный оператор. Тогда для $\lambda \in \pi$ существует ограниченный обратный оператор $R_\lambda = (H_1^* - \lambda 1)^{-1} = (H_1 - \bar{\lambda} 1)^{-1*}$; поэтому из (4) следует, что

$$B(\lambda) = R_\lambda \quad \text{при} \quad \bar{\lambda} \in \pi, \tag{5}$$
$$B(\lambda) = R_{\bar{\lambda}}^* \quad \text{при} \quad \lambda \in \pi. \tag{6}$$

Таким образом 6° доказано и одновременно доказана однозначность $B(\lambda)$. Но из (5) и (6) следует, что

$$(R_\lambda f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(E_1(\mu) f, f)}{\mu - \lambda} \quad \text{при} \quad \bar{\lambda} \in \pi,$$

$$(R_{\bar{\lambda}}^* f, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d(E_1(\mu) f, f)}{\mu - \lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \in \pi;$$

пользуясь формулой обращения Стильтьеса *, мы получаем отсюда, что $(E_1(\mu)f, f)$, а значит и $E_1(\mu)$ однозначно ** определяется по H_1.

Для доказательства последнего утверждения теоремы обозначим через $\mathfrak{D}(H_0)$ совокупность тех векторов f, для которых сходится $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_1(\lambda) f$, и положим

$$H_0 f = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, dE_1(\lambda) f.$$

Тогда H_0 — симметрический оператор и, в силу 5°, $H_0 \supset H_1$; но H_1 — максимальный оператор, следовательно $H_0 = H_1$ и $\mathfrak{D}(H_0) = \mathfrak{D}(H_1)$. Отсюда, в силу 5°, следует последнее утверждение теоремы.

Следствие 14 ***. *Пусть H_1 — произвольный симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$. Тогда существует последовательность самосопряженных ограниченных операторов $H^{(n)}$ в $\mathfrak{H}_1$ такая, что для любого $f \in \mathfrak{D}(H_1)$*

$$H_1 f = \lim_{n\to\infty} H^{(n)} f.$$

Доказательство. Очевидно, можно считать H_1 замкнутым, но в таком случае можно, например, положить

$$H^{(n)} = \int\limits_{-n}^{n} \lambda\, dE_1(\lambda),$$

где $E_1(\lambda)$ — какое-нибудь из спектральных семейств для H_1, построенных в теореме 16.

Добавление

Мы покажем здесь, что в следствии 1 нельзя положить $\lambda = 0$ (см. замечание в конце § 2). Прежде всего докажем следующую лемму.

ЛЕММА. *Каков бы ни был замкнутый симметрический оператор H_1, у которого оба дефектных подпространства бесконечномерны, существуют такие (даже регулярные) расширения оператора H_1, что оператор B_1, построенный как в теореме 1, не совпадает с $\widetilde{B}_1 = H_1^*$.*

Доказательство. Применим теорему 10 § 4 к оператору $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ в теореме 13 § 5. При этом мы можем очевидно поменять в теореме 10 индексы 1 и 2 местами, следовательно написать

$$U_{11} = BW, \quad U_{12} = \sqrt{1 - B^2}\, V_2,$$
$$U_{21} = V_1 \sqrt{1 - W^* B^2 W}, \quad U_{22} = W_1 V_2^* B V_2,$$

где B, W, V_1, V_2, W_1 удовлетворяют условиям, которые получаются из соответствующих условий теоремы 10 перестановкой $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1'$ и $\mathfrak{H}_2'$. Выберем B таким, чтобы

$$\sqrt{1 - B^2}\, \mathfrak{M}_2^+ \neq \mathfrak{M}_1^+$$

* См., например, (10), стр. 163.

** Если H_1 не максимальный оператор, то $E_1(\lambda)$ будет зависеть от H, как в этом легко убедиться на простейших примерах.

*** Это предложение доказано Стоном (10) для случая, когда $\mathfrak{H}_1$ сепарабельно (см. теорему 9.16).

и пусть

$$\psi_1 \in \mathfrak{M}_1^+, \quad \psi_1 \overline{\in} \sqrt{1-B^2}\,\mathfrak{M}_1^+. \tag{1}$$

Очевидно, что тогда $\psi_1 \in \mathfrak{D}(H_1^*)$. С другой стороны, $\psi_1 \overline{\in} \mathfrak{D}(B_1) = E_1\mathfrak{D}(H)$. В самом деле, в силу теоремы 11 § 5, $E_1\mathfrak{D}(H)$ состоит из векторов вида

$$f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2), \quad f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-,$$

так что из $\psi_1 \in E_1\mathfrak{D}(H)$ должно следовать представление

$$\psi_1 = f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2). \tag{2}$$

Но $\mathfrak{D}(H_1)$, $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ линейно независимы; поэтому из (2) следует, что

$$f_1 = 0, \quad \varphi_1 = 0, \quad \psi_1 = U_{12}\varphi_2,$$

т. е.

$$\psi_1 = \sqrt{1-B^2}\,V_2\varphi_2,$$

что противоречит (1). Итак, $\mathfrak{D}(H_1^*) \neq \mathfrak{D}(B_1)$, следовательно $\tilde{B}_1 = H_1^* \neq B_1$ и лемма доказана.

В силу сказанного в конце § 2 остается только построить симметрический оператор H_1 с бесконечномерными дефектными подпространствами и нулевым подпространством $=(0)$.

Элементарный симметрический оператор, рассмотренный в примере 2 § 2, имеет очевидно индекс дефекта (0, 1) и нулевое подпространство $=(0)$; мы его обозначим теперь через H_0. Пусть $\mathfrak{H}_1$ – произвольное гильбертово пространство; разложим его в прямую сумму взаимно ортогональных сепарабельных пространств $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ и построим в каждом из них оператор $H^{(\alpha)}$, изометрический H_0 или $-H_0$. При этом мы позаботимся еще о том, чтобы как оператор $H^{(\alpha)}$, изометрический H_0, так и $H^{(\alpha)}$, изометрический $-H_0$, встречались бесконечное число раз. Тогда очевидно, что $H^{(\alpha)}$ определяют симметрический оператор H_1 в $\mathfrak{H}_1$, приводимый каждым $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ и равный $H^{(\alpha)}$ в $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, при этом H_1 обладает всеми требуемыми свойствами.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
20. IX. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1 Calkin J. W., Abstract symmetric boundary conditions, Transact. Amer. Math. Soc., 45 (1939).

2 Carleman T., Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.

3 Halperin I., Closures and adjoints of linear differential operators, Annals of Math., 38 (1937).

4 Murray F. J., Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations, Transact. Amer. Math. Soc., 37 (1935).

5 Murray F. J. a. Neumann J. v., On rings of operators, Annals of Math., 33 (1932).

6 Neumann J. v., Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen, Journ. f. reine u. angew. Math., 161 (1929).

7 Neumann J. v., Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Annalen, 102 (1929).

8 Neumann J. v., Über adjungierte Funktionaloperatoren, Annals of Math., 33 (1932).

9 Riess F., Zur Theorie des Hilbertschen Raumes, Acta Szeged, 7 (1934).

10 Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, XV (1932).

M. NEUMARK. SELF-ADJOINT EXTENSIONS OF THE SECOND KIND OF A SYMMETRIC OPERATOR *

SUMMARY

The present paper is devoted to a new kind of extensions of a symmetric operator, which will be called extensions of the second kind in order to distinguish them from the usual extensions called here extensions of the first kind.

§ 1. The part of a closed linear operator in an invariant subspace

Definition 1. A closed linear operator A in $\mathfrak{H}$ with the domain dense in $\mathfrak{H}$ will be called an N-operator in $\mathfrak{H}$.

Definition 2. Let A be an N-operator in $\mathfrak{H}$ and $\mathfrak{H}_1$ a closed subspace in $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{H}_1$ will be said to be invariant with respect to A, if **

$$\overline{\mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}_1}=\mathfrak{H}_1 \quad \text{and} \quad A(\mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}_1)\subset\mathfrak{H}_1. \tag{1}$$

The operator A_1 in $\mathfrak{H}_1$ defined by

$$A_1=A \quad \text{on} \quad \mathfrak{D}(A)\mathfrak{H}_1 \tag{2}$$

will be called the part of A in $\mathfrak{H}_1$ and A—an extension of the second kind of A_1 into $\mathfrak{H}$.

In what follows «extension» always means extension of the second kind.

THEOREM 1. *Let $\mathfrak{H}_1$ be a closed subspace which is invariant with respect to the N-operator A, and let A_1 be the part of A in $\mathfrak{H}_1$. Then A_1 is an N-operator in $\mathfrak{H}_1$. Let further E_1 be the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1$ and B_1 the operator in $\mathfrak{H}_1$ with the domain*

$$\mathfrak{D}(B_1)=E_1\mathfrak{D}(A^*) \tag{3}$$

defined by

$$B_1E_1f=E_1A^*f, \quad f\in\mathfrak{D}(A^*). \tag{4}$$

Then

$$A_1^*=\tilde{B}_1. \tag{5}$$

Proof. The first part is obvious. Further, for $f\in\mathfrak{D}(A_1)$, $g=E_1\varphi$, $\varphi\in\mathfrak{D}(A^*)$ we have

$$(A_1f, E_1\varphi)=(E_1A_1f, \varphi)=(A_1f, \varphi)=(f, A^*\varphi)=(E_1f, A^*\varphi)=(f, E_1A^*\varphi). \tag{6}$$

Thus $E_1\varphi=0$ implies $E_1A^*\varphi=0$ [cf. (1)], i. e., (4) defines B_1 uniquely. Moreover (6) implies $B_1\subset A_1^*$ and therefore ***

$$\tilde{B}_1\subset A_1^*. \tag{7}$$

If now $f\in\mathfrak{D}(B_1^*)$, then for all $E_1\varphi$, $\varphi\in\mathfrak{D}(A^*)$

$$(\varphi, B_1^*f)=(E_1\varphi, B_1^*f)=(B_1E_1\varphi, f)=(E_1A^*\varphi, f)=(A^*\varphi, f),$$

* Separability of $\mathfrak{H}$ is not assumed in this paper.

** We denote by $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{R}(A)$ the domain and the range of A respectively; $\overline{\mathfrak{M}}$ denotes the closure of $\mathfrak{M}$ and $A\mathfrak{M}$—the range of A on $\mathfrak{M}$.

*** $A\subset B$ means that B is an extension of A, i. e., $\mathfrak{D}(A)\subset\mathfrak{D}(B)$ and $Af=Bf$ for $f\in\mathfrak{D}(A)$; $\tilde{A}$ denotes the closure of A (if this closure exists).

hence* $f \in \mathfrak{D}(A^{**}) = \mathfrak{D}(A)$ and $B_1^* f = A_1 f$. So $B_1^* \subset A_1$, $\tilde{B}_1 \supset A_1^*$, and this result together with (7) gives (5).

THEOREM 2. *Let U by the unitary operator in $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ defined by $U\{f, g\} = \{g, -f\}$ and E_1' the projection in $\mathfrak{H}'$ onto $\mathfrak{H}_1' = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_1$. Then* **

$$\mathfrak{B}(A_1^*) = (E_1')\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) = E_1'(\mathfrak{B}(A^*) \oplus U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1))). \tag{8}$$

Proof. It is clear that

$$\mathfrak{B}(A_1^*) = E_1'\mathfrak{B}(A_1^*) \subset E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)); \tag{9}$$

on the other hand, if $\{f_0, g_0\} \in \mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)$, then for all $f \in \mathfrak{D}(A_1)$

$$0 = (f_0, A_1 f) - (g_0, f) = (E_1 f_0, A_1 f) - (E_1 g_0, f);$$

hence $E_1'\{f_0, g_0\} = \{E_1 f_0, E_1 g_0\} \in \mathfrak{B}(A_1^*)$. Together with (9) this gives

$$\mathfrak{B}(A_1^*) = E_1'(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)). \tag{10}$$

Now from

$$(\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) \ominus \mathfrak{B}(A^*) = (\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1)) \ominus$$
$$\ominus (\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A)) = U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1))$$

we get

$$\mathfrak{H}' \ominus U\mathfrak{B}(A_1) = \mathfrak{B}(A^*) \oplus U(\mathfrak{B}(A) \ominus \mathfrak{B}(A_1)) \tag{11}$$

and (10), (11) imply (8).

THEOREM 3. *Every element $f \in \mathfrak{D}(A_1^*)$ is representable as*

$$f = E_1\varphi + E_1 A g_0, \tag{12}$$

where

$$\varphi \in \mathfrak{D}(A^*), \quad E_1 A g_0 \in \mathfrak{D}(A_1^*), \tag{13}$$

and

$$A_1^* E_1 g_0 = -E_1 g_0. \tag{14}$$

This theorem can be easily deduced from (8).

§ 2. The part of a self-adjoint operator

THEOREM 4. *Let H be a self-adjoint operator in $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ a closed subspace invariant with respect to H, and H_1 the part of H in $\mathfrak{H}_1$. Then H_1 is a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$; H_1 is self-adjoint, if and only if $\mathfrak{H}_1$ reduces H.*

Proof. The first assertion is obvious, the second follows from

$$H_1 = H_1^* \supset B_1.$$

THEOREM 5. *Let λ be an arbitrary non-real number. Then every element $f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ is representable as*

$$f = E_1\varphi + \psi, \tag{1}$$

where $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$ and ψ satisfies the conditon

$$H_1^*\psi = \lambda\psi. \tag{2}$$

Proof. Put

$$\varphi = (H - \lambda 1)^{-1}(H_1^* - \lambda 1)f, \quad \psi = f - E_1\varphi;$$

---

* By a theorem of J. v. Neumann [cf. ([8]), theorem 2] for every N-operator A $A^{**} = A$.

** For the definition of the graph $\mathfrak{B}(A)$ of A cf. ([8]) or ([4]).

then $f = E_1\varphi + \psi$, $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$ and by Theorem 1

$$(H_1^* - \lambda 1)\psi = E_1(H - \lambda 1)\varphi - (H_1^* - \lambda 1)f = 0.$$

THEOREM 6. *Let λ be an arbitrary non-real number. For every element ψ satisfying* (2) *there exists a sequence $f_n \in \mathfrak{D}(H)$ such that* *

$$E_1 H f_n = \lambda E_1 f_n, \quad \psi = \lim_{n\to\infty} E_1 f_n. \tag{3}$$

Proof. By Theorem 1 there exists a sequence $g_n \in \mathfrak{D}(H)$ such that

$$E_1 g_n \to \psi, \quad B_1 E_1 g_n = E_1 H g_n \to H_1^* \psi = \lambda\psi.$$

Put

$$\psi_n = (H - \lambda 1)^{-1} E_1 (H - \lambda 1) g_n, \quad f_n = g_n - \psi_n;$$

then f_n has all the properties required.

Corollary 1. *Every element $f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ is representable as*

$$f = E_1\varphi + \psi,$$

where $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$ and ψ is the limit of a sequence $E_1 f_n$ such that $f_n \in \mathfrak{D}(H)$, $E_1 H f_n = \lambda E_1 f_n$, $I(\lambda) \neq 0$.

Remark. As I. Halperin ** showed we can put in some cases $\lambda = 0$, but this result does not hold in the general case (cf. Appendix).

Corollary 2. *Let $\mathfrak{N}_\lambda$, $\mathfrak{M}_\lambda$ be the manifolds of all vectors $f \in \mathfrak{D}(B_1)$ and $g \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ satisfying*

$$B_1 f = \lambda f, \quad H_1^* g = \lambda g, \quad I(\lambda) \neq 0,$$

respectively. Then $\mathfrak{M}_\lambda = \overline{\mathfrak{N}}_\lambda$.

Corollary 3. *If for some $\lambda\,(I(\lambda) \neq 0)\,\mathfrak{N}_\lambda$ is finite-dimensional, then $H_1^* = B_1$.*

Proof. In this case $\mathfrak{M}_\lambda = \overline{\mathfrak{N}}_\lambda = \mathfrak{N}_\lambda \subset \mathfrak{D}(B_1)$; thus, by Theorem 5 $\mathfrak{D}(H_1^*) = \mathfrak{D}(B_1)$.

Corollary 4. *If for a $\lambda\,(I(\lambda) \neq 0)$ $\mathfrak{N}_\lambda = 0$, then H_1 is maximal.*

Corollary 5. *If for a λ_1 with $I(\lambda_1) > 0$ and for a λ_2 with $I(\lambda_2) < 0$ $\mathfrak{N}_{\lambda_1} = \mathfrak{N}_{\lambda_2} = (0)$, then H_1 is self-adjoint and $\mathfrak{H}_1$ reduces H.*

Example. Let $\mathfrak{H}$ be the set of all Lebesgue square summable functions $f(x)$ in $(-\infty, +\infty)$, $\mathfrak{D}(H)$ — the set of all $f(x) \in \mathfrak{H}$, which are absolutely continuous in every finite interval and such that $f'(x) \in \mathfrak{H}$. For $f(x) \in \mathfrak{D}(H)$ put $Hf(x) = -if'(x)$. As is known, H is self-adjoint.

Let $\mathfrak{H}_1$ be the set of all Lebesgue square summable functions $\varphi(x)$ in $[0, +\infty)$; we include $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}$ by identifying $\varphi(x)$ with

$$f(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{almost everywhere in } [0, +\infty), \\ 0 & \text{almost everywhere outside } [0, +\infty). \end{cases}$$

Then $\mathfrak{H}_1$ is easily seen to be invariant with respect to H.

$\mathfrak{D}(B_1)$ consists of all $\varphi(x) \in \mathfrak{H}_1$ which are absolutely continuous in every finite subinterval of $[0, +\infty)$ and such that $\varphi'(x) \in \mathfrak{H}_1$. Moreover, $B_1\varphi(x) = -i\varphi'(x)$; $\mathfrak{D}(H_1)$ is the set of all $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(B_1)$ satisfying $\varphi(0) = 0$

* Throughout the whole paper the limit is meant in the sense of the strong topology.

** Cf. [3], Theorem 3. 1.

and $H_1 \subset B_1$. By Theorem 4, H_1 is a closed symmetric operator. Further $\mathfrak{N}_{-i} = (0)$, $\mathfrak{N}_i = (Ce^{-x})$; thus by Corollaries 4, 2, H_1 is maximal* with the deficiency index (0, 1) and B_1 is closed, i. e., $B_1 = H_1^*$.

§ 3. Hermitian operators in Hilbert space

Definition 3. A linear operator H in $\mathfrak{H}$ will be called Hermitian, if for arbitrary $f, g \in \mathfrak{D}(H)$

$$(Hf, g) = (f, Hg).$$

H is evidently symmetric if and only if $\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}$.

LEMMA 1. *Let H be an Hermitian operator in $\mathfrak{H}$. We define an operator U_H in $\mathfrak{R}(H - i1)$ by*

$$U_H (H - i1) f = (H + i1) f; \tag{1}$$

then U_H is an isometric operator with the domain $\mathfrak{R}(H - i1)$ and the range $\mathfrak{R}(H + i1)$ satisfying the condition

$$U_H \varphi = \varphi \quad \textit{implies} \quad \varphi = 0. \tag{2}$$

Conversely, if U is an arbitrary isometric operator in $\mathfrak{H}$ satisfying the condition (2), *then an Hermitian operator H exists, for which $U = U_H$. Moreover*

$$\mathfrak{D}(H) = \mathfrak{R}(U - 1), \quad H(U\varphi - \varphi) = i(U\varphi + \varphi), \quad \varphi \in \mathfrak{D}(U), \tag{3}$$

and the correspondance $H \sim U_H$ is one-to-one.

The proof follows immediately from the definitions of U_H, H in terms of H, U respectively.

Definition 4. The operator U_H defined in Lemma 1 will be called the Cayley-transform of H. If we put

$$L^+ = \mathfrak{R}(H + i1), \quad L^- = \mathfrak{R}(H - i1),$$

then the subspaces

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{H} \ominus L^-, \quad \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{H} \ominus L^+$$

will be called the deficiency-spaces of H and the pair $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$, where** $\mathfrak{m} = \dim \mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{n} = \dim \mathfrak{M}^+$ will be called the deficiency-index of H.

LEMMA 2. *Let H, H_1 be Hermitian operators and U_H, U_{H_1} their Cayley-transforms. Then the relations*

$$H \subset H_1, \quad U_H \subset U_{H_1}$$

are equivalent and H is closed if and only if U_H is closed, i. e., if L^+, L^- are closed subspaces in $\mathfrak{H}$.

LEMMA 3. *Let H_1 be a closed Hermitian operator in $\mathfrak{H}$; $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ its deficiency-spaces, and H — a self-adjoint extension of the first kind of H_1 i. e., self-adjoint operator in $\mathfrak{H}$ satisfying the condition $H \supset H_1$. Then $\mathfrak{D}(H)$ consists of all elements f representable as*

$$f = f_1 - \varphi + U\varphi, \tag{4}$$

* H_1 is the so called elementary symmetric operator. Cf. ([10]), Theorem 10. 8.

** dim $\mathfrak{M}$ denotes the cardinal number of the complete orthonormal set in $\mathfrak{M}$.

where $f_1 \in \mathfrak{D}(H_1)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_1^-$ *and* U *is such an isometric mapping of* $\mathfrak{M}_1^-$ *onto* $\mathfrak{M}_1^+$, *that*

$$U_{H_1}\varphi_1 + U\varphi = \varphi_1 + \varphi, \quad \varphi_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad \varphi \in \mathfrak{M}_1^- \text{ implies } \varphi_1 = \varphi = 0. \tag{5}$$

Moreover

$$Hf = H_1 f_1 + i\varphi + iU\varphi. \tag{6}$$

Conversely, if U *is an isometric mapping of* $\mathfrak{M}_1^-$ *onto* $\mathfrak{M}_1^+$ *satisfying* (5) *and* H *is defined by* (4) *and* (6), *then* H *is a self-adjoint extension of the first kind of* H_1. *The correspondence between* H *and* U *so obtained is one-to-one.*

Proof. If $H \supset H_1$ and H is self-adjoint, then $U_H \supset U_{H_1}$ and U_H is unitary. Thus we have only to put $U = U_H$ on $\mathfrak{M}^-$ and apply Lemmas 1, 2 and the equality $\mathfrak{D}(U_{H_1}) \oplus \mathfrak{M}_1^- = \mathfrak{H}$. If, conversely, a U satisfying (5) is given, then U_H is unitary; hence H is self-adjoint and $H \supset H_1$.

Remark. We have defined U_H by (1); but we could introduce an operator V_H by putting

$$V_H(H + i1)f = (H - i1)f, \tag{7}$$

so that

$$V_H = U_H^{-1}. \tag{8}$$

It is easily seen, that Lemmas 1, 2, 3 remain valid; we have only to replace $-i$ by i. So, f. i., $\mathfrak{D}(H)$ consists of all $f = f_1 + \varphi - V\varphi$, where $f_1 \in \mathfrak{D}(H_1)$, $\varphi \in \mathfrak{M}_1^+$, V maps $\mathfrak{M}_1^+$ isometrically onto $\mathfrak{M}_1^-$ and $Hf = H_1 f_1 + i\varphi + iV\varphi$. If V and U correspond to the same H, then $V = U^{-1}$.

THEOREM 7. *Let* H *be a closed Hermitian operator in* $\mathfrak{H}$. *Then**

$$\mathfrak{D}(H)\mathfrak{M}^- = \mathfrak{D}(H)\mathfrak{M}^+ = 0, \tag{9}$$

$$\overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-} = \overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^+} = \mathfrak{H}. \tag{10}$$

Proof. If $f \in \mathfrak{D}(H)\mathfrak{M}^-$, then $f \perp L^-$; thus

$$0 = (Hf - if, f) = (Hf, f) - i(f, f).$$

Since (Hf, f) is real, this implies $f = 0$. If $f \perp \mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-$, then $f \in L^-$, $f = Hg - ig$, $g \in \mathfrak{D}(H)$ and $f \perp g$. Again this implies $f = 0$. By a theorem of F. Riess (9) it follows that $\overline{\mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^-} = \mathfrak{H}$.

THEOREM 8. *If* H *is a closed Hermitian operator in* $\mathfrak{H}$, *then* $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-, \mathfrak{M}^+$ *are linearly independent, if and only if* $\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}$, *i. e., if* H *is symmetric.*

Proof. The sufficiency of the condition is well-known. If, conversely, $\mathfrak{D}(H), \mathfrak{M}^-, \mathfrak{M}^+$ are linearly independent, put $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(H) + \mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+$ and for $f = g + \varphi + \psi$, $g \in \mathfrak{D}(H)$, $\varphi \in \mathfrak{M}^-$, $\psi \in \mathfrak{M}^+$

$$Af = Hg - i\varphi + i\psi.$$

By Theorem 7, $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}$. If further

$$\left.\begin{array}{c} f_n = g_n + \varphi_n + \psi_n, \quad g_n \in \mathfrak{D}(H), \quad \varphi_n \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi_n \in \mathfrak{M}^+, \quad f_n \to f_0, \\ Af_n \to h_0, \end{array}\right\} \tag{11}$$

* If $\mathfrak{M}$ and $\mathfrak{N}$ are linear manifolds in $\mathfrak{H}$, then $\mathfrak{M} + \mathfrak{N}$ denotes their linear sum, i. e., the set of all elements $\varphi + \psi$, $\varphi \in \mathfrak{M}$, $\psi \in \mathfrak{N}$.

then

$$Af_n - if_n = (Hg_n - ig_n) - 2i\varphi_n \to h_0 - if_0,$$
$$Af_n + if_n = (Hg_n + ig_n) + 2i\psi_n \to h_0 + if_0.$$

Hence, if we put* $\varphi_0 = -\frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^-}(h_0 - if_0), \psi_0 = \frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^+}(h_0 + if_0)$, we have

$$\left.\begin{aligned} \varphi_n &= -\frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^-}(Af_n - if_n) \to \varphi_0, \\ \psi_n &= \frac{1}{2i} P_{\mathfrak{M}^+}(Af_n + if_n) \to \psi_0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Put

$$g_0 = f_0 - \varphi_0 - \psi_0, \quad g_0^* = h_0 + i\varphi_0 - i\psi_0;$$

then it follows from (11), (12)

$$g_n \to g_0, \qquad Hg_n \to g_0^*.$$

Thus $g_0 \in \mathfrak{D}(H_0)$, $g_0^* = Hg_0$, and therefore $f_0 \in \mathfrak{D}(A)$, $h_0 = Af_0$. Hence A is an N-operator in $\mathfrak{H}$.

Further, for $\varphi \in \mathfrak{M}^-$, $\psi \in \mathfrak{M}^+$, $g' \in \mathfrak{D}(H)$ we easily deduce

$$(\varphi, Hg') = -i(\varphi, g'), \quad (\psi, Hg') = i(\psi, g');$$

hence for $f = g + \varphi + \psi$, $g \in \mathfrak{D}(H)$ we obtain that $(Af, g') = (f, Hg')$. This means that

$$H \subset A^*. \tag{13}$$

On the other hand, if $f \in \mathfrak{D}(A^*)$, then for all $f = g + \varphi + \psi$, $g \in \mathfrak{D}(H)$, $\varphi \in \mathfrak{M}^-$, $\psi \in \mathfrak{M}^+$ we have

$$(Hg - i\varphi + i\psi, h) = (g + \varphi + \psi, A^*h). \tag{14}$$

Putting here $g = \psi = 0$, we obtain, that $A^*h - ih \in L^-$, i. e.,

$$A^*h - ih = Hg' - ig', \quad g' \in \mathfrak{D}(H) \tag{15}$$

and similarly

$$A^*h + ih = Hg'' + ig'', \qquad g'' \in \mathfrak{D}(H). \tag{16}$$

Putting further $\varphi = \psi = 0$ we obtain $(Hg, h) = (g, A^*h)$; hence

$$(Hg + ig, h) = (g, A^*h - ih) = (g, Hg' - ig') = (Hg + ig, g'),$$
$$(Hg + ig, h - g') = 0.$$

This means that $\psi_1 = h - g' \in \mathfrak{M}^+$. Similarly we obtain that $\varphi_1 = h - g'' \in \mathfrak{M}^-$; thus $g' + \psi_1 = g'' + \varphi_1$, $g' - g'' - \varphi_1 + \psi_1 = 0$, and the linear independence of $\mathfrak{D}(H)$, $\mathfrak{M}^-$, $\mathfrak{M}^+$ implies $\varphi_1 = \psi_1 = 0$, $g' = g'' = h$, $h \in \mathfrak{D}(H)$; *i. e.*, $A^* \subset H$. This result together with (13) gives $A^* = H$. But since A is an N-operator, H is also an N-operator**; thus $\overline{\mathfrak{D}(H)} = \mathfrak{H}$.

THEOREM 9. *If H is a closed Hermitian operator in $\mathfrak{H}$, then every element $f \in \mathfrak{D}(H) \cdot (\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)$ is representable in the form*

$$f = \varphi - X\varphi,$$

where X is an isometric operator with domain $\mathfrak{D}(X) = \mathfrak{M}^-(\mathfrak{M}^+ + \mathfrak{D}(H))$, and range $\mathfrak{R}(X) = \mathfrak{M}^+(\mathfrak{M}^- + \mathfrak{D}(H))$. If $\varphi \in \mathfrak{M}^-\mathfrak{M}^+$, then $X\varphi = \varphi$.

---

* $P_{\mathfrak{M}}$ denotes the projection onto $\mathfrak{M}$.

** Cf. ([8]), Theorem 2.

Proof. If $f \in \mathfrak{D}(H)(\mathfrak{M}^- + \mathfrak{M}^+)$ then

$$f = U_H g - g = \varphi + \psi, \quad g \in L^-, \quad \varphi \in \mathfrak{M}^-, \quad \psi \in \mathfrak{M}^+,$$

and therefore

$$|\varphi + g|^2 = |U_H g - \psi|^2,$$

i. e.,

$$|\varphi|^2 + |g|^2 = |g|^2 + |\psi|^2, \quad |\varphi| = |\psi| .$$

Putting $\psi = -X\varphi$ we obtain the desired representation of f. The assertions about $\mathfrak{D}(X)$ and $\mathfrak{R}(X)$ are evident. Finally, if $\varphi \in \mathfrak{M}^- \mathfrak{M}^+$, then $\varphi - X\varphi \in \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{M}^+ = (0)$; hence $\varphi - X\varphi = 0$.

§ 4. The direct sum of Hilbert spaces and operators with the domain in one direct sum and the range in another

Definition 5. By the direct sum $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ of two Hilbert spaces $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$ will be meant the set of all pairs $\{f, g\}$, $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$, for which the operations $+$, and the scalar multiplication are defined as follows:

1° $\{f_1, g_1\} + \{f_2, g_2\} = \{f_1 + f_2, g_1 + g_2\}$,

2° $\alpha \{f, g\} = \{\alpha f, \alpha g\}$, α a scalar,

3° $(\{f_1, g_1\}, \{f_2, g_2\}) = (f_1, f_2) + (g_1, g_2)$.

It is evident, that $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ forms a Hilbert space. We shall not distinguish between $\{f, 0\}$ and f, $\{0, g\}$ and g; then $\mathfrak{H}_1$ and $\mathfrak{H}_2$ may be considered as mutually orthogonal subspaces of $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ complementing each other in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$.

Definition 6. Let A_1, A_2 be linear operators with domains in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ and ranges * in $\mathfrak{H}_1'$, $\mathfrak{H}_2'$. By the direct sum $A_1 \oplus A_2$ of A_1, A_2 will be meant the linear operator A defined in $\mathfrak{D}(A_1) + \mathfrak{D}(A_2)$ by the equality

$$A(f + g) = A_1 f + A_2 g, \quad f \in \mathfrak{D}(A_1), \quad g \in \mathfrak{D}(A_2).$$

LEMMA 4. *If* $\overline{\mathfrak{D}(A_1)} = \mathfrak{H}_1$, $\overline{\mathfrak{D}(A_2)} = \mathfrak{H}_2$, *then* $\overline{\mathfrak{D}(A)} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *and*

$$(A_1 \oplus A_2)^* = A_1^* \oplus A_2^*. \tag{1}$$

LEMMA 5. *If A_1, A_2 are closed operators, then $A_1 \oplus A_2$ is a closed operator.*

Corollary 6. *If A_1, A_2 are N-operators, then $A_1 \oplus A_2$ is an N-operator.*

LEMMA 6. *If H_1, H_2 are Hermitian operators in $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ with deficiency-spaces $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ and $\mathfrak{M}_2^-$, $\mathfrak{M}_2^+$, then $H = H_1 \oplus H_2$ is an Hermitian operator in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ with deficiency-spaces*

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-, \qquad \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+. \tag{2}$$

Corollary 7. *The direct sum of symmetric operators is a symmetric operator.*

---

* Operators with the domain in one Hilbert space and the range in another were considered by Murray (4). We shall below use some of the results of Murray.

LEMMA 7. *There exists a one-to-one correspondence between the class of all linear bounded operators* A *from* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *to* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ *and the class of all matrices* $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$, *where* A_{jk} *is a bounded linear operator from* $\mathfrak{H}_k$ *to* $\mathfrak{H}_j'$ *such that, if* A *and* $\| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *correspond to each other, then*

$$A(f_1+f_2) = (A_{11}f_1 + A_{12}f_2) + (A_{21}f_1 + A_{22}f_2), \quad f_1 \in \mathfrak{H}_1, \quad f_2 \in \mathfrak{H}_2. \tag{3}$$

Proof. Denote by E_j' the projection in $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ onto $\mathfrak{H}_j'$ and put

$$A_{jk}f_k = E_j' A f_k, \quad f_k \in \mathfrak{H}_k; \quad j, k = 1, 2. \tag{4}$$

Then A_{jk} is bounded and satisfies (2). Conversely, if A is given by (3), A is linear and bounded. The one-to-one character of the correspondence $A \sim \| A_{jk} \|_{j,k=1,2}$ is evident.

LEMMA 8. *If* A, B *are bounded linear operators from* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *to* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$, C *a bounded operator from* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ *to* $\mathfrak{H}_1'' \oplus \mathfrak{H}_2''$ *and* α *a scalar, then from*

$$\left.\begin{array}{c} A \sim \| A_{jk} \|_{j,k=1,2}, \quad B \sim \| B_{j,k} \|_{j,k=1,2}, \quad C \sim \| C_{jk} \|_{j,k=1,2}, \\ A^* \sim \| A_{jk}' \|_{j,k=1,2} \end{array}\right\} \tag{5}$$

follows

$$\left.\begin{array}{c} A+B \sim \| A_{jk}+B_{jk} \|_{j,k=1,2}, \quad CA \sim \left\| \sum_{p=1}^{2} C_{jp}A_{pk} \right\|_{j,k=1,2}, \\ \alpha A \sim \| \alpha A_{jk} \|_{j,k=1,2}, \quad A_{jk}' = A_{kj}^*. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Proof. The first 3 relations of (6) follow at once from (3). To prove the last, denote by E_j the projection in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ onto $\mathfrak{H}_j$; then $A_{jk}'f_k' = E_j A^* f_k'$, $f_k' \in \mathfrak{H}_k'$; hence for $f_k \in \mathfrak{H}_k$

$(A_{kj}f_j, f_k') = (E_k' A f_j, f_k') = (A f_j, f_k') = (f_j, A^* f_k') = (f_j, E_j A^* f_k') = (f_j, A_{jk}' f_k')$, i. e., $A_{jk}' = A_{kj}^*$.

Corollary 8. *Let* $\dim(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) = \dim(\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2')$; *the operator* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *maps isometrically* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *onto* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$, *if and only if*

$$\sum_{p=1}^{2} U_{pj}^* U_{pk} = \delta_{jk} \cdot 1 \tag{7}$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{when } j = k, \\ 0 & \text{when } j \neq k \end{cases}$$

$$\sum_{p=1}^{2} U_{jp} U_{kp}^* = \delta_{jk} \cdot 1. \tag{8}$$

Proof. Apply Lemma 8 to the relations $U^*U = 1$, $UU^* = 1$.

THEOREM 10. *Let* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *be an isometric operator mapping* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *onto* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ *and satisfying the following conditions*:

$$U_{jk} f_k = 0, \quad f_k \in \mathfrak{H}_k, \quad j \neq k \quad \text{imply } f_k = 0, \tag{9}$$

$$U_{jk}^* g_j = 0, \quad g_j \in \mathfrak{H}_j', \quad j \neq k \quad \text{imply } g_j = 0. \tag{10}$$

Then

$$\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2', \quad \dim \mathfrak{H}_2 = \dim \mathfrak{H}_1', \tag{11}$$

and

$$\left. \begin{aligned} U_{11} &= W_1 V_2^* B V_2, \quad & U_{12} &= V_1 \sqrt{1 - W^* B^2 W}, \\ U_{21} &= \sqrt{1 - B^2}\, V_2, \quad & U_{22} &= BW, \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

where V_1, V_2 are isometric operators, mapping $\mathfrak{H}_2$ onto $\mathfrak{H}_1'$ and $\mathfrak{H}_1$ onto $\mathfrak{H}_2$ resp., B is a positive self-adjoint operator in $\mathfrak{H}_2'$ satisfying the condition

$$|Bf| < |f|, \quad f \in \mathfrak{H}_2', \quad f \neq 0, \tag{13}$$

*W — a partially isometric * operator such that W^* has the initial set $\overline{B\mathfrak{H}_2'}$ and final set in $\mathfrak{H}_2$; further W_1 is a partially isometric operator with the initial set $\overline{V_2^* B \mathfrak{H}_2'}$ and final set in $\mathfrak{H}_1'$ and such, that the operator*

$$A = V_1^* W_1 V_2^* W \tag{14}$$

commutes with $B' = W^* B W$ and

$$B'(A + 1) = 0. \tag{15}$$

Conversely, if (11) *holds and if V_1, V_2, B, W, W_1 are arbitrary operators satisfying all the conditions described above, then the U_{jk} defined by* (12) *are such that the operator $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ mapps $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ isometrically onto $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$ and satisfies* (9) *and* (10).

Proof. By a theorem of Murray ** we can write

$$U_{22} = BW = WB', \text{ where } B = \sqrt{U_{22} U_{22}^*}, \quad B' = \sqrt{U_{22}^* U_{22}}, \quad B' = W^* B W,$$

where B, W have the meaning described in the theorem. Now the third and the second of the equalities (12) and the condition (13) follow at once from (8) ($j = k = 2$), (7) ($j = k = 2$) and (9), (10); the first of the equations follows from the second and (7) ($j = k = 1$). So we have only to prove, that A satisfies the conditions of the theorem. To this purpose put in (8) $j = k = 1$; we get $U_{11} U_{11}^* + U_{12} U_{12}^* = 1$ or, by (12),

$$W_1 V_2^* B^2 V_2 W_1^* + V_1 (1 - W^* B^2 W) V_1^* = 1.$$

Hence

$$W_1 V_2^* B^2 V_2 W_1^* = V_1 B'^2 V_1^*. \tag{16}$$

Using the equalities

$$W_1^* W_1 V_2^* B = V_2^* B, \quad B' W^* W = W^* W B' = B', \tag{17}$$

we obtain from (16) that $B'^2 W^* V_2 W_1^* V_1 = W^* V_2 W_1^* V_1 B'^2$, i. e., $B'^2 A^* = A^* B'^2$. The last equality implies, that A commutes with B'. Now putting in (7) $j = 2$, $k = 1$, and using (12) we get

$$\sqrt{1 - B'^2}\, V_1^* W_1 V_2^* W B' W^* V_2 + B' W^* \sqrt{1 - B^2}\, V_2 = 0;$$

hence by (17) and (14)

$$\sqrt{1 - B'^2}\, A B' + B' W^* \sqrt{1 - B^2}\, W = 0. \tag{18}$$

---

* About partially isometric operators cf. ([5]), p. 141 — 143 or ([4]), p. 312.

** Cf. ([4]), Theorem 1. 24.

Since WW^* commutes with B, we have

$$(W^*\sqrt{1-B^2}W)^2 = W^*WW^*(1-B^2)W = W^*WW^*(1-WB'^2W^*)W = \\ = W^*W(1-B'^2) = (W^*W\sqrt{1-B'^2})^2.$$

Thus

$$W^*\sqrt{1-B^2}W = W^*W\sqrt{1-B'^2}, \tag{19}$$

and by (17) we obtain from (18) that $\sqrt{1-B'^2}\,AB' + B'\sqrt{1-B'^2} = 0$, i. e.,

$$\sqrt{1-B'^2}\,B'(A+1) = 0. \tag{20}$$

(15) follows now from (20) and (9). Conversely, using (12), (17), (19), (15) and the relations $A^*B' = B'A^* = -B'$, $B'AA^* = B'$, following from (15), we easily deduce (7), (8) and (9), (10).

Corollary 9. *Let* $\dim \mathfrak{H}_1 = \dim \mathfrak{H}_2'$, $\dim \mathfrak{H}_2 = \dim \mathfrak{H}_1'$ *and let* C *be an arbitrary bounded linear operator from* $\mathfrak{H}_2$ *to* $\mathfrak{H}_2'$ *satisfying the condition* $|Cf| < |f|$, *when* $f \neq 0$, $f \in \mathfrak{H}_2$. *Then there exists an infinite set of isometric operators* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *mapping* $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *onto* $\mathfrak{H}_1' \oplus \mathfrak{H}_2'$, *satisfying* (9), (10) *and such, that* $U_{22} = C$.

Proof. By Theorem 10 we have only to show: if B, W, V_1, V_2 satisfying the conditions of Theorem 10 are given, we can choose W_1 in such a manner that A commutes with B' and satisfies (15). But to this purpose we have only to put $W_1 = -V_1 W V_2$.

§ 5. Self-adjoint extensions of a given symmetric operator

THEOREM 11. *Let* H_1 *be a closed symmetric operator in* $\mathfrak{H}_1$ *and* H *a self-adjoint operator in* $\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}_1$, *which is an extension of* H_1; *put* $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ *and denote by* H_2 *the operator defined in* $\mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{D}(H)\mathfrak{H}_2$ *by* $H_2 f = Hf$, $f \in \mathfrak{D}(H_2)$. *Then* H_2 *is a closed Hermitian operator in* $\mathfrak{H}_2$. *Let* $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$, $\mathfrak{M}_2^-$, $\mathfrak{M}_2^+$ *be the deficiency-spaces of* H_1, H_2; *then* $\mathfrak{D}(H)$ *consists of all elements* $f \in \mathfrak{H}$ *which are representable in the form*

$$f = (f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) + (f_2 - \varphi_2 + U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2), \tag{1}$$

where

$$f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-, \tag{2}$$

and $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *is an isometric operator mapping* $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ *onto* $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ *and satisfying the following conditions:*

$$f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0 \quad \text{implies } f_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0, \tag{3}$$

$$f_2 - \varphi_2 + U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2 = 0 \quad \text{implies } f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0. \tag{4}$$

Moreover

$$Hf = [H_1 f_1 + i\varphi_1 + i(U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2)] + [H_2 f_2 + i\varphi_2 + i(U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2)]. \tag{5}$$

Let conversely H_2 *be an arbitrary closed Hermitian operator in a Hilbert space* $\mathfrak{H}_2$ *for which an isometric operator* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *map-*

ping $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ *onto* $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ *and satisfying* (3) *and* (4) *exists. Then the operator* H *in* $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *defined for all elements* f *of the form* (1) *by* (5) *is a self-adjoint extension of* H_1; *moreover,* $\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{D}(H_2)$ *and* $H_2 f = Hf$ *for* $f \in \mathfrak{D}(H_2)$.

Proof. It follows from (6) § 1 applied to $A = H$, $A_1 = H_1$, that H_2 is an operator in $\mathfrak{H}_2$; H_2 is obviously Hermitian and closed. Put $H_0 = H_1 \oplus H_2$; then H_0 is closed and Hermitian in $\mathfrak{H}$ (cf. Lemmas 5, 6) with the deficiency-spaces

$$\mathfrak{M}^- = \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-, \quad \mathfrak{M}^+ = \mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+ \tag{6}$$

and $H \supset H_0$. Hence (1) and (5) follow from Lemmas 3 § 3, 7 § 4, (6) and the definition of H_0. Since $\mathfrak{D}(H_1)$, $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ are independent, $f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0$ implies $f_1 = 0$, $\varphi_1 = 0$, $U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0$. Hence

$$f = f_2 - \varphi_2 + U_{22}\varphi_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad h_2 = -\varphi_2 + U_{22}\varphi_2 \in \mathfrak{D}(H_2)$$

and $H_2 h_2 = H h_2 = i\varphi_2 + iU_{22}\varphi_2$. Thus $H_2 h_2 - ih_2 = 2i\varphi_2$; since $\mathfrak{R}(H_2 - i1) \perp \mathfrak{M}_2^-$, this implies $\varphi_2 = 0$. If

$$f_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0, \tag{7}$$

then $f \in \mathfrak{H}_1$; thus $f_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = f \in \mathfrak{D}(H_1)$ and therefore $f = f_1$, $\varphi_1 = 0$, $U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 = 0$. Moreover, $Hf = H_1 f_1 \in \mathfrak{H}_1$; in virtue of (5) this means

$$H_2 f_2 + i\varphi_2 + iU_{22}\varphi_2 = 0. \tag{8}$$

From (8) and (7) we deduce $H_2 f_2 - if_2 + 2i\varphi_2 = 0$ and therefore $\varphi_2 = 0$, $f_2 = 0$.

Conversely, let H_2 be a closed Hermitian operator in $\mathfrak{H}_2$ such that $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ satisfying the conditions of Theorem 11 exists. By Lemma 3 § 3, (1) and (5) define a self-adjoint operator H in $\mathfrak{H}$, if

$$U_{H_0}\varphi_0 + U\varphi = \varphi_0 + \varphi, \ \varphi_0 \in \mathfrak{R}(\dot{H}_0 - i1), \ \varphi \in \mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^- \tag{9}$$

implies $\varphi_0 = \varphi = 0$. By the definition of φ_0, φ we have

$$\varphi_0 = (H_1 - i1) f_1 + (H_2 - i1) f_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2,$$
$$f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^-.$$

Hence (9) implies

$$2if_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = -[2if_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2)]$$

and therefore $2if_1 - \varphi_1 + (U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) = 0$, $2if_2 - \varphi_2 + (U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2) = 0$. Conditions (3), (4) give now $f_1 = \varphi_1 = \varphi_2 = f_2 = 0$, $\varphi_0 = \varphi = 0$. Hence H is self-adjoint. From (3), (4) we deduce also that H is an extension of H_1 and $H = H_2$ on $\mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{H}_2 \mathfrak{D}(H)$.

Below we preserve all the notations of Theorem 11.

Corollary 10. *If* H *is a self-adjoint extension of* H_1 *and* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ *is an operator associated with* H, *as in Theorem 11, then* U_{jk} *satisfy* (9) *and* (10) *of* § 4, $\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^+$, $\dim \mathfrak{M}_2^- = \dim \mathfrak{M}_1^+$ *and the ranges of* U_{jk}, U_{jk}^* *are dense in* $\mathfrak{M}_j^+$, $\mathfrak{M}_k^-$ *respectively.*

Proof. From (3) and (4) it follows that U_{jk} satisfy (9) § 4. Using t e remark on p. 94 and Lemma 8 we obtain (10) § 4. The last assertions follow now from (9), (10) § 4 and Theorem 10 § 4.

Definition 7. If a closed Hermitian operator H_2 in $\mathfrak{H}_2$ and the operator $U \sim \|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ are connected with an extension H of H_1 as in Theorem 11, then H_2 and U will be said to define H.

Definition 8. A self-adjoint extension H of H_1 will be called regular, if $\overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \overline{\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_2} = \mathfrak{H}_2$ and non-regular in the contrary case; H will be called degenerate, if $\mathfrak{D}(H_2) = (0)$.

Definition 9. A self-adjoint extension H of H_1 will be called α-dimensional, if $\dim \mathfrak{H}_2 = \alpha$.

THEOREM 12. *If at least one of the deficiency-spaces of H_1 is finite-dimensional, then every self-adjoint extension of H_1 is regular.*

Proof. Assume $\mathfrak{M}_1^-$ is finite-dimensional. Then by Corollary 10

$$U_{21}\mathfrak{M}_1^- = \overline{U_{21}\mathfrak{M}_1^-} = \mathfrak{M}_2^+. \tag{10}$$

If $f_2 - \varphi_2 + \psi_2 = 0$, we can find by (10) an element $\varphi_1 \in \mathfrak{M}_1^-$ satisfying $U_{21}\varphi_1 = \psi_2 - U_{22}\varphi_2$; thus, by (4), $f_2 = \varphi_2 = \psi_2 = 0$. So $\mathfrak{D}(H_2)$, $\mathfrak{M}_2^-$, $\mathfrak{M}_2^+$ are independent and therefore $\overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \mathfrak{H}_2$ by Theorem 8 § 3.

Corollary 11. *A closed symmetric but not self-adjoint operator has no finite-dimensional extensions.*

Proof. If $\mathfrak{H}_2$ is finite-dimensional, then so are $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ (cf. Corollary 10). Thus H is regular and $\mathfrak{D}(H_2) = \overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \mathfrak{H}_2$, i. e., H_2 is self-adjoint. By Theorem 4 § 2, $\mathfrak{H}_2$ and therefore $\mathfrak{H}_1$ reduce H; hence H_1 is self-adjoint.

THEOREM 13. *Every regular extension H of H_1 is defined by a closed symmetric operator H_2 in $\mathfrak{H}_2$ and an isometric operator $U \sim \|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ satisfying the conditions*

$$\dim \mathfrak{M}_1^- = \dim \mathfrak{M}_2^+, \ \dim \mathfrak{M}_2^- = \dim \mathfrak{M}_2^+ \tag{11}$$

and (9), (10) *of* § 4. *Conversely, any closed symmetric H_2 and isometric U satisfying* (11) *and* (9), (10) *of* § 4 *define a regular extension of H_1.*

Proof. The first assertion follows from Corollary 10. To prove the second we observe that $\overline{\mathfrak{D}(H_2)} = \mathfrak{H}_2$ and (9), (10) of § 4 imply (3), (4).

Theorems 13 and 10 describe all regular extensions of H_1, and therefore all extensions of H_1, if at least one of the deficiency-spaces of H_1 is finite-dimensional.

THEOREM 14. *A closed Hermitian operator H_2 and an isometric operator $U \sim \|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ from $\mathfrak{M}_1^- \oplus \mathfrak{M}_2^-$ to $\mathfrak{M}_1^+ \oplus \mathfrak{M}_2^+$ define a self-adjoint extension of H_1, if and only if* (11) *holds and the U_{jk} are given by* (12) § 4, *where V_1, V_2, B, W, W_1 satisfy all the conditions of Theorem* 10 § 4 *(with $\mathfrak{M}_j^-$, $\mathfrak{M}_k^+$ instead of $\mathfrak{H}_j$, $\mathfrak{H}'_k$) and the additional conditions*:

$$(1-W)\varphi_2 = 0, \ \varphi_2 \in \mathfrak{M}_2^- \ \textit{imply} \ \varphi_2 = 0, \tag{12}$$

$$(1-W)\mathfrak{M}_2^- \cdot (\mathfrak{D}(H_2) + \sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+) = (0). \tag{13}$$

Proof. If H_2 and U define an extension of H_1, then all their properties except (12) and (13) follow from Corollary 10 and Theorem 10 § 4. If $(1-W)\varphi_2=0$, put $f_2=0$, $\varphi_1=V_2^{-1}(\sqrt{1+B})^{-1}\sqrt{1-B}\,W\varphi_2$. Then $f_2-\varphi_2+(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2)=0$ and $\varphi_2=0$ by (4). If

$$h\in(1-W)\mathfrak{M}_2^-\cdot(\mathfrak{D}(H_2)+\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+),$$

then

$$h=(1-W)\varphi_2=f_2+\sqrt{1-B}\,\psi_2,\ f_2\in\mathfrak{D}(H_2),\ \varphi_2\in\mathfrak{M}_2^-,\ \psi_2\in\mathfrak{M}_2^+.$$

Hence, if we put $\varphi_1=V_2^{-1}(\sqrt{1+B})^{-1}(\psi_2+\sqrt{1-B}W\varphi_2)$, we get $f_2-\varphi_2+U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2=0$. Thus $\varphi_2=0$, $h_2=0$.

Let now U and H_2 satisfy the conditions of Theorem 14. By Theorems 10, 11 we have only to prove that (3) and (4) are satisfied. Condition (3) follows at once from (9) § 4 and the linear independence of $\mathfrak{D}(H_1),\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$. If, further, $f_2-\varphi_2+(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2)=0$, then

$$(1-W)\varphi_2=f_2+\sqrt{1-B}\,(\sqrt{1+B}V_2\varphi_1-\sqrt{1-B}\,W\varphi_2).$$

Thus by (12) and 13 we obtain: $(1-W)\varphi_2=0$, $\varphi_2=0$. Hence $f_2+U_{21}\varphi_1=0$, $f_2=0$, $U_{21}\varphi_1=0$, $\varphi_1=0$ [cf. Theorem 7 § 3 and Theorem 10 (9) § 4].

THEOREM 15. *Let H_1 be an arbitrary closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$ with the deficiency-index $(\mathfrak{m},\mathfrak{n})$ where $\mathfrak{m},\mathfrak{n}$ are infinite cardinal numbers, and H_2 an arbitrary Hermitian operator in $\mathfrak{H}_2$ with the deficiency-index $(\mathfrak{n},\mathfrak{m})$. Then there exists an infinite set of isometric operators $U\sim\|U_{jk}\|_{j,\,k=1,\,2}$ mapping $\mathfrak{M}_1^-\oplus\mathfrak{M}_2^-$ onto $\mathfrak{M}_1^+\oplus\mathfrak{M}_2^+$ and such that H_2 and U define a self-adjoint extension of H_1.*

Proof. By Theorem 14 and Corollary 9 § 4 we have to prove that for any H_2 with the deficiency-index $(\mathfrak{n},\mathfrak{m})$, B and W can be chosen to satisfy the conditions of Theorem 10 and (12), (13). Let X be the isometric operator with the domain $\mathfrak{P}^-=\mathfrak{M}_2^-(\mathfrak{D}(H_2)+\mathfrak{M}_2^+)$ and the range $\mathfrak{P}^+=\mathfrak{M}_2^+(\mathfrak{D}(H_2)+\mathfrak{M}_2^-)$ associated with H_2 as in Theorem 9 § 3. Put $\mathfrak{Q}^-=\mathfrak{M}_2^-\ominus\mathfrak{P}^-$, $\mathfrak{Q}^+=\mathfrak{M}_2^+\ominus\mathfrak{P}^+$. We may assume $\dim\mathfrak{Q}^+\leqslant\dim\mathfrak{Q}^-$. Let $\mathfrak{R}$ be a closed subspace in $\mathfrak{Q}^-$ such, that $\dim\mathfrak{R}=\dim\mathfrak{Q}^+$; we can extend X to an isometric operator X'' mapping $\overline{\mathfrak{P}}^-\oplus\mathfrak{R}$ onto $\mathfrak{M}_2^+$.

Let now B be a positive self-adjoint operator in $\mathfrak{M}_2^+$ satisfying

$$0<|B\psi_2|<|\psi_2|\ \text{for}\ \psi_2\in\mathfrak{M}_2^+,\ \psi_2\neq 0 \tag{14}$$

and

$$\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+\neq\mathfrak{M}_2^+. \tag{15}$$

By a theorem of J. v. Neumann * there exists a self-adjoint operator C in $\mathfrak{M}_2^+$ such that

$$\mathfrak{D}(C)\sqrt{1-B}\,\mathfrak{M}_2^+=(0). \tag{16}$$

Let Y be the Cayley-transform of C. We put

$$\left.\begin{aligned} W&=YX''\ \text{on}\ \overline{\mathfrak{P}}^-\oplus\mathfrak{R},\\ W&=0\quad\ \text{on}\ \mathfrak{Q}^-\ominus\mathfrak{R}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

* Cf. ([6]), Theorem 18.

Using Theorem 9, Lemma 1 § 3, and (17) we easily deduce that B, W satisfy (12) and (13).

Corollary 12. *A closed symmetric operator has non-regular self-adjoint extensions, if and only if its deficiency-spaces are both infinite-dimensional.*

Corollary 13. *A closed symmetric operator H_1 has degenerate extensions, if and only if its deficiency-index has the form $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m})$ where $\mathfrak{m}$ is an infinite cardinal number.*

§ 6. Spectral resolutions of a symmetric operator

THEOREM 16. *Let H_1 be an arbitrary closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$. Then there exists a family of bounded self-adjoint operators $E_1(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ in $\mathfrak{H}_1$ satisfying the following conditions *:*

1° *for $\lambda_2 \geqslant \lambda_1$ the operator $E_1(\Delta) = E_1(\lambda_2) - E_1(\lambda_1)$ is positive;*

2° $E_1(\lambda) \to 0$ *for* $\lambda \to -\infty$, $E_1(\lambda) \to 1$ *for* $\lambda \to +\infty$;

3° $E_1(\lambda - \varepsilon) \to E_1(\lambda)$ *for* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$;

4° *for every element $f \in \mathfrak{H}_1$ and every finite interval $\Delta = (\lambda_1, \lambda_2)$ $(\lambda_1 < \lambda_2)$ $E_1(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H_1^*)$ and*

$$H_1^* E_1(\Delta) f = \int_\Delta \lambda \, dE_1(\lambda) f; \tag{1}$$

5° $f \in \mathfrak{D}(H_2)$ *if and only if* $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \, d(E_1(\lambda) f, f)$ *converges; moreover,*

$$Hf = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_1(\lambda) f. \tag{2}$$

If H_1 is maximal and π is the half-plane of non-real characteristic values of H_1^*, then for $\lambda \in \pi$

6° $\quad (H_1 - \lambda 1)^{-1} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_1(\mu) f}{\mu - \lambda}, \qquad (H_1^* - \bar{\lambda} 1)^{-1} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE_1(\mu) f}{\mu - \bar{\lambda}}.$

In this case 1° — 4° define $E_1(\lambda)$ uniquely and the convergence of $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E_1(\lambda) f, f)$ is the necessary and sufficient condition for the convergence of $\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \, dE_1(\lambda) f$.

Proof. Let H in $\mathfrak{H}$ be an extension of H_1, $E(\lambda)$ the spectral resolution of H and E_1 — the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1$. Put for $f \in \mathfrak{H}_1$ $E_1(\lambda) f = E_1 E(\lambda) f$. In virtue of

$$(E_1(\Delta) f, f) = (E_1 E(\Delta) f, f) = (E(\Delta) f, E_1 f) = (E(\Delta) f, f);$$

1° — 5° follow from the similar properties of $E(\lambda)$ and Theorem 1 (5) **.

---

* The limits are here meant in the sense of the strong convergence on every element of $\mathfrak{H}_1$.

** The question on the connection betweeen the $E_1(\lambda)$ constructed here and those of Carleman [2] will be discussed in a paper now being prepared to be published in one of the next numbers of this journal (Added in proof).

If H_1 is maximal, then 6° follows from 1° — 4°; hence 1° — 4° determine $E_1(\lambda)$ uniquely. The last assertion is an obvious consequence of the maximality of H_1.

Corollary 14 *. *Let H_1 be an arbitrary symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$. Then there exists a sequence of bounded self-adjoint operators $H^{(n)}$ in $\mathfrak{H}_1$ such that for every $f \in \mathfrak{D}(H_2)$ $H_1 f = \lim_{n\to\infty} H^{(n)} f$.*

Proof. We may assume H_1 to be closed. Then put $H^{(n)} = \int_{-n}^{n} \lambda \, dE_1(\lambda)$, where $E_1(\lambda)$ is any of the families constructed in theorem 16.

Appendix

We show here that we cannot put $\lambda = 0$ in Corollary 1 (cf. the remark on p. 92).

LEMMA 9. *If H_1 is an arbitrary closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$ with infinite-dimensional deficiency-spaces, then there exist (even regular) self-adjoint extensions of H_1 such that $\tilde{B}_1 \neq B_1$.*

Proof. Apply theorem 10 § 4 to the operator U of Theorem 12 § 5. We can write $U_{11} = BW$, $U_{12} = \sqrt{1 - B^2}\, V_2$, $U_{21} = V_1 \sqrt{1 - W^* BW}$, $U_{22} = W_1 V_2^* B V_2$, but have then to replace in Theorem 10 § 4 $\mathfrak{H}_1$ by $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_1'$ by $\mathfrak{H}_2'$ and vice versa. If we now choose B such that $\sqrt{1 - B^2}\, \mathfrak{M}_1^+ \neq \mathfrak{M}_1^+$, then ψ_1 satisfying the conditions $\psi_1 \in \mathfrak{M}_1^+$, $\psi_1 \bar{\in} \sqrt{1 - B^2}\, \mathfrak{M}_1^+$ is in $\mathfrak{D}(H_1^*)$ but not in $\mathfrak{D}(B_1)$. So, the Lemma is proved.

Now we construct a symmetric operator H_1 with infinite-dimensional deficiency-spaces and $\mathfrak{N}_0 = (0)$.

The elementary symmetric operator considered in the example of § 2 has evidently the deficiency-index (0, 1) and $\mathfrak{N}_0 = (0)$. We denote this operator by H_0. Let $\mathfrak{H}_1$ be an arbitrary infinite-dimensional Hilbert space. Decompose $\mathfrak{H}_1$ in a direct sum of mutually orthogonal separable subspaces $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ and construct in each an operator $H^{(\alpha)}$ isometric to H_0 or to $-H_0$, such that there should be infinitely many $H^{(\alpha)}$ isometric to H_0 and infinitely many isometric to $-H_0$. Then the $H^{(\alpha)}$ determine a symmetric operator H_1 in $\mathfrak{H}_1$ with the desired properties. By Lemma 9, $\tilde{B}_1 \neq B_1$ for some extension of H_1. On the other hand, if we could put $\lambda = 0$ in Corollary 1, we should have $\tilde{B}_1 = B_1$, since $\mathfrak{N}_0 = (0)$.

---

* This fact was proved by M. H. Stone ([10]) for the case, when $\mathfrak{H}_1$ is separable.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 105—112 Série mathématique

Посвящается памяти
В. И. Гливенко

А. Л. БРУДНО*

О ФУНКЦИЯХ, РАВНОМЕРНО НЕПРЕРЫВНЫХ НА B-МНОЖЕСТВАХ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье рассматривается строение функций, получаемых последовательно трансфинитным применением операции Г lim к функциям, непрерывным на сегменте [0, 1], и в частности их распределение по классам Бэра.

Рассматривая неявные функции, определенные посредством непрерывных, В. И. Гливенко (1) ввел операцию, которая ставит в соответствие последовательности функций $f_n(x)$ функцию $f(x)$, если для каждого x_1 найдется такое n_1; что $f_n(x_1)=f(x_1)$ при всех $n \geqslant n_1$. В дальнейшем эта операция будет обозначаться символом $\Gamma \lim\limits_{n\to\infty}$.

В указанной работе подробно рассмотрено множество функций, к которым Г-сходятся последовательности непрерывных. В настоящей статье рассматривается строение функций, получаемых последовательно трансфинитным применением операции Г lim к функциям, непрерывным на $[0,1]$.

Напомним классификацию Хаусдорфа борелевских множеств, сдвинув ее на единицу для лучшего совпадения с номерами классов функций, так что:

N^1 — замкнутые множества:

M^1 — открытые множества;

N^2 — пересечения счетного числа открытых множеств, т. е. G_δ;

M^2 — суммы счетного числа замкнутых множеств, т. е. F_σ.

Пусть определены N^β и M^β для всех трансфинитных чисел $\beta<\alpha$; тогда N^α — пересечения счетного числа M^β, а M^α — суммы счетного числа N^β. Вообще множество класса α, т. е. N^α или M^α, будем обозначать B^α.

Если $f^\alpha(x)$ — функция α класса Бэра, то, каково бы ни было y,

$$E[f^\alpha(x)\geqslant y]=N^{\alpha+1};\ E[f^\alpha(x)>y]=M^{\alpha+1} \text{ и } E[f^\alpha(x)=y]=N^{\alpha+1}.$$

§ 1. Классификация

Отнесем к нулевому классу множество всех функций, определенных на сегменте $[0, 1]$ и непрерывных на нем. Пусть определены функции всех классов $\beta<\alpha$; тогда функции класса α (обозначим их $f^\alpha_-(x)$) суть

функции, к которым Г-сходятся последовательности функций уже определенных классов.

Сумма или произведение конечного числа функций класса α всегда есть функция класса α. Докажем это для произведения двух функций: произведение непрерывных функций непрерывно, следовательно, для $\alpha=0$ теорема верна; пусть она верна для всех $\beta<\alpha$ и пусть $f^{\alpha}(x)=\Gamma\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{\beta}(x)$ и $g^{\alpha}(x)=\Gamma\lim\limits_{n\to\infty} g_n^{\beta}(x)$. Каково бы ни было x_1, найдется такое n_1, что $f_n^{\beta}(x_1)=f^{\alpha}(x_1)$, коль скоро $n\geqslant n_1$, и такое n_2, что $g_n^{\beta}(x_1)=g^{\alpha}(x_1)$, коль скоро $n\geqslant n_2$. Тогда при $n\geqslant \max[n_1, n_2]$ $f_n^{\beta}(x_1)\cdot g_n^{\beta}(x_1)=f^{\alpha}(x_1)\cdot g^{\alpha}(x_1)$, и следовательно $\Gamma\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{\beta}(x)\cdot g_n^{\beta}(x)=f^{\alpha}(x)\cdot g^{\alpha}(x)$. Но по предположению индукции $f_n^{\beta}(x)\cdot g_n^{\beta}(x)$ имеет класс $\beta<\alpha$. Утверждение доказано.

ТЕОРЕМА I. *Если $f^{\alpha}(x)$ — функция класса α, то сегмент $[0,1]$ представим в виде суммы счетного числа множеств N^{α}, на каждом из которых $f^{\alpha}(x)$ равномерно непрерывна.*

Доказательство. Пусть при $\alpha=1$ имеем $f^{1}(x)=\Gamma\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, где $f_n(x)$ непрерывны на $[0, 1]$.

Обозначим $E_n=E[f_n(x)=f_{n+1}(x)=\ldots]=\prod\limits_{i=1}^{\infty}E[f_n(x)=f_{n+i}(x)]$. Так как $E[f_n(x)=f_{n+i}(x)]$ замкнуто, то и E_n замкнуто, т. е. каждое E_n есть N_n^1. Для всякого $x_1\in[0,1]$ найдется такое $n(x_1)$, что $x_1\in E_{n(x_1)}$. Таким образом $[0,1]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}E_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}N_n^1$, на каждом из которых соответственно $f^{1}(x)=f_n(x)$.

Далее, пусть $f^{\alpha}(x)=\Gamma\lim\limits_{n\to\infty} f_n^{\beta}(x)$, где $\beta<\alpha$, и пусть для $\beta<\alpha$ теорема верна. Обозначим

$$E_n=E[f_n^{\beta}(x)=f_{n+1}^{\beta}(x)=\ldots]=\prod_{i=1}^{\infty}E[f_n^{\beta}(x)-f_{n+i}^{\beta}(x)=0].$$

Так как разность $f_n^{\beta}(x)-f_{n+i}^{\beta}(x)$ входит в класс $<\alpha$, то и ее класс Бэра $<\alpha$. Таким образом $E[f_n^{\beta}(x)-f_{n+i}^{\beta}(x)=0]=N^{\alpha}$ и пересечение их $E_n=N_n^{\alpha}$. Следовательно $[0,1]=\sum\limits_{n=1}^{\infty}N_n^{\alpha}$, на каждом из которых $f^{\alpha}(x)$ совпадает соответственно с $f_n^{\beta}(x)$; но для $f_n^{\beta}(x)$ теорема верна и $[0,1]=\sum\limits_{m=1}^{\infty}N_{nm}^{\beta}$, на каждом из которых $f_n^{\beta}(x)$ равномерно непрерывна.

Тогда $N_n^\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} N_n^\alpha N_{nm}^\beta = \sum_{m=1}^{\infty} N_{nm}^\alpha$, на каждом из которых $f^\alpha(x)$ совпадает с $f_n^\beta(x)$, а $f_n^\beta(x)$ равномерно непрерывна, и следовательно $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} N_{nm}^\alpha$, на каждом из которых $f^\alpha(x)$ равномерно непрерывна.

ЛЕММА. *Пусть $B_1^\alpha, B_2^\alpha, \ldots, B_n^\alpha, \ldots$ — произвольные множества класса α. Можно подобрать такие ${}^*B_1^\alpha, {}^*B_2^\alpha, \ldots, {}^*B_k^\alpha, \ldots$, что для всякого k найдется такое n, что ${}^*B_k^\alpha \subseteq B_n^\alpha$, ${}^*B_i^\alpha \cdot {}^*B_j^\alpha = 0$ при всех $i \neq j$ и $\sum_{n=1}^{\infty} B_n^\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} {}^*B_k^\alpha$. Если $\alpha > 1$, то сверх того все ${}^*B_n^\alpha = N^\alpha$.*

Применяя лемму к предыдущей теореме, можно сформулировать ее так: 1° при $\alpha > 1$, $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^\alpha$, где N_n^α попарно не пересекаются и на каждом из них $f^\alpha(x)$ равномерно непрерывна; 2° при $\alpha = 1$ $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^\alpha$, где B_n^α попарно не пересекаются и на каждом из них $f^1(x)$ равномерно непрерывна.

ТЕОРЕМА II. *Если для $f(x)$ сегмент $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^\alpha$, на каждом из которых она равномерно непрерывна, то $f(x)$ входит в класс α.*

Доказательство для $\alpha = 1$. Благодаря лемме, можно предполагать, что $[0, 1]$ распадается на счетное число попарно непересекающихся замкнутых множеств и интервалов $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, на каждом из которых $f(x)$ совпадает (соответственно) с непрерывными на $[0, 1]$ функциями $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ Пусть минимальное расстояние между парами замкнутых множеств, встречающихся среди $L_1, L_2, \ldots, L_n$, равно $3\delta(n)$. Определим $\varphi_n(x)$ следующим образом. На множестве точек, расстояние которых от замкнутого множества L_i $(i \leqslant n)$ не превосходит $\min\left[\delta; \frac{1}{3n}\right]$ (это конечное число сегментов), положим $\varphi_n(x) = f_i(x)$. Затем выберем внутри интервалов, встречающихся среди $L_1, L_2, \ldots, L_n$, сегменты, концы которых отстоят от концов интервалов, их заключающих, на расстояние $\frac{1}{2n}$, и положим на каждом из этих сегментов $\varphi_n(x)$ равной соответствующей $f_i(x)$. Таким образом $\varphi_n(x)$ определена на конечном числе сегментов, отстоящих друг от друга на расстояние $\geqslant \frac{1}{2n}$, причем на каждом из них она непрерывна. Доопределив $\varphi_n(x)$, линейной интерполяцией получим непрерывную на $[0, 1]$ функцию. Для всякого $x_1 \in [0, 1]$ найдется одно и только одно m такое, что $x_1 \in L_m$; если L_m замкнуто, то $\varphi_n(x_1) = f(x_1)$ при всех $n \geqslant m$; если же это множество есть интервал и расстояние x_1 до ближайшего конца

его $\geqslant \frac{1}{k}$, то $\varphi_n(x_1) = f(x_1)$ при $n \geqslant \max[m, k]$. Таким образом последовательность непрерывных функций $\varphi_n(x)$ Г-сходится к $f(x)$.

Доказательство для $\alpha > 1$. Предположим, что для всех $\beta < \alpha$ теорема верна.

1° Если $B_n^\alpha = M^\alpha$, то, так как $M^\alpha = \sum N^\beta$, можно считать $B_n^\alpha = N^\alpha$.

2° $B_n^\alpha = N^\alpha = \prod_{i=1}^{\infty} M_{ni}^\beta = \prod_{i=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{i} M_{nj}^\beta$. В силу второго равенства можно предполагать $M_{n,i+1}^\beta \subseteq M_{ni}^\beta$ при всех n и i.

Определим

$$\varphi_m(x) = \mathrm{X}(M_{1m}^\beta) f_1(x) + \mathrm{X}(CM_{1m}^\beta)\,\mathrm{X}(M_{2m}^\beta) f_2(x) + \ldots$$
$$\ldots + \mathrm{X}(CM_{1m}^\beta) \ldots \mathrm{X}(CM_{m-1,m}^\beta)\,\mathrm{X}(M_{mm}^\beta) f_m(x),$$

где $f_i(x)$ — непрерывные на $[0, 1]$ функции, с которыми совпадает $f(x)$ на соответствующих B_i^α, и $\mathrm{X}(B)$ — характеристическая функция стоящего в скобках множества.

Произведение и сумма конечного числа функций класса $< \alpha$ входит в класс $< \alpha$. Следовательно, $\varphi_m(x)$ относится к классу $< \alpha$.

Пусть $x_1 \in [0, 1]$; тогда он входит в некоторые B_n^α; пусть k — наименьший индекс, для которого $x_1 \in B_k^\alpha$.

I. При всех i, $x_1 \in M_{ki}^\beta$, следовательно $\mathrm{X}(CM_{ki}^\beta)|_{x=x_1} = 0$ и коэффициент у $f_g(x_1)$ при $g > k$ равен нулю.

II. При $n = 1, 2, \ldots, k-1$, $x_1 \notin B_n^\alpha$; для каждого n найдется такое i, что $x_1 \notin M_{ni}^\beta$. Обозначим наибольшее из них через $i_{\max}$. Так как $M_{n,i+1}^\beta \subseteq M_{ni}^\beta$, то для $n < k$ и $m > i_{\max}$ $x_1 \notin M_{nm}^\beta$; следовательно, при $m > i_{\max}$ коэффициент у $f_n(x)$ равен нулю.

III. Так как $x_1 \in CM_{nm}^\beta$ при $n < k$ и $m > i_{\max}$, и $x_1 \in M_{km}^\beta$ при всех m, то при $m > i_{\max}$ коэффициент у $f_k(x_1)$ равен единице.

Таким образом, каково бы ни было $x_1 \in [0, 1]$, найдется такое $m(x_1) = i_{\max}$, что при $m \geqslant m(x_1)$ $\varphi_m(x_1) = f(x_1)$. Следовательно, $\varphi_m(x)$ Г-сходятся к $f(x)$, и $f(x)$ входит в класс α.

Комбинируя различные формулировки теорем I и II, можно и необходимому и достаточному условию дать четыре близких формулировки: $f(x)$ есть $f^{\alpha}_{-}(x)$ тогда и только тогда, когда сегмент $[0, 1]$ распадается на счетное число множеств:

или 1) N^α,
или 2) B^α,
или 3) попарно непересекающихся B^α,
или 4) при $\alpha \geqslant 2$ попарно непересекающихся N^α,

} на каждом из которых $f(x)$ равномерно непрерывна.

Замечание. Пусть для $f_-^{\alpha}(x)$ согласно необходимому условию $[0, 1]$ распадается на счетное число множеств N_n^{α}, на каждом из которых она совпадает с $f_n(x)$, непрерывной на $[0, 1]$. Тогда

$$E[f_-^{\alpha}(x) \geqslant y] = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{\alpha} E[f_n(x) \geqslant y] = M^{\alpha+1},$$

$$E[f_-^{\alpha}(x) = y] = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{\alpha} E[f_n(x) = y] = M^{\alpha+1},$$

$$E[f_-^{\alpha}(x) > y] = E[f_-^{\alpha}(x) \geqslant y] \cdot CE[f_-^{\alpha}(x) = y] = N^{\alpha+1},$$

и так как $f_-^{\alpha}(x)$ входит в α класс Бэра, то одновременно $E[f_-^{\alpha}(x) \geqslant y] = N^{\alpha+1}$; $E[f_-^{\alpha}(x) = y] = N^{\alpha+1}$; $E[f_-^{\alpha}(x) > y] = M^{\alpha+1}$.

§ 2. Связь с классификацией Бэра

Так как рассматриваемая операция есть частный случай сходимости, то всякая функция строгого класса α входит в строгий класс Бэра с индексом, не превосходящим α. Обратное неверно: уже в первом классе Бэра П. С. Новиков указал функцию, для которой $[0,1]$ не может быть представлен в виде счетного числа множеств, на каждом из которых она непрерывна. Такая функция заведомо не попадает в построенную нами классификацию.

ТЕОРЕМА III. *Функция строгого α класса Бэра попадает:*
или в строгий класс α,
или в строгий класс $\alpha+1$,
или не попадает ни в один класс,
причем для каждого α $(0 < \alpha < \Omega)$ реализуются все три возможности.

Доказательство. Если $f^{\alpha}(x)$ входит в некоторый класс, то, согласно необходимому условию (теорема I), $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, на каждом из которых $f^{\alpha}(x)$ равномерно непрерывна, т. е. совпадает на каждом из них с соответствующей непрерывной $f_n(x)$, так что $P_n \subseteq E[f^{\alpha}(x) - f_n(x) = 0] = N_n^{\alpha+1}$, ибо $f^{\alpha}(x) - f_n(x)$ находится в α-классе Бэра. Следовательно $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^{\alpha+1}$, на каждом из которых $f^{\alpha}(x)$ равномерно непрерывна. В силу достаточности условия (теорема II) $f^{\alpha}(x)$ входит в класс $\alpha+1$, чем доказывается первая часть теоремы.

Характеристическая функция множества N_*^{α}, не являющегося в то же время M^{α}, попадает в строгий класс α и одновременно в строгий α класс Бэра. В класс α, а значит и α класс Бэра она попадает в силу условия достаточности. В класс Бэра с индексом $\beta < \alpha$ она попасть не может, так как $E\left[f^{\beta}(x) > \frac{1}{2}\right] = M^{\beta+1}$, где $\beta+1 \leqslant \alpha$, а $E\left[\mathrm{X}(N_*^{\alpha}) > \frac{1}{2}\right] = N_*^{\alpha}$ и по условию не может быть M^{α}. Существование таких N_*^{α} при

всех $\alpha < \Omega$ доказывает существование в строгом α классе Бэра функций строгого класса α.

Пусть, как и раньше, $N_*^{\alpha+1}$ не является одновременно $M^{\alpha+1}$ и $CN_*^{\alpha+1} = M^{\alpha+1} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n^\alpha$, причем B_n^α попарно не пересекаются (согласно лемме каждое $M^{\alpha+1} = \sum N^\alpha$ можно представить в таком виде). Тогда

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in N_*^{\alpha+1} \\ \frac{1}{n} & \text{для } x \in B_n^\alpha \end{cases}$$ входит в строгий α класс Бэра и строгий класс $\alpha+1$.

$\varphi(x)$ есть предел равномерно сходящейся последовательности функций $\varphi_n(x) = X(B_1^\alpha) + \frac{1}{2} X(B_2^\alpha) + \ldots + \frac{1}{n} X(B_n^\alpha)$, и следовательно вместе с ними попадает в α класс Бэра; $\varphi(x)$ попадает в класс $\alpha+1$, ибо $[0, 1] = N_*^{\alpha+1} + B_1^\alpha + B_2^\alpha + \ldots + B_n^\alpha + \ldots$, на каждом из которых $\varphi(x)$ есть константа. Наконец, $\varphi(x)$ не может быть в классе α, ибо согласно замечанию (стр. 109) $E[f^\alpha(x) = 0] = M^{\alpha+1}$, а $E[\varphi(x) = 0] = N_*^{\alpha+1}$, которое по условию не $M^{\alpha+1}$.

Укажем простейшую функцию первого класса Бэра, не попадающую в построенные классы. Монотонно возрастающая функция $\varphi(x)$ со всюду плотным множеством точек разрыва обладает этим свойством. В самом деле, если $\varphi(x)$ входит в построенные классы, то $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, на каждом из которых $\varphi(x)$ совпадает соответственно с $f_n(x)$, непрерывной на $[0, 1]$. Предположим, что P_n всюду плотно на (l_1, l_2). Тогда найдется такое z_0, что $z_0 \in (l_1, l_2)$ и $\varphi(z_0+0) - \varphi(z_0-0) > 0$; найдутся такие $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots$, что, при всех k, $x_k < z_0$, $y_k > z_0$, $x_k \in P_n$, $y_k \in P_n$, $\lim_{k\to\infty} x_k = z_0$, $\lim_{k\to\infty} y_k = z_0$. Тогда $\lim_{k\to\infty} f_n(x_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(x_k) = \varphi(z_0 - 0)$, и $\lim_{k\to\infty} f_n(y_k) = \lim_{k\to\infty} \varphi(y_k) = \varphi(z_0+0)$, ввиду чего $f_n(x)$ необходимо разрывна в точке z_0. Это противоречие показывает, что каждое множество P_n всюду неплотно, что исключает равенство $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$ и доказывает утверждение.

В строгом α классе Бэра (при всех $\alpha > 0$) содержатся функции, не попадающие в построенные классы, и функция, монотонная со всюду плотным множеством точек разрыва на $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ и точного α класса Бэра на $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, очевидно обладает этим свойством.

В заключение отметим, что для монотонной функции со всюду плотным множеством точек разрыва сегмент $[0, 1]$ распадается на счетное число борелевских множеств [именно G_δ и F], на каждом из которых она непрерывна. Таким образом построенные классы, содержа все функции, для которых $[0, 1]$ распадается на счетное число борелевских

множеств, на каждом из которых они равномерно непрерывны, отнюдь не содержат всех функций, которые на них просто непрерывны.

§ 3. R-сходимость Мура-Читендена

Мур и Читенден [2] дали эквивалентные определения R-сходимости. Последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ R-сходится к $f(x)$, если [0, 1] распадается на счетное число таких множеств, на каждом из которых сходимость равномерна. Г-сходимость является R-сходимостью. Обратное, вообще говоря, неверно.

Первый R-класс и первый из построенных нами классов совпадают, ибо совпадают признаки Гливенко и Читендена. Можно заметить это и непосредственно. Пусть $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} P_n$, на каждом из которых последовательность непрерывных на [0, 1] функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$ равномерно сходится к $f(x)$. Эта последовательность непрерывных функций сходится равномерно и на $\overline{P}_n$, и следовательно к равномерно-непрерывной и определенной на $\overline{P}_n$ функции. Положив $\varphi_n(x) = f(x)$ для $x \in P_n$ и линейно интерполированной в смежных интервалах, получаем последовательность непрерывных функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$, Г-сходящихся к $f(x)$.

Второй и последующие R-классы содержат первый класс Бэра, а значит и функции, не попадающие в построенную нами классификацию.

Московский гос. университет.

Поступило 17.IX.1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Glivenko V., Sur les fonctions représentables implicitement par fonctions continues, Fund. Math., XIV (1929), 252.

[2] Chittenden E. W., Relatively uniform convergence and the classification of functions, Trans. Amer. Mat. Soc., 23, № 1 (1922).

A. BROUDNO. SUR LES FONCTIONS UNIFORMEMENT CONTINUES SUR DES ENSEMBLES MESURABLES B

RÉSUMÉ

En considérant les fonctions implicites définies au moyen des fonctions continues, V. Glivenko a introduit une opération qui fait correspondre à une suite de fonctions $f_n(x)$ une fonction $f(x)$, si pour chaque x_1 il existe une valeur N telle que $f_n(x_1) = f(x_1)$ pour chaque $n \geqslant N$. Nous désignons cette opération par le symbole $f(x) = \Gamma \lim\limits_{n\to\infty}$.

En appliquant transfiniment cette opération aux fonctions définies et continues sur [0, 1] on obtient des classes de fonctions, de même qu'on

appliquant transfiniment l'opération du passage à la limite aux fonctions définies et continues sur [0, 1] on obtient les classes de Baire.

On démontre que pour que $f(x)$ appartienne à la classe α il faut et il suffit que l'on ait $[0, 1] = \sum_{n=1}^{\infty} N_n^\alpha$, $f(x)$ étant uniformément continue sur chaque N_n^α; on désigne ici par N^1 les ensembles fermés, par M^1 les ensembles ouverts; N^β, M^β étant définis pour tous les nombres transfinis $\beta < \alpha$, N^α est la partie commune, M^α la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles déjà définis.

On démontre ensuite qu'une fonction de classe α dans la classification de Baire appartient à la classe α, ou bien à la classe $\alpha+1$ de la classification précédemment définie, ou bien elle n'appartient à aucune de ces classe. D'ailleurs, α étant un nombre transfini ($\alpha < \Omega$), sauf $\alpha = 0$, toutes ces trois possibilités se réalisent.

En comparant l'opération Γ lim à la convergence R de Moore-Chittenden V. Glivenko a démontré que la première classe et la première classe R coincidént. J'ai trouvé que déjà dans la seconde classe R il existe une fonction de première classe de la classification de Baire (à savoir une fonction monotone dont l'ensemble des discontinuités est partout dense) qui n'appartient à aucune classe de là classification considérée.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 113—126 Série mathématique

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О ФОРМУЛАХ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе рассматривается процесс механических квадратур и для весьма широкого класса функций выводится необходимое и достаточное условие сходимости этого процесса к определенному интегралу соответствующей функции.

1

В статье «Über die Konvergenz von Quadraturverfahren» (¹) Г. Полиа дал следующее общее определение процесса квадратур. Пусть $a \leqslant x \leqslant b$ есть замкнутый конечный интервал и

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{1}$$

есть таблица чисел, такая, что $a \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant b$ $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)},\ \lambda_2^{(2)} \\ \cdots\cdots \\ \lambda_1^{(n)},\ \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{2}$$

есть таблица чисел, причем считаем число $\lambda_i^{(n)}$ соответствующим точке $x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$. Пусть функция $f(x)$ задана на интервале $[a, b]$ и интегрируема (R) (в собственном смысле). Положим

$$Q_n[f] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Мы говорим, что таблицы (1) и (2) определяют процесс квадратур, сопоставляя каждой интегрируемой (R) функции $f(x)$ последовательность чисел (3). Если

$$\lim_{n\to\infty} Q_n[f] = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{4}$$

то говорим, что процесс квадратур сходится.

Полиа ставит следующую проблему: дан некоторый класс (множество) F функций $f(x)$ [интегрируемых (R)]; найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа $x_i^{(n)}$ и $\lambda_i^{(n)}$ для того, чтобы для любой функции $f \in F$ имело место (4). Полиа решает эту проблему для множества P всех полиномов, множества C всех непрерывных функций и множества R всех интегрируемых (R) функций, заданных на $[a, b]$.

В настоящей работе я имею в виду решить проблему Полиа для множества A всех абсолютно непрерывных на $[a, b]$ функций, множества V всех функций ограниченной вариации, множества U_1 всех функций, не имеющих на $[a, b]$ других разрывов, кроме разрывов первого рода, и множества U_2 всех ограниченных на $[a, b]$ функций, имеющих не более чем исчислимое множество разрывов.

2

Полиа вводит следующее обозначение. Пусть E есть множество точек, лежащих на $[a, b]$. Символом

$$\sum_E |\lambda_i^{(n)}|$$

обозначим сумму абсолютных величин тех из чисел $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$, которые соответствуют точкам $x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, лежащим на $[a, b]$. Пусть

$$\Lambda(E) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_E |\lambda_i^{(n)}|.$$

Таким образом $\Lambda(E)$ есть некоторая функция множества $E \subseteq [a, b]$. Очевидно, что $\Lambda(E)$ обладает следующими свойствами:

$$\left.\begin{aligned} &\Lambda(E) \geqslant 0, \\ &\Lambda(E) \leqslant \Lambda(E^*), \text{ если } E \subseteq E^*, \\ &\Lambda(E+E^*) \leqslant \Lambda(E) + \Lambda(E^*) \text{ при любых } E \text{ и } E^*. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

Через $\sum\limits_E \lambda_i^{(n)}$ будем обозначать сумму тех из чисел $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$, которые соответствуют точкам $x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, лежащим на $[a, b]$.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы процесс квадратур* (3) *сходился для всякой функции* $f(x)$, *абсолютно непрерывной на интервале* $a \leqslant x \leqslant b$, *необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих двух условий:*

1° *процесс* (3) *сходится для любого полинома,*

2° *существует константа* $M > 0$ *такая, что*

$$\Big|\sum_{\alpha,\,\beta]} \lambda_i^{(n)}\Big| \leqslant M \qquad (n=1, 2, \ldots, a \leqslant \alpha < \beta \leqslant b).$$

Доказательство. Необходимость условия 1° очевидна. Докажем необходимость 2°. Обозначим через A множество всех функций $f(x)$, абсолютно непрерывных на интервале $a \leqslant x \leqslant b$. Очевидно, что, при обычном определении сложения функций и умножения функции на число, A есть линейное пространство функций. Нормируем его, введя норму так:

$$\|f\|_A = |f(a)| + \operatorname*{var}_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Очевидно, что при такой нормировке A превратится в пространство типа (B) [см. (²)].

Пусть не выполнено условие 2° нашей теоремы. Тогда существует последовательность индексов $n_\nu \uparrow +\infty$ и интервалов $[\alpha_\nu, \beta_\nu]$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\left|\sum_{[\alpha_\nu, \beta_\nu]} \lambda_i^{(n_\nu)}\right| > \nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Я утверждаю, что при $\nu = 1, 2, \ldots$ можно найти функцию $f_\nu \in A$ такую, что

$$\|f_\nu\|_A \leqslant 2 \quad \text{и} \quad Q_{n_\nu}[f_\nu] = \sum_{[\alpha_\nu, \beta_\nu]} \lambda_i^{(n_\nu)}.$$

В самом деле, пусть, например, $a < \alpha_\nu < \beta_\nu < b$. Пусть $\xi_\nu = a$, если на интервале $[a, \alpha_\nu)$ нет точек $x_i^{(n_\nu)}$, и пусть ξ_ν есть крайне правая из точек $x_i^{(n_\nu)}$, лежащих на интервале $[a, \alpha_\nu)$, если такие точки имеются. Аналогично, пусть $\eta_\nu = b$, если на интервале $(\beta_\nu, b]$ нет точек $x_i^{(n_\nu)}$, и пусть η_ν есть крайне левая из точек $x_i^{(n_\nu)}$, лежащих на интервале $(\beta_\nu, b]$, если такие точки имеются. Положим

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \xi_\nu, \\ 1 & \text{»} \quad \alpha_\nu \leqslant x \leqslant \beta_\nu, \\ 0 & \text{»} \quad \eta_\nu \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

В интервалах $\xi_\nu \leqslant x \leqslant \alpha_\nu$ и $\beta_\nu \leqslant x \leqslant \eta_\nu$ определим $f_\nu(x)$ линейно. Тогда очевидно $f_\nu(a) = 0$, $\operatorname{var} f(x) = 2$, т. е. $\|f_\nu\|_A = 2$ и

$$Q_{n_\nu}[f_\nu] = \sum_{i=1}^{n_\nu} \lambda_i^{(n_\nu)} f_\nu(x_i^{(n_\nu)}) = \sum_{[\alpha_\nu, \beta_\nu]} \lambda_i^{(n_\nu)} f_\nu(x_i^{(n_\nu)}) = \sum_{[\alpha_\nu, \beta_\nu]} \lambda_i^{(n_\nu)}.$$

Если $a = \alpha_\nu < \beta_\nu < b$, то, определив η_ν как выше, положим

$$f_\nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \beta_\nu, \\ 0 & \text{»} \quad \eta_\nu \leqslant x \leqslant b, \\ \text{линейна при} & \beta_\nu \leqslant x \leqslant \eta_\nu. \end{cases}$$

Очевидно, что $f_\nu \in A$, $\|f_\nu\|_A = 2$, и снова $Q_{n_\nu}[f_\nu] = \sum\limits_{[\alpha_\nu, \beta_\nu]} \lambda_i^{(n_\nu)}$. Аналогично рассматривается случай $a < \alpha_\nu < \beta_\nu = b$ и, наконец, случай $a = \alpha_\nu < \beta_\nu = b$

Итак, имеем последовательность функций $f_\nu(x)$ такую, что

$$\|f_\nu\|_A \leqslant 2 \quad \text{и} \quad |Q_{n_\nu}[f_\nu]| \geqslant \nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Но очевидно, что

$$\Phi_\nu(f) = Q_{n_\nu}[f] = \sum_{i=1}^{n_\nu} \lambda_i^{(n_\nu)} f(x_i^{(n_\nu)})$$

есть линейный функционал в пространстве A. Мы имеем, следовательно, последовательность элементов $f_\nu \in A$ и последовательность линейных функционалов $\Phi_\nu(f)$, определенных в этом пространстве, такие, что

$$\|f_\nu\|_A \leqslant 2 \quad (\nu = 1, 2, \ldots); \quad \lim_{\nu\to\infty} |\Phi_\nu(f_\nu)| = +\infty.$$

По известной теореме функционального анализа [см. ([2]), стр. 80] существует элемент $f \in A$ такой, что

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |\Phi_\nu(f)| = +\infty,$$

т. е. существует функция $f(x)$, абсолютно непрерывная при $a \leqslant x \leqslant b$, такая, что

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}} |Q_{n_\nu}[f]| = +\infty,$$

и значит для этой функции $f(x)$ процесс квадратур не сходится. Отсюда следует, что условие 2° необходимо.

Пусть теперь выполнено 1° и 2°. Пусть дана функция $f(x) \in A$. Найдем полином $F(x)$ такой, что

$$\operatorname*{var}_{a\leqslant x\leqslant b} [f(x) - F(x)] < \varepsilon, \quad \max_{a\leqslant x\leqslant b} [f(x) - F(x)] < \varepsilon.$$

Тогда, полагая $\Delta(x) = f(x) - F(x)$, получим

$$\left|\int_a^b f dx - Q_n[f]\right| \leqslant \left|\int_a^b f dx - \int_a^b F dx\right| + \left|\int_a^b F dx - Q_n[F]\right| + |Q_n[F] - Q_n[f]| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(b-a) + o(1) + |Q_n[F-f]| \leqslant \varepsilon(b-a) + o(1) + \left|\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} \Delta(x_i^{(n)})\right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon(b-a) + o(1) + M\left\{\sum_{i=1}^{n-1} |\Delta(x_i^{(n)}) - \Delta(x_{i+1}^{(n)})| + |\Delta(x_{(n)}^{(n)})|\right\} \leqslant$$

$$< \varepsilon(b-a) + o(1) + M\{\operatorname*{var}_{a\leqslant x\leqslant b} \Delta(x) + \max_{a\leqslant x\leqslant b} \Delta(x)\} < \varepsilon(b-a) + o(1) + 2M\varepsilon.$$

Теорема доказана, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

3

ТЕОРЕМА 2. *Для того чтобы процесс квадратур* (3) *сходился для всякой функции* $f(x)$, *имеющей ограниченную вариацию на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1° $$\lim_{n\to\infty}\sum_{[\alpha,\,\beta]}\lambda_i^{(n)}=\beta-\alpha;\ \lim_{n\to\infty}\sum_{\xi}\lambda_i^{(n)}=0$$
$$(a\leqslant\xi\leqslant b;\ a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b),$$

2° *как в теореме* 1.

Доказательство. Пусть $[\alpha, \beta]$ есть некоторый интервал, лежащий на $[a, b]$. Рассмотрим функцию $f(x)$, равную 1 на этом интервале и 0 вне его. Эта функция имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ и

$$Q_n[f]=\sum_{[\alpha,\,\beta]}\lambda_i^{(n)}.$$

Если процесс квадратур сходится для всех функций ограниченной вариации, то

$$\lim_{n\to\infty}Q_n[f]=\int_a^b f(x)\,dx=\beta-\alpha.$$

Отсюда следует необходимость первой части условия 1°. Затем рассмотрим функцию $f(x)$, определенную так: $f(\xi)=1$, $f(x)=0$ при $x\neq\xi$; это дает вторую часть условия 1°. Необходимость условия 2° следует по теореме 1.

Для доказательства достаточности условий нам потребуется следующая лемма из теории интегралов Стильтьеса.

ЛЕММА. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна и ограниченной вариации в интервале* $a\leqslant x\leqslant b$, *а функции* $\varphi_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots)$ *ограниченной вариации в том же интервале и удовлетворяют следующим условиям:*

1° $|\varphi_n(x)-\varphi_n(a)|\leqslant M$ $(n=1, 2, \ldots;\ a\leqslant x\leqslant b)$,

2° $\lim\limits_{n\to\infty}[\varphi_n(x)-\varphi_n(a)]=0$ *при любом фиксированном* x, $a\leqslant x\leqslant b$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x)=0.$$

Доказательство. Интегрируя по частям, получим

$$\int_a^b f(x)\,d\varphi_n(x)=\int_a^b f(x)\,d[\varphi_n(x)-\varphi_n(a)]=f(b)[\varphi_n(b)-\varphi_n(a)]-$$
$$-\int_a^b[\varphi_n(x)-\varphi_n(a)]\,df(x).$$

Первое слагаемое справа стремится к нулю, ибо по условию

$$\varphi_n(b)-\varphi_n(a)\to 0.$$

Интеграл, стоящий справа, тоже стремится к нулю при $n\to\infty$. Чтобы убедиться в этом, следует преобразовать интеграл Стильтьеса в интеграл Лебега [см. ([3]), гл. XI], а затем применить известную теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Пусть теперь выполнены условия 1° и 2° нашей теоремы. Пусть функция $f(x)$ ограниченной вариации на $[a, b]$. Положим $f(x) = F(x) + \Psi(x)$, где $F(x)$ непрерывна и ограниченной вариации, а $\Psi(x)$ есть функция скачков для $f(x)$. Очевидно достаточно доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_n[F] = \int_a^b F(x)\,dx; \quad \lim_{n\to\infty} Q_n[\Psi] = \int_a^b \Psi(x)\,dx. \tag{6}$$

Пусть

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x = a, \\ \sum\limits_{[a,\,x]} \lambda_i^{(n)} & \text{при } a < x \leqslant b. \end{cases}$$

Тогда

$$\int_a^b F(x)\,dx - Q_n[F] = \int_a^b F(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,d\varphi_n(x) =$$

$$= \int_a^b F(x)\,d(x-a) - \int_a^b F(x)\,d[\varphi_n(x) - \varphi_n(a)] = \int_a^b F(x)\,d\Phi_n(x),$$

где

$$\Phi_n(x) = x - a - [\varphi_n(x) - \varphi_n(a)].$$

Ясно, что

$$|\Phi_n(x)| = |\Phi_n(x) - \Phi_n(a)| \leqslant M + (b-a),$$
$$\lim_{n\to\infty} [\Phi_n(x) - \Phi_n(a)] \text{ при любом } x,\ a \leqslant x \leqslant b,$$

и в силу леммы первое из равенств (6) доказано.

Из условий 1° нашей теоремы следует, что если E есть любой интервал (открытый, полуоткрытый или замкнутый), лежащий на $[a, b]$, и $|E|$ его длина, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_E \lambda_i^{(n)} = |E|.$$

Пусть $\Psi_p(x)$ есть функция скачков, образованная при помощи первых p скачков функции $f(x)$. Тогда известно, что

$$0 \leqslant \max_{a\leqslant x\leqslant b} |\Psi(x) - \Psi_p(x)| \leqslant \operatorname*{var}_{a\leqslant x\leqslant b} [\Psi(x) - \Psi_p(x)] \to 0 \text{ при } p \to \infty.$$

Имеем

$$\left| \int_a^b \Psi(x)\,dx - Q_n[\Psi] \right| \leqslant \left| \int_a^b \Psi(x)\,dx - \int_a^b \Psi_p(x)\,dx \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b \Psi_p(x)\,dx - Q_n[\Psi_p] \right| + |Q_n[\Psi_p] - Q_n[\Psi]| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) \max_{a\leqslant x\leqslant b} |\Psi(x) - \Psi_p(x)| + o(1) + |Q_n[\Psi_p - \Psi]| \leqslant$$

$$\leqslant (b-a) \operatorname*{var}_{a\leqslant x\leqslant b} [\Psi(x) - \Psi_p(x)] + o(1) + 2M \operatorname*{var}_{a\leqslant x\leqslant b} [\Psi(x) - \Psi_p(x)].$$

Из этой оценки следует второе из соотношений (6). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 3. *Для того чтобы процесс квадратур сходился для всякой функции $f \in U_1$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

1° *как в теореме* 2;

2° *существует константа* $M > 0$ *такая, что*

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(n)}| \leqslant M \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказательство. Необходимость условия 1° следует из теоремы 2. Что касается условия 2°, то оно, как показал Полиа в цитированной выше работе, необходимо для того, чтобы процесс квадратур сходился для всякой непрерывной функции $f(x)$. Тем более оно необходимо для того, чтобы процесс квадратур сходился для всякой функции $f \in U_1$. Будем говорить, что функция $f(x)$, заданная и конечная на интервале $a \leqslant x \leqslant b$, кусочно-постоянна на этом интервале, если можно указать такое разбиение интервала $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b,$$

что $f(x) = \text{const}$ при $x_i < x < x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Известно [см., например, (4)], что если $f(x) \in U_1$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти кусочно-постоянную функцию $F(x)$ такую, что

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant b. \tag{7}$$

Пусть теперь выполнены условия 1° и 2° нашей теоремы. В силу условия 1° процесс квадратур, как легко видеть, сходится для каждой кусочно-постоянной функции. Пусть $f \in U_1$. По $\varepsilon > 0$ найдем кусочно-постоянную функцию $F(x)$ так, что верно (7). Имеем

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - Q_n[f] \right| \leqslant \left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b F(x)\,dx \right| + \left| \int_a^b F(x)\,dx - Q_n[F] \right| +$$
$$+ |Q_n[F] - Q_n[f]| \leqslant \varepsilon(b-a) + o(1) + Q_n[F-f] \leqslant \varepsilon(b-a) + o(1) + 2M\varepsilon,$$

и теорема доказана, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы процесс квадратур* (3) *сходился для всякой функции $f \in U_2$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:*

1° *и* 2° *как в теореме* 3;

3° *по любому* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *такое, что если интервал* $I \subseteq [a, b]$ *по длине* $< \eta$, *то* $\Lambda(I) < \varepsilon$.

Доказательство. Необходимость условий 1° и 2° следует из теоремы 3. Допустим, что процесс квадратур сходится для всякой функции $f \in U_2$, но 3° не выполнено. Мы придем к противоречию.

В самом деле, если 3° не выполнено, то существует $\varepsilon > 0$, последовательность индексов $n_\nu \uparrow +\infty$ и интервалов I_ν, $|I_\nu| \to 0$, таких, что

$$\sum_{I_\nu} |\lambda_i^{(n_\nu)}| \geqslant \varepsilon.$$

Мы можем предположить, что левые концы (а следовательно, и правые концы) интервалов I_ν сходятся к определенной точке ξ интервала $[a, b]$. Положим для простоты $\xi = b$. Разобрав доказательство для этого случая, читатель легко увидит, какие изменения надо в него внести, чтобы рассмотреть случаи $\xi = a$, $a < \xi < b$. Мы знаем, что $\sum_b \lambda_i^{(n)} \to 0$ и следовательно $\sum_b |\lambda_i^{(n)}| = \left|\sum_b \lambda_i^{(n)}\right| \to 0$. Будем считать, что n_1 так велико, что

$$\sum_b |\lambda_i^{(n_\nu)}| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

С каждым из интервалов I_ν произведем следующую операцию. Если $x_{n_\nu}^{(n_\nu)} < b$, то заменим интервал I_ν другим интервалом I'_ν с тем же левым концом, но с правым концом в точке $x_{n_\nu}^{(n_\nu)}$ (разумеется, возможно, что I совпадет с I_ν). Если $x_{n_\nu}^{(n_\nu)} = b$, то заменим интервал I_ν другим интервалом I'_ν с тем же левым концом, что и I_ν, а с правым концом в точке $x_{n_\nu - 1}^{(n_\nu)}$. Очевидно, что $|I'_\nu| \to 0$ при $\nu \to 0$ и

$$\sum_{I'_\nu} |\lambda_i^{(n_\nu)}| \geqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Отбрасывая штрихи, будем в дальнейшем интервалы I'_ν обозначать снова через I_ν. Мы можем считать, что при $\nu = 1, 2, \ldots$ правый конец интервала I_ν лежит левее, чем левый конец интервала $I_{\nu+1}$ (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности).

Положим $\nu_1 = 1$ и определим функцию $f_1(x)$ так:

$$f_1(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \lambda_i^{(n_{\nu_1})} & \text{при } x = x_i^{(n_{\nu_1})} \text{ и } x_i^{(n_{\nu_1})} \in I_1, \\ 0 & \text{при всех прочих } x. \end{cases}$$

Мы знаем, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_n[f_1] = 0,$$

ибо f_1 отлична он нуля лишь в конечном числе точек. Выберем $\nu_2 > 1$ настолько большим, что

$$|Q_{n_{\nu_2}}[f_1]| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Теперь определим функцию $f_2(x)$ так:

$$f_2(x) = \begin{cases} \operatorname{sign} \lambda_i^{(n_{\nu_2})} & \text{при } x = x_i^{(n_{\nu_2})} \text{ и } x_i^{(n_{\nu_2})} \in I_{\nu_2}, \\ 0 & \text{при всех прочих } x. \end{cases}$$

Мы знаем, что

$$\lim_{n\to\infty} Q_n[f_1+f_2]=0,$$

ибо функция f_1+f_2 отлична от нуля лишь в конечном числе точек. Найдем $\nu_3>\nu_2$ так, что

$$|Q_{n_{\nu_3}}[f_1+f_2]|<\frac{\varepsilon}{4}$$

и определим функцию $f_3(x)$ так:

$$f_3(x)=\begin{cases} \operatorname{sign}\lambda_i^{(n_{\nu_3})} & \text{при } x=x_i^{(n_{\nu_3})} \text{ и } x_i^{(n_{\nu_3})}\in I_{\nu_3} \\ 0 & \text{при всех прочих } x. \end{cases}$$

Найдем $\nu_4>\nu_3$ так, что $|Q_{n_{\nu_4}}[f_1+f_2+f_3]|<\frac{\varepsilon}{4}$, и т. д. Мы определим таким образом последовательность индексов $\nu_i\uparrow+\infty$ и функций $f_i(x)$.

Положим

$$f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ \ldots$$

Ряд справа сходится в каждой точке x, ибо в каждой точке самое большее одна из функций f_i отлична от нуля. При этом $|f(x)|\leqslant 1$ $(a\leqslant x\leqslant b)$. Ясно также, что функция $f(x)$ имеет на интервале $[a, b]$ лишь исчислимое множество разрывов. Имеем

$$|Q_{n_{\nu_i}}[f]|\geqslant|Q_{n_{\nu_i}}[f_i]|-|Q_{n_{\nu_i}}[f_1+f_2+\ \ldots\ +f_{i-1}]|-|Q_{n_{\nu_i}}[f_{i+1}+$$
$$+f_{i+2}+\ \ldots]|=|Q_{n_{\nu_i}}[f_i]|-|Q_{n_{\nu_i}}[f_1+f_2+\ \ldots\ +f_{i-1}]|\geqslant\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

Но

$$\int_a^b f(x)\,dx=0,$$

и значит существует функция $f(x)\in U_2$, для которой процесс квадратур не сходится. Полученное противоречие доказывает теорему.

5

В статье «Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen» (5) Фейер, между прочим, доказал, что если процесс квадратур (3) сходится для всякой интегрируемой (R) функции и все числа $\lambda_i^{(n)}>0$ $(i=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots)$, то

$$\max_i \lambda_i^{(n)}\longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n\longrightarrow\infty\ *.$$

* Собственно говоря, Фейер доказывает эту теорему при дополнительном предположении, что процесс квадратур интерполяционный, т. е. что

$$Q_n[f]=\int_a^b L_n(f;x)\,dx=\int_a^b\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})\,l_i^{(n)}(x)\,dx=\sum_{i=1}^n f(x_i^{(n)})\int_a^b l_i^{(n)}(x)\,dx,$$

где $L_n(f;x)$ — интерполяционный полином Лагранжа порядка $\leqslant n-1$, но в доказательстве Фейера почти ничего не надо менять, чтобы доказать и предложить сформулированное выше.

Из теоремы 4 мы получим следующее некоторое усиление теоремы Фейера:

ТЕОРЕМА 5. *Если процесс квадратур* (3) *сходится для каждой функции* $f \in U_2$, *то*

$$\max_i |\lambda_i^{(n)}| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty$$

(*о знаках* $\lambda_i^{(n)}$ *ничего не предполагается*).

Доказательство. Пусть процесс квадратур (3) сходится для всякой функции $f \in U_2$, но $\max_i |\lambda_i^{(n)}|$ не стремится к нулю. Тогда существует $\varepsilon > 0$, последовательность индексов $n_\nu \uparrow +\infty$ и последовательность целых чисел $\{i_\nu\}$, $1 \leqslant i_\nu \leqslant n_\nu$ такие, что

$$\left|\lambda_{i_\nu}^{(n_\nu)}\right| \geqslant \varepsilon.$$

Рассмотрим последовательность точек $\xi_\nu = x_{i_\nu}^{(n_\nu)}$. Можно считать, что она сходится к точке ξ. Пусть $a < \xi < b$. Тогда, если I есть произвольно малый интервал с центром ξ, то очевидно $\Lambda(I) \geqslant \varepsilon$. Если же $\xi = b$ ($\xi = a$), то если I — произвольно малый интервал с правым [левым] концом в точке ξ, то $\Lambda(I) \geqslant \varepsilon$.

Итак, во всяком случае существуют интервалы I сколь угодно малой длины, такие, что $\Lambda(I) \geqslant \varepsilon$. Это невозможно по теореме 4. Противоречие, к которому мы пришли, доказывает теорему 5.

6

В заключение рассмотрим вопрос, несколько отличный от предыдущего. Сопоставим каждой точке $x_i^{(n)}$ таблицы (1) замкнутый интервал $\delta_i^{(n)}$ такой, что $x_i^{(n)} \in \delta_i^{(n)}$, интервалы $\delta_1^{(n)}, \delta_2^{(n)}, \ldots, \delta_n^{(n)}$ не налегают, принадлежат интервалу $[a, b]$ и покрывают весь интервал $[a, b]$. Через $\delta_i^{(n)}$ будем обозначать не только самый интервал $\delta_i^{(n)}$, но и его длину, — это недоразумений не вызовет. Пусть функция $f(x)$ суммируема на $[a, b]$. Составим выражение

$$\overline{Q}_n[f] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} \frac{1}{\delta_i^{(n)}} \int_{\delta_i^{(n)}} f(t)\,dt$$

и изучим вопрос о том, когда

$$\lim_{n\to\infty} \overline{Q}_n[f] = \int_a^b f(x)\,dx \tag{8}$$

[ср. мою работу (6)].

ТЕОРЕМА 6. *Пусть* $\max_i \delta_i^{(n)} \rightrightarrows 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для того чтобы для всякой функции* $f(x)$, *суммируемой на* $[a, b]$, *имело место* (8), *необходимо и достаточно, чтобы*

1° $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{[\alpha,\beta]}\lambda_i^{(n)}=\beta-\alpha \quad (a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$,

2° *существует* $M>0$ *такое, что* $|\lambda_i^{(n)}|\leqslant M\delta_i^{(n)}$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\ n=1, 2, \ldots).$$

Доказательство необходимости. Допустим, что для всякой функции $f(x)$, суммируемой на $[a, b]$, верно (8), но не выполнено условие 2°. Тогда существуют последовательности индексов $n_\nu\uparrow+\infty$ и целых чисел i_ν, $1\leqslant i_\nu\leqslant n_\nu$ такие, что

$$\left|\lambda_{i_\nu}^{(n_\nu)}\right|\geqslant\nu\delta_{i_\nu}^{(n_\nu)}.$$

Пусть

$$f_\nu(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\delta_{i_\nu}^{(n_\nu)}} & \text{при}\quad x\in\delta_{i_\nu}^{(n_\nu)},\\ 0 & \text{»}\quad x\overline{\in}\delta_{i_\nu}^{(n_\nu)}.\end{cases}$$

Очевидно, что функция $f_\nu\in L$ [где L — пространство суммируемых функций; см. ([2])] и

$$\|f_\nu\|_L=1.$$

Имеем

$$|\overline{Q}_{n_\nu}[f_\nu]|\geqslant\nu\quad(\nu=1, 2, \ldots).$$

Но очевидно, что

$$\Phi_\nu(f)=\overline{Q}_{n_\nu}[f]$$

есть линейный функционал в пространстве L, и следовательно мы имеем последовательность элементов f_ν пространства L и последовательность линейных функционалов $\Phi_\nu(f)$, определенных в этом пространстве, таких, что

$$\|f_\nu\|_L\leqslant 1\quad(\nu=1, 2, \ldots);\quad \lim_{\nu\to\infty}|\Phi_\nu(f_\nu)|=+\infty.$$

Значит [см. ([2]), стр. 80] существует функция $f\in L$ такая, что

$$\overline{\lim_{\nu\to\infty}}|\Phi_\nu(f)|=+\infty,$$

т. е. существует суммируемая функция $f(x)$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}|\overline{Q}_n[f]|=+\infty,$$

что невозможно по предположению. Итак, условие 2° необходимо.

Условие 1° тоже необходимо; в самом деле, если для $f\in L$ всегда верно (8), то, в силу 2°, $\max\limits_i|\lambda_i^{(n)}|\to 0$. Но если $f(x)=1$ при $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ $f(x)=0$ во всех других точках, то, как легко видеть,

$$\overline{Q}_n[f]=\sum_{[\alpha,\beta]}\lambda_i^{(n)}+\theta_0^{(n)}\lambda_{i_n}^{(n)}+\theta_1^{(n)}\lambda_{i_n'}^{(n)},$$

где $|\theta_0^{(n)}|\leqslant 1$, $|\theta_1^{(n)}|\leqslant 1$. Так как верно (8), то

$$\sum_{[\alpha,\beta]}\lambda_i^{(n)}\longrightarrow\int_a^b f(x)\,dx=\beta-\alpha$$

и значит условие 1° необходимо.

Доказательство достаточности. Пусть выполнены условия 1° и 2°. Очевидно, что тогда (8) верно для всякой кусочно-постоянной функции f. Если же f суммируема (но не кусочно-постоянна), то выберем кусочно-постоянную функцию F так, что

$$\int_a^b |f-F|\,dx<\varepsilon.$$

Тогда

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx-\overline{Q}_n[f]\right|\leqslant\left|\int_a^b f(x)\,dx-\int_a^b F(x)\,dx\right|+\left|\int_a^b F(x)\,dx-\overline{Q}_n[F]\right|+$$

$$+\left|\overline{Q}_n(F)-\overline{Q}_n[f]\right|\leqslant\varepsilon+o(1)+\left|\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(n)}\frac{1}{\delta_i^{(n)}}\int_{\delta_i^{(n)}}[F(t)-f(t)]\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon+o(1)+\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i^{(n)}|\,\frac{1}{\delta_i^{(n)}}\int_{\delta_i^{(n)}}|F(t)-f(t)|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon+o(1)+M\sum_{i=1}^{n}\int_{\delta_i^{(n)}}|F-f|\,dt=$$

$$=\varepsilon+o(1)+M\int_a^b|F-f|\,dt<(M+1)\,\varepsilon+o(1),$$

откуда следует теорема.

Научно-исслед. институт математики и механики
Ленинградского гос. университета.

Поступило
26. X. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Pólya G., Über die Konvergenz von Quadraturverfahren, Mathem. Zeitschrift, 37 (1933), 264—286.

[2] Banach St., Théorie des opérations linéaires, Warszawa 1932.

[3] Лебег А., Интегрирование и отыскание примитивных функций, перев. с франц., М. 1934.

[4] Hahn H., Über das Interpolationsproblem, Mathem. Zeitschrift, 1(1918), 115—142.

[5] Fejér L., Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen, Mathem. Zeitschrift, 37 (1933), 287—309.

[6] Lozinski S., Über singuläre Integrale, Матем. сборн., 7 (49) : 2 (1940).

S. LOZINSKI. ÜBER MECHANISCHE QUADRATUREN

ZUSAMMENFASSUNG

In seiner Arbeit ([1]) gibt G. Pólya die folgende allgemeine Definition des Quadraturverfahrens. Es sei $a \leqslant x \leqslant b$ ein endliches abgeschlossenes Intervall und die Punkte

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)} \\ x_1^{(2)}, \; x_2^{(2)} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ x_1^{(n)}, \; x_2^{(n)}, \; \ldots, \; x_n^{(n)} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{array}\right\} \tag{1}$$

mögen diesem Intervall angehören, wobei $a \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant b$ ist. Es sei ferner

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1^{(1)} \\ \lambda_1^{(2)}, \; \lambda_2^{(2)} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \lambda_1^{(n)}, \; \lambda_2^{(n)}, \; \ldots, \; \lambda_n^{(n)} \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \end{array}\right\} \tag{2}$$

eine dreieckige Zahlenmatrix, wobei wir die (reelle) Zahl $\lambda_i^{(n)}$ dem Punkt $x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n, \; n=1, 2, \ldots)$ zugeordnet denken. Es sei die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[a, b]$ definiert und (R) — integrabel (im eigentlichen Sinne). Wir setzen

$$Q_n[f] = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f(x_i^{(n)}) \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{3}$$

Die Matrices (1) und (2) definieren ein Quadraturverfahren, wobei jeder (R)-integrablen Funktion $f(x)$ die Zahlenfolge (3) zugeordnet wird. Wenn

$$\lim_{n \to \infty} Q_n[f] = \int_a^b f(x)\, dx \tag{4}$$

ist, so sagen wir, dass das Quadraturverfahren (3) konvergiert. G. Pólya stellt das folgende Problem: es sei eine Menge F von (R)-integrablen Funktionen $f(x)$ gegeben; man finde die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, denen die Zahlen $x_i^{(n)}$ und $\lambda_i^{(n)}$ genügen müssen, damit für jede Funktion $f \in F$ die Limesgleichung (4) gelte. Pólya lösst dieses Problem für die Menge P aller Polynome, die Menge C aller stetigen Funktionen und die Menge R aller (R)-integrablen Funktionen, welche auf $[a, b]$ definiert sind. Es sei A die Menge aller auf $[a, b]$ absolut stetigen Funktionen, V — die Menge aller Funktionen, welche auf $[a, b]$ von beschränkter Variation sind, U_1 — die Menge aller Funktionen, welche auf $[a, b]$ endlich sind und daselbst keine Unstetigkeitsstellen zweiter Art besitzen, une U_2 — die Menge aller Funktionen, welche auf $[a, b]$ beschränkt sind und daselbst höchstens abzählbar unendlichviele Unstetigkeitsstellen haben. Offenbar gilt $A \subset V \subset U_1 \subset U_2 \subset R$. In diesem Artikel löse ich das Problem von Pólya für die Funktionenklassen A, V, U_1 und U_2.

Es sei E eine Punktmenge, welche auf $[a, b]$ liegt. Das Symbol $\sum_E \lambda_i^{(n)}$ bezeichne die Summe derjenigen der Zahlen $\lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)}$, welche solchen Punkten $x_i^{(n)}$ $(i=1, 2, \ldots, n)$ entsprechen, die auf E liegen. In derselben Weise ist $\sum_E |\lambda_i^{(n)}|$ zu verstehen. Wir setzen mit Pólya

$$\Lambda(E) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_E |\lambda_i^{(n)}|.$$

$\Lambda(E)$ ist also eine Mengenfunktion, welche für alle Teilmengen von $[a, b]$ definiert ist, und es ist offenbar: $\Lambda(E) \geq 0$, $\Lambda(E) \leq \Lambda(E^*)$, wenn $E \subseteq E^*$; $\Lambda(E+E^*) \leq \Lambda(E) + \Lambda(E^*)$ für alle E und E^*.

Satz 1. *Damit das Quadraturverfahren* (3) *für jede auf* $[a, b]$ *absolut stetige Funktion* $f(x)$ *konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1° *das Quadraturverfahren konvergiert für jedes Polynom;*

2° *es existiert ein* $M > 0$ *so, dass*

$$\left|\sum_{[\alpha, \beta]} \lambda_i^{(n)}\right| \leq M \quad (n=1, 2, \ldots;\ a \leq \alpha < \beta \leq b).$$

Satz 2. *Damit das Quadraturverfahren* (3) *für jede Funktion* f *konvergiere, welche auf* $[a, b]$ *von beschränkter Variation ist, ist notwendig und hinreichend, dass die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:*

1° $\lim_{n\to\infty} \sum_{[\alpha, \beta]} \lambda_i^{(n)} = \beta - \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{\xi} \lambda_i^{(n)} = 0$ $(a \leq \xi \leq b,\ a \leq \alpha < \beta \leq b)$,

2° *wie in Satz* 1.

Satz 3. *Damit das Quadraturverfahren* (3), *für jede Funktion* $f \in U_1$ *konvergiere, ist notwendig und hinreichend, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1° $\lim_{n\to\infty} \sum_{[\alpha, \beta]} \lambda_i^{(n)} = \beta - \alpha$, $\lim_{n\to\infty} \sum_{\xi} \lambda_i^{(n)} = 0$ $(a \leq \xi \leq b,\ a \leq \alpha < \beta \leq b)$,

2° *es existiert ein* $M > 0$, *so dass* $\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i^{(n)}| \leq M$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Satz 4. *Damit das Quadraturverfahren* (3) *für jede Funktion* $f \in U_2$ *konvergiere, ist notwendig und hinreichend dass die Bedingungen* 1° *und* 2° *des Satzes* 3 *erfüllt seien und ausserdem noch die folgende Bedingung gelte:*

3° *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *kann man ein* $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ *finden so, dass für jedes Intervall* I, *welches auf* $[a, b]$ *liegt und dessen Länge* $< \eta$ *ist, die Ungleichung* $\Lambda(I) < \varepsilon$ *erfüllt ist.*

Als Anwendung des Satzes 4 beweisen wir den

Satz 5. *Wenn das Quadraturverfahren* (3) *für jede Funktion* $f \in U_2$ *konvergiert, so gilt* $\max_i |\lambda_i^{(n)}| \to 0$ für $n \to \infty$.

Dieser Satz verallgemeinert ein Resultat von Fejér [(5), § 5].

In den Voraussetzungen des Satzes 5 kann man die Funktionenklasse U nicht durch die Klasse U_1 ersetzen.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 127—136 Série mathématique

ВСЕСОЮЗНОЕ СОВЕЩАНИЕ ПО АЛГЕБРЕ

13—17 ноября 1939 г.

13—17 ноября 1939 г. Отделением физико-математических наук Академии Наук СССР было проведено Всесоюзное совещание по алгебре. Совещание имело своей задачей просмотр результатов, полученных за последнее время советскими математиками в следующих разделах алгебры: теория групп, теория колец и теория алгебр, теория полей и теория Галуа, теория алгебраических чисел, алгебра многочленов, линейная алгебра, теория структур, теория обобщенных групп. На восьми заседаниях совещания было заслушано 36 научных докладов.

Работа по организации совещания была проведена организационным комитетом в следующем составе: Б. Н. Делоне, А. Г. Курош, Н. Г. Чеботарев, О. Ю. Шмидт.

Ниже печатаются названия и краткие резюме докладов, прочитанных на совещании.

ЗАСЕДАНИЕ ПЕРВОЕ (13 ноября, утро)

Председатель Н. Г. Чеботарев

А. А. Кулаков *(Москва)*. **Об одном критерии непростоты конечной группы.** Пусть G — группа порядка g и G'—подгруппа порядка g' группы G. Обозначим через h_R порядок класса сопряженных элементов, содержащего R, и через r — число всех классов группы G. Доказывается следующая

Теорема. *Если центр C подгруппы G' отличен от 1 и если имеет место неравенство*

$$g \sum_S \frac{1}{h_S} < (2r-1)\, g',$$

где суммирование по S распространяется на все элементы G', то группа G — не простая.

Укажем основные идеи доказательства. Пусть $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_r$ — неприводимые представления группы G (Γ_1 — единичное представление) и $\Gamma_{u, G'}$ — представление подгруппы G', заключенное в Γ_{*}. Доказывается, что для некоторого $u' \geqslant 2$ группа $\Gamma_{*', G'}$ неприводима. Отсюда следует, что матрица (R_C) группы $\Gamma_{*', G'}$, соответствующая какому-либо отличному от 1 элементу R_C подгруппы C, должна быть скалярной. Следовательно, группа G — составная.

П. Е. Дюбюк *(Москва)*. **О признаках непростоты конечной группы.** Используя некоторые специальные приемы подсчета числа вычетов в разложении группы по модулю, а также ряд предложений, выведенных с помощью метода мономиальных представлений групп, можно получить такой результат:

Пусть A — элемент порядка p^k группы $\mathfrak{G}$ (p — нечетное простое число). Пусть $\mathfrak{P}$ — силовская p-подгруппа $(k-1)$-го квазинормализатора элемента A. Если каждый элемент $\mathfrak{P}$, сопряженный с A^z, имеет вид A^{mz}, где $m \equiv 1 \pmod p$, и элемент $A^{p^{k-1}}$ не принадлежит коммутанту силовской p-подгруппы нормализатора элемента A,

то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель. При некоторых дополнительных условиях теорема будет справедлива и для $p=2$. Приведенный результат обобщает теоремы В. Бернсайда, В. К. Туркина и автора.

О. Ю. Шмидт *(Москва)*. **К теореме Фробениуса о непростоте группы.** Работа содержит опровержение одного утверждения Вейснера, состоящего в том, что нормальный делитель, появляющийся в конечной группе на основании теоремы Фробениуса, всегда будет абелевым. Опровержение достигается построением соответствующего примера. Указываются также необходимые и достаточные условия для того, чтобы этот нормальный делитель на самом деле был абелевым.

А. В. Товбин *(Киев)*. **Метод вспомогательных подгрупп.** 1. Автор излагает основы метода вспомогательных подгрупп, заключающегося в построении вспомогательных подгрупп известной структуры для изучения подгрупп известного порядка и неизвестной структуры данной группы.

2. Автор доказывает вспомогательную лемму: *всякая подгруппа $\mathfrak{S}_n$, содержащая $\mathfrak{A}_k$ и не содержащая ни одной $\mathfrak{A}_{k+1}$, содержится в $\mathfrak{S}_k\mathfrak{S}_{n-k}$ при $k>\frac{n}{2}$.*

3. Методом вспомогательных подгрупп доказывается теорема: *всякая подгруппа $\mathfrak{S}_n$, имеющая в $\mathfrak{S}$ индекс $<3^{\left[\frac{n-1}{3}\right]}$, содержит $\mathfrak{A}_{2\left[\frac{n}{3}\right]+1}$.* Эта теорема обобщает все результаты, полученные до сих пор в проблеме Бертрана.

В. И. Грошев *(Москва)*. **О теореме Фробениуса.** В докладе были даны следующие обобщения теоремы Фробениуса:

1. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ — две произвольные системы элементов группы $\mathfrak{G}$, причем наименьшее кратное порядков элементов системы $\mathfrak{M}$ есть m, и пусть нормализаторами систем $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{M}$ соответственно будут группы $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{N}$, пересечением которых является группа $\mathfrak{F}$ порядка f. Число элементов группы $\mathfrak{G}$, n-ая степень которых принадлежит системе $\mathfrak{A}$ и какая-нибудь степень которых входит в систему $\mathfrak{M}$, кратно общему наибольшему делителю $D(l, f)$ чисел l и f, где l — наибольший делитель n, взаимно простой с m.

2. Пусть $\mathfrak{N}$ есть пересечение нормализаторов произвольных систем элементов $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_k$ группы $\mathfrak{G}$. Число элементов X группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих k условиям вида

$$X^{r_i}\subseteq\mathfrak{A}_i, \qquad i=1, 2, \ldots, k,$$

кратно общему наибольшему делителю $D(r_1, r_2, \ldots, r_k, n)$ чисел $r_1, r_2, \ldots, r_k$ и n, где n есть порядок группы $\mathfrak{N}$.

ЗАСЕДАНИЕ ВТОРОЕ (14 ноября, утро)

Председатель Л. С. Понтрягин

В. А. Тартаковский *(Ленинград)*. **О задаче эквивалентности в кольце целочисленных матриц.** Даны две целочисленные квадратные матрицы A и B одного порядка. Спрашивается, существует ли целочисленная матрица C, с определителем $+1$ или -1, такая, что $B=C^{-1}AC$. Для того случая, когда характеристический полином матриц A и B неприводим в поле рациональных чисел, решение этого вопроса сводится, как известно было ранее, к решению неопределенного уравнения, к которому приводится отыскание в идеале алгебраического числа с заданной нормой.

В настоящем докладе рассматривается общий случай, когда характеристический полином может иметь и кратные корни. Задача и в этом случае приводится к последовательному решению неопределенных уравнений, по двух разных типов. Оба типа уравнений решаются в конечное число действий.

А. И. Мальцев *(Москва)*. **О представлении бесконечных групп матрицами.** 1. В докладе были указаны необходимые и достаточные условия для возможности точного представления абелевых групп и периодических групп.

2. Кроме того, была доказана теорема: если группа $\mathfrak{G}$ с конечным числом образующих имеет возрастающую цепочку нормальных делителей $\mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_2 \subset \ldots$, то все фактор-группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{N}_k$, начиная с некоторого значения k, не будут представимыми матрицами любой наперед заданной степени.

3. Как следствие из 2, показано, что матричные группы с конечным числом образующих не могут быть изоморфны своим истинным фактор-группам (решение проблемы Hopf'a для случая матричных групп).

Д. И. Фукс-Рабинович *(Ленинград)* и **Х. А. Дониахи** *(Ленинград)*. **О представлении некоторых бесконечных групп матрицами.** I. (Фукс-Рабинович). В работе доказана возможность изоморфного представления свободной группы с исчислимым множеством производящих при помощи матриц второго порядка, а также изоморфного представления свободного произведения исчислимого множества произвольных абелевых групп при помощи матриц второго порядка с коэффициентами, содержащими элементы заданных абелевых групп. На свободное произведение произвольных абелевых групп распространяются теоремы Магнуса о пересечении последовательности коммутантов, определенных по Рейдемейстеру.

II. (Дониахи). Существует изоморфное представление свободного произведения произвольных циклических групп при помощи матриц второго порядка с комплексными коэффициентами.

Д. И. Фукс-Рабинович *(Ленинград)*. **Об автоморфизмах свободных произведений.** Описываются при помощи производящих элементов и определяющих соотношений группы автоморфизмов свободного произведения конечного числа неразложимых компонент, среди которых нет бесконечных циклических групп.

А. Г. Курош *(Москва)*. **Локально свободные группы.** Группа называется локально свободной, если всякая ее подгруппа с конечным числом образующих является свободной. Основные свойства этого класса групп указаны в работе автора, опубликованной в ДАН, XXIV, 1939. Дополнительно отметим следующее свойство этих групп: фактор-группа локально свободной группы по ее коммутанту является абелевой группой без кручения. Обратно, всякая абелева группа без кручения служит в качестве фактор-группы по коммутанту для некоторой локально свободной группы.

ЗАСЕДАНИЕ ТРЕТЬЕ (14 ноября, вечер)

Председатель О. Ю. Шмидт

С. Н. Черников *(Свердловск)*. **Бесконечные специальные группы.** Группа называется специальной, если в ней выполняется условие минимальности для подгрупп и если всякая ее истинная подгруппа отлична от своего нормализатора. Подгруппа и фактор-группа специальной группы сами специальны. Специальная группа обладает центром и даже (трансфинитным) центральным рядом. Группа тогда и только тогда специальна, если она есть прямое произведение конечного числа локально конечных p-групп с условием минимальности. Отсюда следует локальная конечность и счетность специальной группы. Специальные p-группы и только они являются расширениями прямого произведения конечного числа квази-циклических p-групп при помощи конечной p-группы.

С. Н. Черников *(Свердловск)*. **Бесконечные локально-разрешимые группы.** Устанавливается связь между разрешимыми и локально-разрешимыми группами. Всякая разрешимая периодическая группа локально-разрешима. Обратно, всякая локально-разрешимая группа с условием минимальности для подгрупп будет разрешимой. К числу локально-разрешимых групп принадлежат, в частности, локально

специальные группы, т. е. группы, в которых всякое конечное подмножество порождает конечную специальную группу. Этот класс групп оказывается более широким, чем класс периодических групп, в которых всякая истинная подгруппа отлична от своего нормализатора.

П. Е. Дюбюк *(Москва)* **и А. В. Товбин** *(Киев)*. **Приложение методов теории конечных групп для исследования бесконечных групп и полугрупп.** 1. Авторы показывают, что многие полученные до сих пор в теории бесконечных групп результаты основаны на гомоморфизме этих групп с конечными, при условии существования у них подгрупп конечного индекса.

2. Авторы разрабатывают понятия порядка и индекса для бесконечных групп, которые обладают полной аналогией с такими же понятиями в теории конечных групп, что дает возможность изучить бесконечные группы, не имеющие подгрупп конечного индекса.

ЗАСЕДАНИЕ ЧЕТВЕРТОЕ (15 ноября, утро)

Председатель В. А. Тартаковский

О. Н. Головин *(Москва)*. **К теории прямых произведений групп.** При рассмотрении вопроса о существовании изоморфных подразбиений для двух любых прямых разложений группы оказывается возможным ограничиться случаем, когда в этих разложениях множителей без центра нет совсем или не больше, чем по одному. Отсюда следует, в частности, что теорема Коржинека остается справедливой и для прямых произведений с бесконечным числом множителей. С другой стороны, два прямых разложения произвольной группы, оставляющие центр этой группы неразложенным, всегда обладают изоморфными подразбиениями.

Е. С. Ляпин *(Ленинград)*. **О разложении абелевых групп в прямые суммы рациональных групп.** Цель доклада—сообщение некоторых необходимых и достаточных условий для разложимости абелевых групп в прямые суммы рациональных групп. Группа называется рациональной, если каждый конечный комплекс ее элементов порождает циклическую группу.

Пусть $\mathfrak{A}$ есть некоторый комплекс элементов абелевой группы $\mathfrak{G}$. Характеристикой $\mathfrak{A}$ $(X(\mathfrak{A}))$ называется совокупность всех таких натуральных чисел n, что для каждого из них найдется элемент $G_n \in \mathfrak{G}$, такой, что $nG_n \in \mathfrak{A}$. Комплекс $\mathfrak{A}$ называется нормальным, если существует такой элемент $A \in \mathfrak{A}$, что $X(A) = X(\mathfrak{A})$; $\mathfrak{T}$ обозначает периодическую подгруппу $\mathfrak{G}$, т. е. совокупность всех элементов $\mathfrak{G}$, имеющих конечные порядки. Для разложения $\mathfrak{G}$ в прямую сумму рациональных групп необходимо и достаточно, чтобы группы $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{G}/\mathfrak{T}$ допускали такое разложение и чтобы все классы смежности по $\mathfrak{T}$ были нормальны. Для разложения исчислимой группы без кручения также имеет место необходимое и достаточное условие, состоящее в своей главной части из условия нормальности некоторых определенным образом выбранных классов смежности.

Л. Я. Куликов *(Москва)*. **К вопросу о разложимости бесконечных абелевых групп.** Подгруппа B абелевой группы A называется сервантной в A, если для каждого элемента $b \subset B$ из разрешимости уравнения $nx = b$ в A следует его разрешимость в B. Тогда:

1. Счетная абелева группа A разлагается в прямую сумму циклических подгрупп тогда и только тогда, когда каждое конечное множество элементов группы можно заключить в группу S, допускающую конечное число образующих и сервантную в A. Отсюда следует критерий Понтрягина и теорема Прюфера.

2. Если B есть сервантная подгруппа абелевой группы G и порядки элементов B в совокупности ограничены, то B есть прямое слагаемое группы G.

И. М. Гельфанд *(Москва)*. **О характерах некоторого класса бесконечных групп.** Рассматривается группа $\mathfrak{G}$, в которой каждый класс сопряженных элементов состоит из конечного числа элементов. Для таких групп можно построить теорию характеров следующим образом.

На группе $\mathfrak{G}$ рассматриваются функции $f(x)$, отличные от нуля не более чем для счетного числа точек, и такие, что $\sum_{x \in \mathfrak{G}} |f(x)| < +\infty$.

Умножение этих функций определяем так:

$$f_1(x) \times f_2(x) = f(x), \quad \text{где} \quad f(x) = \sum_{y \in \mathfrak{G}} f_1(xy^{-1}) f_2(y).$$

Сложение определяем обычным образом. Полагая $\|f\| = \sum_{x \in \mathfrak{G}} |f_1(x)|$, получаем нормированное кольцо. Применяя к центру кольца результаты заметки автора в ДАН, XXIII, № 5, получаем основные соотношения теории характеров. (Характер группы $\mathfrak{G}$ определяется как гомоморфизм центра кольца на тело комплексных чисел.) В частности, множество характеров образует бикомпактное топологическое пространство.

В. Л. Нисневич *(Минск)*. **К вопросу о представлении групп матрицами.** В докладе сообщается пример матричной группы, заданной двумя образующими и бесконечной системой определяющих соотношений, причем эта система соотношений не может быть заменена эквивалентной конечной системой.

А. Г. Курош *(Москва)*. **Обзор некоторых проблем о бесконечных группах.** В докладе дается обзор основных проблем теории бесконечных групп. Важнейшими из них являются следующие: а) Будет ли конечной всякая периодическая группа с конечным числом образующих (проблема Бернсайда)? б) Можно ли всякую счетную группу вложить в группу с двумя образующими? в) Следует ли из условия минимальности для подгрупп счетность группы? г) Следует ли справедливость теоремы о существовании изоморфных подразбиений для прямых разложений группы из ее справедливости для центра группы? В частности, верна ли эта теорема для групп, центр которых есть прямое произведение некоторого множества конечных циклических и квазициклических групп? д) Остается ли справедливой теорема Ульма для несчетных примарных абелевых групп? е) Следует ли из структурного изоморфизма структур смежных классов двух групп групповой изоморфизм самих этих групп?

ЗАСЕДАНИЕ ПЯТОЕ (15 ноября, вечер)

Председатель Д. К. Фаддеев

И. А. Грушко *(Ленинград)*. **О базисах свободного произведения групп.** В работе устанавливаются связи между базисом свободного произведения и базисами его свободных множителей. Пусть группа $\mathfrak{G}$, порожденная образующими $g_1, g_2, \ldots, g_m$, есть свободное произведение групп $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$

Рассмотрим свободную группу $\mathfrak{F}$, порожденную образующими $\bar{g}_1, \bar{g}_2, \ldots, \bar{g}_m$. Пусть $\bar{g}_i' = \prod_k \bar{g}_{i_k}^{\varepsilon_k}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ какой-либо другой свободный базис $\mathfrak{F}$. Тогда система $g_i' = \prod_k g_{i_k}^{\varepsilon_k}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ образует базис группы $\mathfrak{G}$, называемый допустимым относительно $\left\{ g_i \right\}_{i=1}^{m}$.

Теорема. *По отношению к любому заданному базису группы $\mathfrak{G}$: $\left\{ g_i \right\}_{i=1}^{m}$ существует допустимый базис $\left\{ g_i' \right\}_{i=1}^{m}$, каждый элемент которого лежит в каком-*

нибудь из множителей свободного произведения. Очевидно, такой базис группы $\mathfrak{G}$ *должен представлять собою сумму базисов групп* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, ...

И. Н. Санов (*Ленинград*). **Решение проблемы Бернсайда о периодических группах для $n = 4$.** Проблема Бернсайда состоит в следующем: решить, будет ли группа с конечным числом образующих такая, что всякий ее элемент в степени n равен единице, сама конечна.

Другая постановка задачи: будет ли то же самое иметь место, если порядки всех элементов группы не превосходят n.

В докладе эта задача во второй постановке решается положительно для $n = 4$.

А. А. Марков (*Ленинград*). **Обзор работ по теории кос.** Доклад содержит изложение следующих еще не опубликованных результатов, полученных в последние годы в Ленинграде:

1. Н. М. Вайнбергом установлено, что проблема эквивалентности зацеплений равносильна следующей задаче:

Рассматриваются символы $\{w, n\}$, где n — натуральное число, w — последовательность знаков σ_i и σ_i^{-1} ($i = 1, \ldots, n-1$). Будем говорить, что два таких символа *эквивалентны*, если можно получить один из другого конечным числом операций типов $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$, $\mathfrak{T}_3$, $\mathfrak{T}_4$, $\mathfrak{T}_6$, описанных ранее [Мат. сб. 1 : 1 (1936), 73 — 78]. Требуется указать общий алгорифм, позволяющий узнавать, эквивалентны ли два данных символа $\{w, n\}$ и $\{w', n'\}$.

2. Другим автором найдено следующее решение проблемы тождества в группе кос $\mathfrak{Z}_n$. $\mathfrak{Z}_n$ содержит нормальный делитель $\mathfrak{R}_n$ индекса $n!$, порождаемый элементами $s_{i,j} = \sigma_{j-1} \ldots \sigma_{i+1} \sigma_i^2 \sigma_{i+1}^{-1} \ldots \sigma_{j-1}$. Каждый элемент группы $\mathfrak{R}_n$ может быть единственным образом представлен в виде $\prod_{j=2}^{n} f_j(s_{1,j}, \ldots, s_{j-1,j})$, где $f(x_1, \ldots, x_j)$ означает произведение степеней $x_1, \ldots, x_j$.

Докладчику удалось связать это решение с артиновским [E. Artin, Theorie der Zöpfe, Abh. math. Sem. Hamburg Univ. 4 : 1. (1925), 47 — 72] и получить чисто алгебраическое обоснование последнего.

3. Из изложенного выше следует, что $\mathfrak{R}_n$ имеет ряд нормальных делителей $(1) = \mathfrak{C}_{n,0} \subset \mathfrak{C}_{n,1} \subset \ldots \subset \mathfrak{C}_{n,n-1} = \mathfrak{R}_n$ такой, что $\mathfrak{C}_{n,h} / \mathfrak{C}_{n,h-1}$ есть свободная группа с $n - h$ свободными производящими элементами.

Н. А. Леднев (*Москва*). **О единицах относительно циклических алгебраических числовых полей.** В работе изучаются группы единиц относительно циклических числовых полей. Работа содержит обобщения теорем Куммера и Гильберта, относящихся к циклическим расширениям простой степени, на случай произвольных циклических расширений, причем одновременно расширяется запас тех групп единиц, к которым эти теоремы относятся. Новым методом доказывается также важнейший случай теоремы Эрбрана. Основную роль играют в работе группы единиц $E_{f(x)}$, определенным образом связанные с целочисленным полиномом $f(x)$.

ЗАСЕДАНИЕ ШЕСТОЕ (*16 ноября, утро*)

Председатель А. К. Сушкевич

Б. Н. Делоне (*Москва*). **Об одной асимптотической формуле в алгебре.** Рассматриваются решетки O в n-мерном комплексном пространстве K_n, повторяющиеся умножением, причем умножение точек K_n, как и сложение и вычитание, покоординатное. O «максимальна», если не есть часть такой же решетки. O «неприводима», если в O нет делителей нуля.

Лемма. *Всякая максимальная O либо неприводима, либо прямая сумма неприводимых.*

Число точек $N_{r, n, \tau}$ всех решеток O данной «сигнатуры» τ в шаре радиуса r выражается асимптотической формулой

$$c_{n, \tau} \cdot r^{\frac{n(n+1)}{2}} \tag{1}$$

где $c_{n, \tau}$—константа.

1° Соединение (1) с леммой дает доказательство теоремы существования бесконечного числа различных алгебраических расширений рационального поля данного измерения n и сигнатуры τ.

2° Из (1) получается, что либо решетки O при «возрастании» дискриминанта делаются все более и более «вытянутыми», либо дискриминанты полей растут, начиная с $n = 3$, медленнее арифметической прогрессии, а именно как ряд $\frac{4}{n+2}$-ых степеней натуральных чисел.

Б. Н. Делоне (*Москва*). **Геометрия теории Галуа.** Существование для всякой n-мерной решетки O нормальной решетки Ω и сопоставление подполей нормального поля подгруппам его группы Галуа выводится чисто геометрически из композиции решеток и леммы о разложении максимальной решетки в прямую сумму неприводимых решеток, причем фундаментальную роль играет матрица

$$\begin{matrix} 1 & 1 & . & . & . & n \\ 2 & 2 & . & . & n-1 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ n-1 & n & . & . & . & 2 \\ n & n-1 & . & . & 1 \end{matrix}$$

из $n!$ колонок всех $n!$ расположений n номеров, которую приходится читать по горизонталям.

Д. К. Фаддеев (*Ленинград*). **О плотностях целых точек чисто вещественных областей 4-го порядка с различными группами Галуа.** Уравнения 4-го порядка могут иметь 11 разных групп Галуа. Применение решения обратной задачи теории Галуа, основанного на геометрических соображениях, дает следующие асимптотические формулы для числа N точек всех четырехмерных чисто вещественных решеток O с данной группой Галуа в цилиндре, описанном вокруг шара радиуса r, для каждой из групп, кроме знакопеременной:

Группа	Симм.	8-го пор.	6-го пор.	4-го пор.	4-го цикл.	4-го Vierer	3-го пор.	2-го $E, (1, 2)$	2-го $E, (12)(34)$	1-го
$N =$	$c_1 r^{10}$	$c_2 r^6 \ln r$	$c_3 r^7$	$c_4 r^6$	$c_5 r^4 \ln r$	$c_6 r^4 \ln^3 r$	$c_7 r^4 \ln r$	$c_8 r^5$	$c_9 r^4 \ln r$	$c_{10} r^4$
остат. член	$O(r^9)$	$O(r^6)$	$O(r^6)$	$O(r^5)$	$O(r^4)$	$O(r^4 \ln^2 r)$	$O(r^4)$	$O(r^4)$	$O(r^4)$	$O(r^3)$

Б. Н. Делоне (*Москва*). **Решение обратной задачи теории Галуа для нормальных уравнений 6-й степени.** Групп 6-го порядка две: S и Z. Обе имеют циклический нормальный делитель H 3-го порядка. Нормальное поле Ω 6-го порядка проектируется параллельно подполю ω 2-го порядка, принадлежащему H, на четырехмерное пространство Q, ему перпендикулярное. Ω оказывается «опирающимся» на композит $\omega * \varepsilon$, где ε—поле корня 3-й степени из 1. Ω получается в случаях S и Z разными «распроектированиями» идеалов этого композита параллельно ω. Условия, налагаемые на эти идеалы для того, чтобы получалась группа S или Z, тоже различны. Дается способ находить все Ω с S и Z и $|D| < L$, опирающиеся на данный композит $\omega * \varepsilon$, и каждое по одному разу.

Д. К. Фаддеев (*Ленинград*). **Об относительном минимальном базисе.** Для целых чисел поля K степени n над алгебраическим полем k устанавливается возможность однозначного представления в виде $A = A_1\lambda_1 + A_2\lambda_2 + \ldots + A_n\lambda_n$, где

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ — некоторые определенные числа из K; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — числа из k, пробегающие определенные идеалы $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_n$ в k. Числовые совокупности $A_1\mathfrak{a}_1, A_2\mathfrak{a}_2, \ldots, A_n\mathfrak{a}_n$ называются минимальным относительным базисом. Каждой совокупности $A\mathfrak{a}$ сопоставляется символ M, называемый идеальным числом. Для этих чисел устанавливается умножение и сложение (последнее только в пределах одного класса). Тогда все целые $A = M_1\mu_1 + M_2\mu_2 + \ldots + M_n\mu_n$, где $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ пробегают все целые идеальные числа классов, обратных $M_1, M_2, \ldots, M_n$. Относительный дискриминант равен идеалу, порожденному квадратом определителя, составленного из идеальных чисел $M_1, M_2, \ldots, M_n$ и их относительно сопряженных.

ЗАСЕДАНИЕ СЕДЬМОЕ (16 ноября, вечер)

Председатель П. С. Александров

А. К. Сушкевич *(Харьков)*. **Об одном типе обобщенных групп.** Рассматривается система $\mathfrak{S}$ элементов с одним действием, для которого исполнены следующие постулаты:

1. Однозначность и неограниченная применимость.
2. Ассоциативный закон.
3. Левый закон однозначной обратимости.
4. Существование двусторонней единицы E.

Кроме этого все элементы из $\mathfrak{S}$ распределяются по рангам, причем:

5. Уравнение $AX = B$ разрешимо тогда и только тогда, если ранг B не ниже ранга A.
6. Если $AB = CD$, и A и C одного ранга, то и B и D тоже одного ранга.

Элемент E имеет самый низший ранг, который назовем нулевым; все элементы нулевого ранга составляют обычную группу $\mathfrak{G}$. Если A—любой элемент ранга, высшего, чем нулевой, то комплекс

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{G} + A\mathfrak{G} + A^2\mathfrak{G} + \ldots \text{ in inf.}$$

есть обобщенная полугруппа того же типа, что и $\mathfrak{S}$.

Как конкретные примеры рассмотренных обобщенных полугрупп рассматриваются:

1) совокупность подстановок исчислимого множества символов, обычных и «недостаточных», т. е. таких, в нижней строке которых отсутствует конечное число символов;

2) совокупность бесконечных матриц,—ортогональных и таких, которые состоят из неполной системы ортонормальных строк.

А. И. Мальцев *(Москва)*. **О расширениях ассоциативных систем.** Были доложены следующие результаты:

1. Указаны необходимые и достаточные условия для возможности включения полугрупп в группы.
2. Доказано, что всякое минимальное групповое расширение содержится как фактор-расширение в группе отношений.
3. Показано, что минимальные групповые расширения могут быть неизоморфными.
4. Указаны некоторые предложения о независимости групповых условий.

А. А. Марков *(Ленинград)*. **Некоторые теоремы о системах операторов.** Конечная последовательность элементов множества Ξ называется *словом* в Ξ. Множество $\mathfrak{R}$ упорядоченных пар слов в Ξ *слабо замкнуто* относительно Ξ, если: 1° $\{u, u\} \in \mathfrak{R}$, коль скоро u слово в Ξ; 2° $\{u, v\} \in \mathfrak{R}$, коль скоро $\{u, w\} \in \mathfrak{R}$ и $\{v, w\} \in \mathfrak{R}$; 3° $\{uv, uw\} \in \mathfrak{R}$ и $\{vu, wu\} \in \mathfrak{R}$, коль скоро u есть слово в Ξ и $\{v, w\} \in \mathfrak{R}$.

Множество $\mathfrak{R}$ *сильно замкнуто* относительно Ξ, если оно слабо замкнуто относительно Ξ и выполнено условие 4° $\{v, w\} \in \mathfrak{R}$, коль скоро $\{vu, wu\} \in \mathfrak{R}$.

Пересечение всех слабо [сильно] замкнутых относительно Ξ множеств, содержащих $\mathfrak{R}$, называется *слабым* [*сильным*] *замыканием* $\mathfrak{R}$ относительно Ξ и обозначается знаком $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}^{\Xi}$ ($\overrightarrow{\mathfrak{R}}^{\Xi}$).

Областью операторов в множестве E с основанием Ξ называется система $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ отображений φ_ξ множества E в себя, причем индекс ξ пробегает Ξ. Область операторов $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ *регулярна*, если φ_ξ есть отображение E на себя при всяком ξ из Ξ. Область операторов $\{\varphi^*_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ в E^* есть *продолжение* области операторов $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ в E, если $E \subset E^*$ и $\varphi^*_\xi x = \varphi_\xi x$ при всяком x из E и всяком ξ из Ξ.

Если $\mathfrak{R}$ множество пар слов в Ξ, то мы говорим, что $\{\varphi_\xi\}_{\xi \in \Xi}$ есть *представление (точное представление)* $\mathfrak{R}$, если $\varphi_{\xi_1} \ldots \varphi_{\xi_m} = \varphi_{\eta_1 \ldots \eta_n}$, коль скоро (в том и только в том случае, когда) $\{\xi_1 \ldots \xi_m, \eta_1 \ldots \eta_n\} \in \mathfrak{R}$.

1. *Для того чтобы множество $\mathfrak{R}$ пар слов в Ξ допускало точное (точное, регулярное) представление с основанием Ξ, необходимо и достаточно, чтобы это множество было слабо (сильно) замкнутым относительно Ξ.*

2. *Пусть $\mathfrak{R}$ множество пар слов в Ξ, $\{\varphi_\xi\}$ область операторов с основанием Ξ. Для того чтобы эта область операторов допускала регулярное продолжение, являющееся представлением $\mathfrak{R}$, необходимо и достаточно, чтобы она была представлением $\overrightarrow{\mathfrak{R}}^{\Xi}$.*

3. *Для того чтобы всякое представление с основанием Ξ множества $\mathfrak{R}$ допускало регулярное продолжение, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\overline{\mathfrak{R}}}^{\Xi} = \overrightarrow{\mathfrak{R}}^{\Xi}$.*

ЗАСЕДАНИЕ ВОСЬМОЕ (17 ноября, утро)

Председатель А. А. Марков

Л. И. Гаврилов *(Казань)*. **K-продолжаемые полиномы**. Задача продолжаемости полиномов ставится Н. Г. Чеботаревым следующим образом. Пусть дан полином

$$f(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

и некоторое свойство. Мы составляем новый полином

$$f_1(x) = f(x) + a_{n+1} x^{n+1} + \ldots + a_m x^m.$$

Спрашивается, можно ли подобрать коэффициенты $a_{n+1}, \ldots, a_m$ так, чтобы полином $f_1(x)$ приобрел указанное свойство.

Автором в 1936 г. было доказано (Известия Казанского физ.-мат. об-ва, VIII, 125—129), что всякий полином можно K-продолжить, т. е. корни полинома $f_1(x)$ сделать по модулю равными единице. При этом вещественный полином допускает вещественное продолжение.

В настоящей работе указывается способ нахождения коэффициентов продолженного полинома.

А. И. Узков *(Москва)*. **Мультипликативная теория идеалов в произвольных алгебрах.** В докладе изложено содержание печатаемой в «Математическом сборнике» работы автора «Абстрактное обоснование брандтовой теории идеалов»: мультипликативная теория идеалов, построенная для абстрактных коммутативных колец, переносится на некоммутативный случай. При этом получаются результаты, аналогичные результатам Брандта и Артина в теории идеалов полупростых алгебр. Затем с помощью найденных необходимых и достаточных условий для справедливости

этой теории показывается, что теория Брандта-Артина в действительности имеет место без тех ограничений, которые эти авторы налагали на структуру алгебры.

Ю. В. Линник *(Ленинград)*. **Аналитические методы в некоммутативной арифметике и теория тернарных форм.**

А. И. Герчиков *(Москва)*. **Разложение колец в прямые суммы тел.** В работе доказывается следующая теорема: *кольцо тогда и только тогда разлагается в прямую сумму некоторого множества тел, не обязательно коммутативных, если в нем* а) *отсутствуют нильпотентные элементы и* б) *выполняется условие минимальности для главных левых идеалов.*

Существенную роль в доказательстве играет введенное Нейманом понятие регулярного кольца, так как кольца со свойствами а) и б) оказываются регулярными.

Г. М. Шапиро *(Москва)*. **Теорема Жордана в теории структур.** Рассматривается структура, в которой существует элемент O и для некоторых пар элементов определено соотношение «подчинения», a подчиняется b («a подч. b»), так что:

1^1) a подч. a;

1^2) если a подч. c, $a \subseteq b \subseteq c$, то a подч. b, b подч. c;

1^3) если a подч. b, b подч. c, то a подч. c.

Если $a \subset b$ $(a \neq b)$ и из $a \subseteq x \subset b$ следует либо a подч. x, либо x подч. b, то «a прямо предшествует b» $(a < b)$.

Принимаем:

2) если a_1 подч. a, $a < b$, b подч. b_1, то $a_1 < b_1$;

3) если $0 < q$, то $a < a + q$, либо a подч. $a + q$;

4) если $a < b$, то существует $p > 0$, $a + p$ подч. b.

Если $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то a, b соединены цепью длины n.

Доказывается обобщение теоремы Жордана: *если a, b соединимы цепью длины n то любая цепь, их соединяющая, имеет длину n.*

Редактор В. А. Толстиков

Технический редактор Е. Шнобель Корректор А. Н. Ошер.
Сдано в набор 17/XII 1939 г. Подписано к печати 19/III 1940 г.
Формат бумаги 72×110 см. $8^1/_2$ печ. л. Уч. авт. л. 12,75; 45 000 зн. в печ. л.
Уполномоченный Главлита А-25818. Тираж 2 725 экз. АНИ № 1870. Заказ 2547.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный пер., 9.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Серия математическая 4 (1940), 137—150 Série mathématique

С. Н. БЕРНШТЕЙН

НОВЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ПОЧТИ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

Исследуются некоторые классы сумм зависимых величин, приводящихся к суммам почти независимых величин. Вводится понятие нормальных зависимых величин первого порядка, для сумм которых выводится необходимое и достаточное условие приложимости предельной теоремы, а также общая форма предельного закона.

1. В моей статье* «Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes» доказано следующее предложение:

Пусть

$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, *где* М. О. $u_i = 0$, $b_i =$ М. О. u_i^2, М. О. $S_n^2 = B_n$.

Если α_i, β_i *представляют соответственно максимумы колебаний условных математических ожиданий* u_i, u_i^2, *а* c_i *представляет максимум математического ожидания* $|u_i|^3$ *при произвольно заданных* $u_1, u_2, \ldots$ $\ldots, u_{i-1}$, *причем*

$$\frac{\sum_1^n \alpha_i}{\sqrt{B_n}} \to 0, \quad \frac{\sum_1^n \beta_i}{B_n} \to 0, \quad \frac{\sum_1^n c_i}{B_n^{\frac{3}{2}}} \to 0, \tag{1}$$

то вероятность неравенства $S_n < z\sqrt{B_n}$ *имеет пределом*

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Это предложение было там же (стр. 23—25) мною обобщено, однако практическое применение упомянутого обобщения часто требует дополнительных вычислений, которых обычно можно избежать при некотором изменении формулировки. Введем для этого следующие величины:

$$\underset{u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}}{\text{М.О.}} \ u_i = a_i,$$

где a_i представляет таким образом условное математическое ожидание u_i при заданных значениях $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$, и условные дисперсии

$$\underset{u_1, \ldots, u_{i-1}}{\text{М.О.}} (u_i - a_i)^2 = \underset{u_1, \ldots, u_{i-1}}{\text{М.О.}} u_i^2 - a_i^2 = b_i^*.$$

По условию, М.О. $a_i =$ М.О. $u_i = 0$ и кроме того

$$b_i = \text{М.О. } a_i^2 + \text{М.О. } b_i^*. \tag{2}$$

* Math. Ann., 97 (1926), 1—59.

Покажем, что в таком случае *высказанное вначале предложение будет справедливо, если условия* (1) *заменить менее ограничительными условиями* *

$$\frac{\text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2}{B_n} \to 0, \quad \frac{\text{М.О.}\,\sum_1^n |b_i - b_i^*|}{B_n} \to 0, \quad \frac{\sum_1^n c_i}{B_n^{\frac{3}{2}}} \to 0. \tag{3}$$

Доказательство аналогично данному в цитированной статье.

Положим $u_i - a_i = u_i'$, $\sum_1^n u_i' = S_n'$. Тогда $\text{М.О.}\, S_n' = 0$,

$$B_n' = \text{М.О.}\,(S_n')^2 = \text{М.О.}\,\sum_1^n b_i^*. \tag{4}$$

Но так как из равенства

$$B_n' = \text{М.О.}\,(S_n - \sum_1^n a_i)^2 = B_n - 2\,\text{М.О.}\,S_n \sum_1^n a_i + \text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2$$

следует, что

$$1 - 2\left(\frac{\text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2}{B_n}\right)^{1/2} + \frac{\text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2}{B_n} <$$

$$< \frac{B_n'}{B_n} < 1 + 2\left(\frac{\text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2}{B_n}\right)^{1/2} + \frac{\text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2}{B_n},$$

то, благодаря первому из условий (3), имеем

$$\frac{B_n'}{B_n} \to 1. \tag{5}$$

Заметим также, что из (2) и второго условия (3) вытекает

$$\frac{\text{М.О.}\,\sum_1^n a_i^2}{B_n} \to 0,$$

а потому из (4) и (5) следует также, что

$$\frac{\sum_1^n b_i}{B_n} \to 1. \tag{5bis}$$

Положим теперь $y_k = \dfrac{u_k'}{\sqrt{\sum_1^n b_i}}$; в таком случае, каковы бы ни были значения $y_1, \ldots, y_{k-1}$, условное математическое ожидание $\underset{y_1,\ldots,y_{k-1}}{\text{М.О.}}\, y_k = 0$ и $\underset{y_1,\ldots,y_{k-1}}{\text{М.О.}}\, y_k^2 = \dfrac{b_k^*}{\sum_1^n b_i}$. Вычислим последовательно характеристически

* Легко видеть, что условия (3) являются следствием условий (1), так как $|a_i| \leqslant \alpha_i$ и $|b_i - (a_i^2 + b_i^*)| \leqslant \beta_i$, откуда $|b_i - b_i^*| \leqslant \beta_i + \alpha_i^2$. Третье из условий (3), совпадающее с третьим условием (1), можно было бы заменить соответствующим условием Ляпунова $\dfrac{\sum_1^n \text{М.О.}\,|u_i|^3}{B_n^{\frac{3}{2}}} \to 0$, допустив лишь существование c_i.

функции $G_m(\xi) = \text{М.О.}\,(e^{i\xi\sum\limits_1^m y_k})$ $(m \leqslant n)$, полагая $-N < \xi < N$, где N — данное произвольно большое число. Для этого замечаем, что

$$\underset{y_1,\ldots,y_{k-1}}{\text{М.О.}}\; e^{i\xi y_k} = 1 - \frac{b_k^*}{2\sum\limits_1^n b_i} + \delta_k\,,$$

причем можно указать такую постоянную A, зависящую только от N, что

$$|\delta_k| < \frac{Ac_k}{B_n^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Таким образом

$$G_m(\xi) = \text{М.О.}\left[e^{i\xi\sum\limits_1^{m-1} y_k}\left(1 - \frac{b_m^*\xi^2}{2\sum\limits_1^n b_i} + \delta_m\right)\right] = G_{m-1}(\xi)\left(1 - \frac{b_m\xi^2}{2\sum\limits_1^n b_i}\right) + R_m(\xi).$$

где

$$|R_m(\xi)| = \left|\text{М.О.}\, e^{i\xi\sum\limits_1^{m-1} y_k}\left(\frac{(b_m - b_m^*)\,\xi^2}{2\sum\limits_1^n b_i} + \delta_m\right)\right| <$$

$$< \frac{N^2\,\text{М.О.}\,|b_m - b_m^*|}{2\sum\limits_1^n b_i} + \frac{Ac_m}{B_n^{\frac{3}{2}}}\,.$$

Следовательно

$$G_m(\xi) = E_m(\xi)\left[1 + \sum_1^m \frac{R_k(\xi)}{E_k(\xi)}\right],$$

где

$$E_m(\xi) = \prod_1^m \left(1 - \frac{b_k\xi^2}{2\sum\limits_1^n b_i}\right). \tag{6}$$

Поэтому, замечая, что $\left|\frac{E_m}{E_k}\right| < 1$ при $m > k$, и $\sum\limits_1^n |R_k(\xi)|$ стремится к нулю при возрастании n вследствие (3), видим, что

$$|G_m(\xi) - E_m(\xi)| < \sum_1^m |R_k(\xi)| \quad (m \leqslant n)$$

стремится также к нулю при бесконечном возрастании n. Но, беря логарифмы обеих частей равенства (6) для $m = n$, находим без труда, что

$$\lim_{n=\infty} E_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}},$$

а потому и

$$\lim_{n=\infty} G_n(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

в любом промежутке $-N < \xi < N$. Отсюда, как известно, вытекает, что вероятность неравенства

$$\sum_1^n y_i < z$$

имеет пределом

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Следовательно, благодаря (5^{bis}), к тому же пределу стремится вероятность неравенства

$$S_n - \sum_1^n a_i = S'_n < z\sqrt{B_n}.$$

Наконец, принимая во внимание первое из условий (3), находим*, что к тому же пределу $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ стремится также и вероятность неравенства $S_n < z\sqrt{B_n}$, что и требовалось доказать.

2. Величины, удовлетворяющие условиям (3), где третье условие можно было бы заменить любым другим условием Ляпунова или условием Линдберга, будем называть почти независимыми величинами.

В цитированной выше статье я показал, что суммы $\sum_1^n x_i$ случайных величин, образующих цепь Маркова или связанных аналогичной более общей зависимостью, приводятся путем надлежащей группировки слагаемых и разбиения цепи к суммам почти независимых величин, вследствие чего к ним применима основная предельная теорема теории вероятностей. Здесь я хочу рассмотреть зависимые величины несколько другого типа, для изучения которых оказалось целесообразно обобщить вышеуказанным образом определение почти независимых величин, заменив условия (1) условиями (3). Предварительно докажем следующую лемму:

Пусть $\beta_i =$ макс $|b_i - b_i^*|$ *и* $\beta_{i,t} =$ макс $|b_i - b_{i,t}^*|$, *где* $b_{i,t}^*$ *представляет условную дисперсию* u_i, *соответствующую лишь таким значениям* $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$, *которые удовлетворяли неравенству*

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_{i-1} - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1})| \leq t\sqrt{B'_n}. \quad (7)$$

* Первое из условий (3) можно было бы заменить немного менее ограничительным условием $\frac{\text{М.О.} |\sum_1^n a_i|^\delta}{B_n^{\frac{\delta}{2}}} \to 0$ для некоторого $\delta > 0$. Легко видеть, что предельная теорема, которую можно тогда назвать «несобственной», была бы также применима, но дисперсия предельного закона могла бы при этом не совпадать с дисперсией суммы (равенство $\frac{B_n}{B'_n} \to 1$ могло бы быть нарушено, если $\delta < 2$).

В таком случае, если $\frac{\sum_1^n \beta_{i,t}}{B_n} \to 0$ *при любом данном* $t > 0$, *а* $\frac{\sum_1^n \beta_i}{B_n}$ *остается ограниченной, то соблюдается второе условие* (3).

Действительно, вероятность, что неравенства (7) будут осуществлены [ДАН, XVII (1937), № 6] при всех $i \leq n$, больше, чем $1 - \frac{1}{t^2}$. Поэтому

$$\text{М.О.} \sum_1^n |b_i - b_i^*| < \sum_1^n \beta_{i,t} + \frac{1}{t^2} \sum_1^n \beta_i .$$

Следовательно

$$\frac{\text{М.О.} \sum_1^n |b_i - b_i^*|}{B_n} \to 0 \tag{3п}$$

при $n \to \infty$.

Напомним, что первое из условий (3) влечет за собой $\frac{B'_n}{B_n} \to 1$, поэтому при наличии этого условия в неравенствах (7), определяющих $\beta_{i,t}$, можно заменить B'_n через B_n.

3. В качестве примера рассмотрим стохастическую схему, предложенную мною в курсе «Теории вероятностей» (2-е изд., стр. 135—139).

В ящике находится a белых и b черных шаров. Производится n опытов, заключающихся в случайном вынимании одного шара с возвращением последнего и прибавлением еще R шаров, причем в случае появления белого шара добавляем ν белых шаров и $\rho = R - \nu$ черных шаров, а в случае появления черного шара добавляется ν_1 белых шаров и $\rho_1 = R - \nu_1$ черных шаров.

Обозначая через x_n число белых шаров в ящике после n опытов, нетрудно проверить (ibid., стр. 136), что

$$A_n = \text{М.О. } x_n = \frac{\nu_1}{\nu_1 + \rho}(nR + a + b) + \frac{a\rho - b\nu_1}{\nu_1 + \rho} \prod_1^{n-1} \left(1 + \frac{\delta}{a + b + iR}\right), \tag{8}$$

где $\delta = \nu - \nu_1 = \rho_1 - \rho$, за исключением случая $\nu_1 = \rho = 0$, когда $A_n = \frac{a}{a+b}(nR + a + b)$. Кроме того (ibid., стр. 139)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{B_n}{n} = \frac{R\nu_1\rho\delta^2}{(R - 2\delta)(R - \delta)^2}$$

при условии, что $\frac{2\delta}{R} < 1$, где $B_n = \text{М.О.}\,(x_n - A_n)^2$. Покажем, что *вероятность неравенства*

$$x_n - A_n < z\sqrt{B_n}$$

имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$, *если* $\frac{2\delta}{R} < 1$ *и* $\delta^2\nu_1\rho > 0$. С этой целью положим

$$x_{k+1} - x_k\left(1 + \frac{\delta}{a + b + kR}\right) = \alpha_k . \tag{9}$$

В таком случае

$$x_k = P_{k-1}\left[a + \sum_{0}^{k-1} \frac{z_i}{P_i}\right], \tag{10}$$

где

$$P_i = \prod_{0}^{i}\left(1 + \frac{\delta}{a+b+lR}\right).$$

С другой стороны, заметим, что после k опытов общее число шаров в ящике всегда равно $a+b+kR$, при этом, если число белых шаров оказалось равным x_k, то каковы бы ни были результаты предыдущих опытов, x_{k+1} может получить лишь два значения $x_k+\nu$ или $x_k+\nu_1$ с соответствующими вероятностями $\frac{x_k}{a+b+kR}$ и $1-\frac{x_k}{a+b+kR}$. Поэтому

$$\underset{x_1,\ldots,x_k}{\text{М.О.}}\,(x_{k+1}-x_k) = \frac{\nu x_k}{a+b+kR} + \nu_1\left(1-\frac{x_k}{a+b+kR}\right) = \nu_1 + \frac{\delta x_k}{a+b+kR}.$$

Таким образом, полагая $\alpha_k = \nu_1 + z_k$, находим вследствие (9), что

$$\underset{z_1,\ldots,z_{k-1}}{\text{М.О.}}\; z_k = 0. \tag{11}$$

Отсюда, в частности, следует, что $\text{М.О.}\, z_k = 0$, а потому $\text{М.О.}\, \alpha_k = \nu_1$ и из (10) получаем формулу

$$A_k = \text{М.О.}\, x_k = P_{k-1}\left(a + \nu_1 \sum_{1}^{k-1} \frac{1}{P_i}\right), \tag{8bis}$$

которую (при $k=n$) можно после простых преобразований привести к виду (8). Таким образом

$$x_n = A_n + S_n,$$

где

$$S_n = P_{n-1}\sum_{0}^{n-1}\frac{z_i}{P_i} = \sum_{1}^{n} u_i. \tag{12}$$

Нам остается только доказать, что величины $u_i = \frac{P_{n-1}}{P_{i-1}} z_{i-1}$ почти независимы, т. е. удовлетворяют условиям (3). Первое из условий (3), благодаря (11), удовлетворено, так как

$$a_k = \underset{u_1,\ldots,u_{k-1}}{\text{М.О.}}\; u_k = \frac{P_{n-1}}{P_{k-1}} \underset{z_0,\ldots,z_{k-2}}{\text{М.О.}}\; z_{k-1} = 0. \tag{11bis}$$

С другой стороны, из (9) следует, что $-\nu \leq \alpha_k \leq 2\nu_1 + \nu$, поэтому $|z_k| \leq \nu_1 + \nu$, откуда

$$|u_k| \leq (\nu_1+\nu)\frac{P_{n-1}}{P_{k-1}} = (\nu_1+\nu)\prod_{k}^{n-1}\left(1+\frac{\delta}{a+b+iR}\right),$$

так что

$$|u_k| \leq (\nu_1+\nu)\, e^{\delta \sum_{k}^{n-1} \frac{1}{a+b+iR}} < C\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{\delta}{R}}, \tag{13}$$

где C — некоторая постоянная.

Таким образом третье из условий (3) также соблюдается, когда $\frac{2\delta}{R} < 1$, $\delta^2\rho\nu_1 > 0$, так как вследствие $\frac{1}{B_n} = O\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\frac{\text{М.О.}\sum_1^n |u_k|^3}{B_n^{\frac{3}{2}}} < C_1 \frac{\sum_1^n \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{3\delta}{R}}}{n^{\frac{3}{2}}}, \tag{13bis}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Но если $\frac{3\delta}{R} < 1$, то $\sum_1^n \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{3\delta}{R}} = O(n)$; если $\frac{3\delta}{R} = 1$, то $\sum_1^n \frac{n}{k} = O(n \log n)$; если $\frac{3\delta}{R} > 1$, то $\sum_1^n \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{3\delta}{R}} = O(n^{\frac{3\delta}{R}})$, поэтому $\frac{\sum_1^n \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{3\delta}{R}}}{n^{\frac{3}{2}}} \to 0$ при условии, что $\frac{2\delta}{R} < 1$.

Покажем, наконец, что при сделанных предположениях соблюдается и второе из условий (3). Для этого мы воспользуемся доказанной выше леммой; принимая во внимание, что $x_{k+1} - x_k$ получают значения ν и ν_1 с соответственными вероятностями $\frac{x_k}{a+b+kR}$ и $1 - \frac{x_k}{a+b+kR}$, имеем

$$\underset{z_0,\ldots,z_{k-1}}{\text{М.О.}}\ z_k^2 = \underset{x_k}{\text{М.О.}} \left[x_{k+1} - x_k\left(1 + \frac{\delta}{a+b+kR}\right) - \nu_1\right]^2 =$$

$$= \frac{x_k}{a+b+kR}\left(\delta - \frac{\delta x_k}{a+b+kR}\right)^2 + \left(1 - \frac{x_k}{a+b+kR}\right)\frac{\delta^2 x_k^2}{(a+b+kR)^2} =$$

$$= \frac{\delta^2 x_k}{a+b+kR}\left(1 - \frac{x_k}{a+b+kR}\right);$$

поэтому

$$b_{k+1}^* = \underset{u_1,\ldots,u_k}{\text{М.О.}}\ u_{k+1}^2 = \frac{P_{n-1}^2}{P_k^2}\,\frac{\delta^2 x_k}{a+b+kR}\left(1 - \frac{x_k}{a+b+kR}\right). \tag{14}$$

Следовательно

$$|b_k^* - b_k| < \frac{\delta^2}{4}\,\frac{P_{n-1}^2}{P_{k-1}^2} = \frac{\delta^2}{4}\prod_k^{n-1}\left(1 + \frac{\delta}{a+b+iR}\right)^2,$$

т. е.

$$|b_k^* - b_k| < C_2\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{2\delta}{R}},$$

где C_2 — некоторая постоянная; поэтому, обозначая попрежнему через $\beta_k = \text{макс}\,|b_k^* - b_k|$, имеем

$$\sum_1^n \beta_k < C_3 n, \tag{15}$$

где C_3 — некоторая постоянная, а потому второе условие леммы соблюдено. С другой стороны, из (14) находим, что

$$b_{k+1} = \text{М.О.}\, u_{k+1}^2 = \frac{\delta^2 P_{n-1}^2}{P_k^2}\left[\frac{\text{М.О.}\, x_k}{a+b+kR} - \frac{\text{М.О.}\, x_k^2}{(a+b+kR)^2}\right] =$$

$$= \frac{\delta^2 P_{n-1}^2}{P_k^2}\left[\frac{A_k}{a+b+kR} - \frac{A_k^2 + B_k}{(a+b+kR)^2}\right]; \tag{14bis}$$

но неравенство

$$|u_1+u_2+\ldots+u_k|\leqslant t\sqrt{B_n}, \qquad (7^{bis})$$

т. е.

$$\left|P_{n-1}\sum_0^{k-1}\frac{z_i}{P_i}\right|\leqslant t\sqrt{B_n},$$

равноценно неравенству

$$\left|P_{k-1}\sum_0^{k-1}\frac{z_i}{P_i}\right|=|x_k-A_k|\leqslant\frac{P_{k-1}}{P_{n-1}}t\sqrt{B_n}<C_4tn^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{\delta}{R}}, \qquad (16)$$

где, согласно предыдущим вычислениям, C_4 — некоторая постоянная. Следовательно (пользуясь обозначениями леммы), заключаем из (14) и (14^{bis}), что

$$|b^*_{k+1,t}-b_{k+1}|=\beta_{k+1,t}<\frac{\delta^2P^2_{n-1}}{P^2_k}\left[\frac{C_4tn^{\frac{1}{2}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{\delta}{R}}}{a+b+kR}+\frac{B_k}{(a+b+kR)^2}\right]<$$

$$<C_5\frac{tn^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{R}}}{k^{1+\frac{\delta}{R}}}+C_6\frac{n^{\frac{2\delta}{R}}}{k^{1+\frac{2\delta}{R}}}, \quad \left(\frac{2\delta}{R}<1\right), \qquad (17)$$

где C_5 и C_6 — некоторые постоянные. Поэтому, при $\delta>0$, $\sum_1^n\beta_{k,t}=O(tn^{\frac{1}{2}+\frac{\delta}{R}})$; при $\delta<0$, $\sum_1^n\beta_{k,t}=O(tn^{\frac{1}{2}})$, а следовательно второе условие леммы также удовлетворено, и тем самым наше утверждение полностью доказано.

В случае $\frac{2\delta}{R}=1$, как легко видеть (ibid., стр. 139),

$$\lim\frac{B_n}{n\log n}=\frac{\rho\nu_1R^2}{4(\rho+\nu_1)^2}=\rho\nu_1.$$

Кроме того неравенство (13^{bis}) заменится неравенством

$$\frac{\text{М.О.}\sum_1^n|u_i^3|}{B_n^{\frac{3}{2}}}<C_1\frac{\sum_1^n\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{3}{2}}}{n^{\frac{3}{2}}(\log n)^{\frac{3}{2}}}\to 0,$$

поэтому третье из условий (3) соблюдено. Неравенство (15) заменится неравенством

$$\sum_1^n\beta_k<\sum_1^nC_2\left(\frac{n}{k}\right)<C_3n\log n,$$

поэтому второе условие леммы соблюдено, и наконец, неравенство (16) заменится неравенством

$$|x_k-A_k|<C_4t\sqrt{k\log n},$$

поэтому неравенство (17) заменится неравенством

$$\beta_{k+1,t}<\frac{C_5tn\sqrt{\log n}}{k^{\frac{3}{2}}}+C_6\frac{n\log k}{k^2},$$

откуда

$$\sum_1^n \beta_{k,t} = O(tn\sqrt{\log n}),$$

и второе условие леммы также осуществлено. Следовательно, при $\frac{2\delta}{R} = 1$, предельная теорема также применима к x_k, т. е. вероятность неравенства

$$x_n - 2\nu_1 n < t\sqrt{\rho\nu_1 n \log n}$$

имеет пределом $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.

В случае, когда $\frac{2\delta}{R} > 1$, условия (3) не соблюдаются и можно доказать, что закон вероятностей для x_n уже не стремится к нормальному.

4. Сделаем еще несколько замечаний общего характера. Будем называть систему случайных величин н о р м а л ь н о й, если она удовлетворяет третьему из условий (3)

$$\frac{\sum_1^n c_i}{B_n^{\frac{3}{2}}} \to 0 \tag{3_{III}}$$

(или соответствующему условию типа Ляпунова любой степени), и будем говорить, что *величины u_i связаны зависимостью первого порядка, когда соблюдается первое условие* (3)

$$\frac{\text{М.О.}\,(\sum_1^n a_i)^2}{B_n} \to 0. \tag{3_I}$$

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы к сумме $\sum_1^n u_i$ нормальных случайных величин, связанных зависимостью первого порядка, была применима предельная теорема, необходимо и достаточно, чтобы вероятность неравенства*

$$\left|\frac{\sum_1^n b_k^*}{B_n} - 1\right| < \varepsilon \tag{18}$$

имела пределом 1 при $n \to \infty$, как бы мало ни было данное $\varepsilon > 0$.

Действительно, мы видели, что в случае зависимости первого порядка (5)

$$\frac{B'_n}{B_n} \to 1$$

и предельный закон вероятностей для $\frac{\sum_1^n u_i}{\sqrt{B_n}}$ тот же, что для $\frac{\sum_1^n u'_i}{\sqrt{B_n}} = \sum_1^n y_i$. В таком случае, благодаря условию (3_{III}), характеристическая

функция $G_n(\xi)$ для $\sum\limits_1^n y_i$ равна

$$G_n(\xi) = \text{М.О.} \prod_1^n \left(1 - \frac{b_k^* \xi^2}{2B_n} + \delta_k\right),$$

где, при $|\xi| < N$, $\delta_k \to 0$ $(k \leqslant n)$, когда $n \to \infty$; вследствие (3_{III}) имеем также $\frac{b_n^*}{B_n} \to 0$ и

$$\frac{\sum\limits_1^n (b_k^*)^2}{B_n^2} < \frac{\sum\limits_1^n (b_k^*)^{\frac{3}{2}}}{B_n^{\frac{3}{2}}} < \frac{\sum\limits_1^n c_k}{B_n^{\frac{3}{2}}} \to 0 \text{ при } n \to \infty;$$

поэтому

$$\log \prod_1^n \left(1 - \frac{b_k^* \xi^2}{2B_n} + \delta_k\right) = -\frac{\sum\limits_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n} + \sum_1^n \delta_k - \frac{1}{2} \sum_1^n \left(\frac{b_k^* \xi^2}{2B_n} - \delta_k\right)^2 - \ldots =$$
$$= -\frac{\sum\limits_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n} + \varepsilon_n \quad (-N < \xi < N),$$

где $\varepsilon_n \to 0$. Следовательно

$$\left| G_n(\xi) - \text{М.О.}\, e^{-\frac{\sum\limits_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n}} \right| \to 0 \quad (n \to \infty). \tag{19}$$

Но полагая вероятность неравенства (18) равной P, имеем

$$(1-P)\frac{\varepsilon\xi^2}{2} e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}\xi^2} < \left| \text{М.О.}\, e^{-\frac{\sum\limits_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n}} - e^{-\frac{\xi^2}{2}} \right| <$$
$$< \frac{P\varepsilon\xi^2}{2} e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}\xi^2} + 1 - P < \frac{P\varepsilon}{1-\varepsilon} + 1 - P.$$

Таким образом, если $P \to 1$ при произвольном ε, то $G_n(\xi) \to e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, и наоборот, если $G_n(\xi) \to e^{-\frac{\xi^2}{2}}$, то необходимо, чтобы $P \to 1$ при любом данном ε.

Не исключена возможность осуществления условия, аналогичного (18), где вместо B_n стоит другая величина C_n, тогда будет осуществляться «несобственная» предельная теорема.

С предыдущим доказательством связано

Следствие. *Если нормальные величины u_i связаны зависимостью первого порядка, то вероятность $F_n(t)$ неравенства*

$$S_n < t\sqrt{B_n} \tag{20}$$

стремится к некоторому определенному пределу $F(t)$ тогда и только тогда, когда вероятность неравенства

$$\frac{\sum\limits_1^n b_k^*}{B_n} < \sigma \quad (\sigma > 0) \tag{21}$$

стремится к определенному пределу $h(\sigma)$. *При этом*

$$F'(t) = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t^2}{2\sigma}}}{\sqrt{2\pi\sigma}}\, dh(\sigma) \quad (t \gtrless 0)$$

и $$F(+0) - F(-0) = h(+0). \tag{22}$$

В самом деле, характеристическая функция распределения, определенного формулами (22), равна

$$G(\xi) = \int_0^\infty e^{-\frac{\sigma\xi^2}{2}}\, dh(\sigma) + h(+0). \tag{23}$$

С другой стороны, обозначая через $h_n(\sigma)$ вероятность (21), имеем

$$\text{М.О. } e^{-\frac{\sum_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n}} = \int_0^\infty e^{-\frac{\sigma\xi^2}{2}}\, dh_n(\sigma) + h_n(+0) \tag{24}$$

и видим, что если $h_n(\sigma) \to h(\sigma)$ во всех точках непрерывности, тогда

$$\text{М.О. } e^{-\frac{\sum_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n}} \to G(\xi),$$

а потому, в силу (19), $G_n(\xi) \to G(\xi)$, откуда следует, что вероятность $F_n(t)$ неравенства (20) стремится к $F(t)$. Наоборот, если $F_n(t)$ стремится к некоторому пределу, то необходимо, чтобы $G_n(\xi)$, а следовательно и М.О. $e^{-\frac{\sum_1^n b_k^* \xi^2}{2B_n}}$ стремились к пределу; но так как (24) есть функция абсолютно монотонная относительно $-\xi^2$ (при $\xi^2 > 0$), то предел ее должен также представлять абсолютно монотонную функцию, т. е. иметь форму (23), где монотонная функция $h(\sigma)$ должна быть пределом $h_n(\sigma)$, так как абсолютно монотонная функция допускает лишь одно единственное представление в форме (23).

Таким образом, если некоторая случайная величина x может быть рассматриваема как предел суммы бесконечно большого числа нормальных величин, связанных зависимостью первого порядка, то ее также можно рассматривать как принадлежащую к коллективу Ω, являющемуся пределом множества различных коллективов Ω_i с общим центром 0, но с различными дисперсиями σ_i, причем вероятность, что x взята из коллектива Ω_i, равна p_i. Другими словами, закон распределения x может быть представлен с какой угодно точностью при помощи распределения, плотность которого равна

$$p(x) = \sum_1^m \frac{p_i e^{-\frac{x^2}{2\sigma_i}}}{\sqrt{2\pi\sigma_i}} \qquad \left(p_i > 0, \quad \sum_1^m p_i = 1\right)$$

(при этом, если $\sum_{1}^{m} p_i < 1$, то равенство $x=0$ имеет конечную вероятность).

Следует еще отметить, что в данном случае, т. е. если закон вероятностей $F(t)$ определяется формулой (22), то

$$\frac{\text{М.О. } t^4}{3(\text{М.О. } t^2)^2} = \frac{\int_0^\infty z^2\, dh(z)}{\left[\int_0^\infty z\, dh(z)\right]^2} \geqslant \frac{1}{1-h(+0)} \geqslant 1,$$

причем оба знака равенства имеют место лишь тогда, когда $dh(z)=0$ при всех значениях z кроме одного и $h(+0)=0$; поэтому условие $\frac{\text{М.О. } t^4}{3[\text{М.О. } t^2]^2}=1$ необходимо и достаточно для того, чтобы закон $F(t)$ был законом Гаусса. (Нужно однако иметь в виду, что дисперсия, а тем более математическое ожидание 4-й степени распределения $F(t)$ могут не быть пределами, соответствующими $F_n(t)$.)

Замечание. Если бы мы отбросили одно из условий (условие зависимости первого порядка или условие нормальности), наложенных на слагаемые u_i суммы $\sum_{1}^{n} u_i$, то предельный закон вероятностей мог бы быть совершенно произвольным. В самом деле, пусть x будет какая-нибудь случайная величина с любым данным законом вероятностей, которую для простоты предположим ограниченной $|x|<c$ с М.О. $x=0$, М.О. $x^2=1$. Пусть $S_n=\sum_{1}^{n} u_i$, где закон вероятностей u_i совпадает с законом вероятностей x и кроме того $u_i=u_k$ $(i\leqslant n,\ k\leqslant n)$. В таком случае $B_n=\text{М.О.} S_n^2=n^2$, $\frac{\sum_{1}^{n} \underset{u_1,\ldots,u_{i-1}}{\text{М.О.}} |u_i|^3}{B_n^{\frac{3}{2}}} < \frac{c^3 n}{n^{\frac{3}{2}}}$, так что условие нормальности (3_{III}) соблюдено, между тем закон вероятностей для $t=\frac{S_n}{\sqrt{B_n}}=\frac{\sum_{1}^{n} u_i}{n}$ при любом n совпадает с данным законом (здесь условие (3_{I}) очевидно нарушено).

Возьмем другой пример, где, напротив, условие (3_{I}) соблюдено, но условие (3_{III}) нарушено. Предположим для определенности, что мы хотим получить в качестве предельного закона какой-нибудь симметричный закон, при котором равенства $x=\pm t_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ имели бы данные вероятности p_k $\left(\sum_{1}^{\infty} p_k=1,\quad \sum_{1}^{\infty} p_k t_k^2=\text{М.О. } x^2=B\right)$. Для этого полагаем $S_n=\sum_{1}^{n} u_i$, причем каждая из случайных величин u_i имеет

вероятность p_k быть равной $u_{i,k}$ (равенства $u_i = u_{i,k}$ происходят совместно для всех $i \leq n$). Каждая из величин $u_{i,k}$ может получать лишь оба значения $\pm \frac{1}{2} t_k$ с одинаковыми вероятностями или быть равна нулю. Кроме того $u_{i+1,k} \gtrless 0$ до тех пор, пока $\left|\sum_{h=1}^{i} u_{h,k}\right| < t_k$; если же $\left|\sum_{h=1}^{i} u_{h,k}\right| = t_k$, то $u_{i+s,k} = 0$ при всех $s > 0$. Очевидно, что в таком случае $\underset{u_1, \ldots, u_i}{\text{М.О.}}\, u_{i+1} = 0$, т. е. зависимость между величинами u_i первого порядка. С другой стороны, легко проверить, что вероятность равенства $S_n = \pm t_k$, когда известно, что все $u_i = u_{i,k}$, равна $1 - \frac{1}{2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}$, т. е. стремится к достоверности при $n \to \infty$; следовательно предельный закон вероятностей для S_n совпадает с данным (условие нормальности нарушено, М.О. $|u_1|^3 \geq (\text{М.О. } u_1^2)^{\frac{3}{2}} = \left[\text{М.О.}\left(\frac{x}{2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$, поэтому $\frac{\sum_1^n c_i}{B^{\frac{3}{2}}} > \frac{\frac{1}{8} B^{\frac{3}{2}}}{B^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{8}$).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
5. II. 1940.

S. BERNSTEIN. NOUVELLES APPLICATIONS DES GRANDEURS ALÉATOIRES PRESQU'INDÉPENDANTES

RÉSUMÉ

L'auteur modifie la définition des grandeurs aléatoires presqu'indépendantes qu'il avait donnée antérieurement * de la façon suivante:

Les grandeurs $u_1, u_2, \ldots, u_n$ sont dites presqu'indépendantes, lorsqu'elles satisfont aux conditions:

$$\frac{\text{E. M.}\left(\sum_1^n a_i\right)^2}{B_n} \to 0, \qquad \frac{\text{E. M.} \sum_1^n |b_i^* - b_i|}{B_n} \to 0$$

et à l'une des conditions de Liapounoff $\left(\frac{\text{E. M.} \sum_1^n |u_i|^{2+\delta}}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \to 0\right)$.

On suppose ici que $\text{E. M. } u_i = 0$; $\text{E. M. } u_i^2 = b_i$, $\text{E. M.}\left(\sum_1^n u_i\right)^2 = B_n$; de plus, a_i désigne l'éspérance mathématique conditionnelle de u_i, b_i^* désigne la dispersion conditionnelle de u_i, lorsque $u_1, \ldots u_{i-1}$ sont connues, et on admet l'existence de l'espérance mathématique conditionnelle de $|u_i|^{2+\delta}$.

* Math. Ann., 97 (1926), 1—59.

On démontre que *le théorème limite est applicable aux sommes de grandeurs presqu'indépendantes ainsi définies.* Ce théorème est ensuite appliqué à l'exemple suivant:

On considère une urne contenant a boules blanches et b boules noires. Chaque expérience successive consiste à tirer une boule au hosard, en la remettant ensuite et en ajoutant eu même temps R boules, dont ν blanches et $\rho = R - \nu$ noires, si la boule tirée était blanche, et en ajoutant ν_1 boules blanches et $\rho_1 = R - \nu_1$ boules noires dans le cas contraire. On demande la loi de répartition du nombre x_n de boules blanches qui se trouvera dans l'urne après n expériences.

L'auteur démontre que *cette répartition satisfera à la loi de Gauss pour* $n \to \infty$, *si* $\rho\nu_1(\nu - \nu_1) \gtrless 0$ *et* $\nu < \rho + 2\nu_1$.

En remplaçant la condition de Liapounoff par la condition un peu plus restrictive que $\frac{\sum_1^n c_i}{B_n^{1+\frac{\delta}{2}}} \to 0$, où c_i représente le maximum de l'espérance mathématique conditionnelle de $|u_i|^{2+\delta}$, lorsque $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$ sont connues *, l'auteur appelle normales les grandeurs aléatoires qui satisfont à cette condition unique; il dit d'autre part que les grandeurs aléatoires u_i sont en liaison de premier ordre, si elles satisfont à la seule condition

$$\frac{\mathrm{E.\,M.}\left(\sum_1^n a_i\right)^2}{B_n} \to 0.$$

On démontre alors que *la condition nécessaire et suffisante pour que la loi limite de répartition de* $\sum_1^n u_i$, *où* u_i *sont des grandeurs aléatoires normales en liaison de premier ordre, soit la loi normale* (avec la même dispersion B_n), *est que la probabilité de l'inégalité*

$$\left|\frac{\sum_1^n b_i^*}{B_n} - 1\right| > \varepsilon$$

tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$, *quel que soit* $\varepsilon > 0$.

On donne ensuite la forme générale des lois limites des sommes $\sum_1^n u_i$ de grandeurs normales en liaison de premier ordre; on construit enfin des exemples qui montrent que la loi limite de $\sum_1^n u_i$ peut être absolument arbitraire, si on se débarrasse d'une des conditions, soit de la normalité, soit de l'existence d'une liaison de premier ordre entre les u_i.

* C'est la condition qui figurait dans mon ancienne définition de la presqu'indépendence.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 151–180 Série mathématiqu

С. П. ФИНИКОВ

СЕТИ РОЗЕ

(*Представлено академиком* С. А. Чаплыгиным)

Конгруэнцией Розе называется конгруэнция, на всяком луче которой первое преобразование Лапласа одного фокуса, второй фокус и его два преобразования Лапласа лежат в одной плоскости. Фокальные сети этой конгруэнции суть сети Розе. Автор исследует, когда эти сети содержат конгруэнции W или когда вся последовательность Лапласа состоит из конгруэнций Розе, а также фокальные поверхности этой последовательности.

В своей статье «Sur une congruence particulière de droites» Розе [1] рассматривает новый вид конгруэнций. Он определяет эту конгруэнцию уравнением в частных производных 3-го порядка (определенного типа), которому удовлетворяют плюккеровы координаты луча конгруэнции. Геометрически она характеризуется тем, что для всякого луча конгруэнции первое преобразование Лапласа одного фокуса лежит в одной плоскости с другим фокусом и двумя последовательными преобразованиями его.

В настоящей работе я исследую заново конгруэнцию Розе, исходя из ее геометрического определения. Она весьма просто характеризуется компонентами проективных движений тетраэдра, вершинами которого служат два фокуса конгруэнции и их первые преобразования Лапласа.

Определение конгруэнции Розе по существу не симметрично относительно фокусов. Поэтому естественно рассматривать фокальные сети этой конгруэнции. Мы будем называть сетью Розе, взятой в направлении линий u, или сетью r_u сопряженную сеть линий (u, v) на поверхности (M), если второе преобразование Лапласа точки M в сторону линии u лежит в касательной плоскости первого преобразования поверхности (M) в сторону линии v.

Аналогично мы будем называть второй сетью Розе или сетью r'_u сопряженную сеть линий (u, v), если первое преобразование в сторону линии u и три последовательные преобразования в сторону линии v лежат в одной плоскости. Наконец, третьей сетью Розе или сетью r''_u мы будем называть сопряженную сеть (u, v) на поверхности (M), если

третье преобразование Лапласа точки M в сторону линии u лежит в касательной плоскости поверхности в точке M.

Конгруэнция Розе описана касательными к линиям u сети r_u, или касательными к линиям v сети r'_v, или, наконец, является первым преобразованием Лапласа в сторону u конгруэнции касательных к линиям u сети r''_u. Иначе говоря, конгруэнция Розе имеет фокальными сетями сети r_u, r'_v, направленные навстречу друг другу, т. е. так, что касательная к линии u сети r_u совпадает с касательной линии v сети r'_v.

Прежде всего надо спросить себя, могут ли эти две сети совпадать, т. е. может ли сеть r_u быть в то же время сетью r'_u или сетью r'_v.

В первом случае, т. е. если $r_u \equiv r'_u$, конгруэнция касательных к линиям u этой сети является конгруэнцией Розе двумя способами: от первого фокуса ко второму и от второго к первому.

Конгруэнции дважды Розе суть 1) конгруэнции периодической последовательности Лапласа с периодом 4 и 2) конгруэнции произвольного линейного комплекса.

Если сеть r_u является в то же время сетью r'_v, то не только конгруэнция касательных к линиям u сети, но и ее преобразование Лапласа в сторону линии v являются конгруэнциями Розе. Если однако две соседние конгруэнции некоторой последовательности Лапласа суть конгруэнции Розе, то и все конгруэнции последовательности обладают этим свойством.

Последовательности Розе (т. е. последовательности Лапласа, все конгруэнции которого суть конгруэнции Розе) образуют семейство, зависящее от 10 произвольных функций одного аргумента.

Частный случай такой последовательности представляет вписанная сама в себя последовательность, у которой для каждой фокальной сети касательная к одной из линий сети проходит через третье преобразование Лапласа этого фокуса в направлении другой линии сети. Нетрудно заметить, что в этом случае все фокальные сети последовательности — гармонические.

Гармонической (²) называется сопряженная сеть линий на поверхности, если прямые, полученные преобразованием Лапласа из касательных к линиям сети, пересекаются. Обратно, всякая гармоническая сеть, которая в то же время является сетью r_u, будет сетью r'_v и будет воспроизводиться в преобразовании Лапласа так, что вся последовательность Лапласа будет состоять из сетей этого рода, т. е. последовательность будет сама в себя вписана. Такая последовательность зависит от 9 произвольных функций одного аргумента.

Интересно отметить, что фокальные поверхности конгруэнции Розе вполне произвольны: на каждой поверхности можно найти сети Розе с тремя произвольными функциями одного аргумента.

Во всем исследовании я пользуюсь методом подвижного тетраэдра, основы которого я изложил в моей работе «Проективно-диференциальная геометрия» (³).

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

§ 1

Пусть прямая M_1M_2 при изменении независимых параметров u, v описывает некоторую конгруэнцию, M_1 и M_2 — два фокуса, которые соответствуют развертывающимся поверхностям конгруэнции $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$ так, что M_1 лежит на ребре возврата поверхности $v = \mathrm{const}$, а M_2 на ребре возврата поверхности $u = \mathrm{const}$.

Пусть M_3 — преобразование Лапласа фокуса M_1 в сторону линии v, M_4 — фокуса M_2 в сторону линии u.

Будем называть совокупность четырех однородных координат точки M_i аналитической точкой; мы будем обозначать аналитическую точку той же буквой, как и геометрическую точку, но жирным шрифтом, $\mathbf{M}_i$. Очевидно с одной геометрической точкой связано бесчисленное множество аналитических точек, отличающихся друг от друга выбором общего множителя четырех однородных координат. Выбор аналитической точки, связанной с данной геометрической точкой, мы будем называть нормированием точки.

Если через a_i^k, b_i^k обозначить координаты аналитических точек $\mathbf{M}_{iu}$, $\mathbf{M}_{iv}$ относительно тетраэдра $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$, то формулы преобразования координат дадут две группы основных соотношений:

$$\mathbf{M}_{iu} = \sum_{k=1}^{4} a_i^k \mathbf{M}_k, \quad \mathbf{M}_{iv} = \sum_{k=1}^{4} b_i^k \mathbf{M}_k. \tag{1}$$

Мы будем называть величины a_i^k, b_i^k компонентами проективных движений тетраэдра.

При подходящем нормировании точек M_i таблица компонент может быть приведена к виду *

$$\left|\begin{array}{cccc} 0 & \delta & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & 0 & 1 \\ m & 0 & 0 & 0 \\ N_1 & R_1 & -\Delta_1 & -P_1 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cccc} p & 0 & 1 & 0 \\ \delta_1 & 0 & 0 & 0 \\ R & N & -P & -\Delta \\ 0 & m_1 & 0 & 0 \end{array}\right| \tag{2}$$

Условия совместности системы (1) дадут соотношения:

$$p = \frac{\partial \ln \delta}{\partial v}, \qquad p_1 = \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u}, \tag{3a}$$

$$m = \delta\delta_1 - \frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v}, \qquad m_1 = \delta\delta_1 - \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v}, \tag{3b}$$

$$N = \Delta_u - P_1\Delta, \qquad N_1 = \Delta_{1v} - P\Delta_1, \tag{3c}$$

---

* ([3]), стр. 122.

$$N_{1v}+N_1\frac{\partial \ln \delta}{\partial v}=R\Delta_1-R_1\delta_1,\qquad N_u+N\frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u}=R_1\Delta-R\delta, \tag{3d}$$

$$m_v-R_u=-m(P+p)-\Delta N_1,\qquad m_{1u}-R_{1v}=-m_1(P_1+p_1)-\Delta_1 N, \tag{3e}$$

$$P_u=\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\,\partial v}-\delta\delta_1+\Delta\Delta_1,\quad P_{1v}=\frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\,\partial v}-\delta\delta_1+\Delta\Delta_1. \tag{3f}$$

Обратно, таблица компонент (2), удовлетворяющая системе (3a — f), определяет конгруэнцию ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$) и только одну (вплоть до проективного преобразования), причем $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ суть фокусы луча $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_4$ — преобразования Лапласа соответственно от $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в направлении v и в направлении u. Действительно, таблица (2) показывает, что $\mathbf{M}_{1v}$ линейно выражено через $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_3$, следовательно лежит на прямой $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$, точка $\mathbf{M}_{1u}$ лежит на прямой $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$, т. е. $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ касаются линий u и v на поверхности ($\mathbf{M}_1$); также увидим, что прямые $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ касаются линий v и u на поверхности ($\mathbf{M}_2$) и прямые $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ касаются линий u и v соответственно на поверхностях ($\mathbf{M}_3$) и ($\mathbf{M}_4$), т. е. ломаная $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4$ описывает три последовательных конгруэнции одной последовательности Лапласа, где $\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_4$ являются последовательными преобразованиями Лапласа.

§ 2

Допустим теперь, что конгруэнция ($\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$) есть конгруэнция Розе в сторону линии v, т. е. первая фокальная сеть, сеть линий (u, v) на поверхности ($\mathbf{M}_1$) есть сеть r_u, вторая фокальная сеть — r'_v. Значит первое преобразование второго фокуса в сторону u $\mathbf{M}_4$, первый фокус $\mathbf{M}_1$ и его два преобразования в сторону v $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_5$ лежат в одной плоскости, т. е. определитель, составленный из координат точек $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_5$, равен нулю:

$$(\mathbf{M}_4\,\mathbf{M}_1\,\mathbf{M}_3\,\mathbf{M}_5)=0.$$

Для этого очевидно достаточно, чтобы прямая $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5$, касательная линии v на поверхности ($\mathbf{M}_3$), лежала в плоскости $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$. Эта касательная определяется точками $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_{3v}$; значит условие, характеризующее конгруэнцию Розе, может быть записано в виде

$$(\mathbf{M}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{3v})=0,$$

или в силу (1) и (2)

$$N=0. \tag{4}$$

Конгруэнция Розе определяется системой уравнений (3a — f) и (4). Очевидно, можно задать R, как произвольную функцию от u и v; тогда второе уравнение (3d) определит R_1 через Δ и δ (если Δ не нуль, что привело бы к вырождению конгруэнции); вводя новые независимые переменные, нетрудно привести нашу систему к виду системы Коши для неизвестных функций $\delta, \delta_1, \Delta, \Delta_1, p, p_1, P, P_1, N_1, m, m_1$. Следовательно, произвольная конгруэнция Розе зависит от одной произвольной функции двух аргументов.

С такой же степенью общности определяются сети r_u, r'_v и r''_u.

§ 3

Представляется интересным, может ли сеть r или r' содержать одну или две конгруэнции W. Если касательные к линиям u сети r_u или к линиям v сети r'_v описывают конгруэнцию W, т. е. если конгруэнция Розе $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ является конгруэнцией W, то *

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0. \tag{5}$$

Если из первого уравнения (3c) определить P_1

$$P_1 = \frac{\partial \ln \Delta}{\partial u}$$

и подставить во второе (3f), то получим в силу (5)

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \ln \frac{\Delta}{\delta_1} = 0. \tag{6}$$

Следовательно $\frac{\Delta}{\delta_1}$ есть произведение функции одного переменного u на функцию одного переменного v.

Таблица компонент (2) допускает замену параметров u, v на $u^* = \varphi(u)$, $v^* = \psi(v)$ и умножение $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_3$ на $V = f_1(v)$, $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_4$ на $U = f_2(u)$. При этом новые компоненты δ^*, Δ^* и т. д. будут связаны со старыми формулами

$$\left.\begin{aligned} &\delta^* = \delta \frac{V}{U} \frac{du}{du^*}, \quad \Delta^* = \Delta \frac{V}{U} \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2 \frac{du^*}{du}, \quad R^* = R \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \\ &m^* = m \frac{du}{du^*} \frac{dv}{dv^*}, \quad N^* = N \frac{V}{U} \left(\frac{dv}{dv^*}\right)^2, \\ &p^* = p \frac{dv}{dv^*} + \frac{d \ln V}{dv^*}, \quad P^* = P \frac{dv}{dv^*} - \frac{d}{dv^*} \ln \left(V \frac{dv}{dv^*}\right) \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

и аналогичными с заменой u на v**.

Отсюда следует

$$\frac{\Delta^*}{\delta_1^*} = \frac{\Delta}{\delta_1} \frac{V^2}{U^2} \frac{dv}{dv^*} \frac{du^*}{du}.$$

Значит, выбором параметров u, v или нормированием координат можно привести $\frac{\Delta}{\delta_1}$ к единице и тогда (5) даст

$$\Delta = \delta_1, \ \Delta_1 = \delta, \tag{8}$$

а это характеризует конгруэнцию, принадлежащую к некоторому линейному комплексу ***.

Следовательно всякая конгруэнция W, являющаяся в то же время конгруэнцией Розе, принадлежит к некоторому линейному комплексу.

С другой стороны, легко увидеть, что всякая конгруэнция линейного комплекса (всегда конгруэнция W) является конгруэнцией Розе.

---

* ([3]), стр. 129.

** ([3]), стр. 124.

*** ([3]), стр. 132.

Действительно, если уравнения (8) имеют место, то из уравнений (3a) и (3f) следует

$$P_{1v} = p_{1v}.$$

Разность $P_1 - p_1$ является функцией одного переменного u, а так как по формулам (7)

$$P_1^* - p_1^* = (P_1 - p_1)\frac{du}{du^*} - \frac{d}{du^*}\ln\left(U^2\frac{du}{du^*}\right),$$

то выбором нормирования (т. е. выбором функции U) разность $P_1^* - p_1^*$ можно свести к нулю; при этом уравнения (8) не нарушатся, если соответственно изменить параметры u, v. Между тем, если это преобразование уже выполнено, т. е. если $P_1 = p_1 = \frac{\partial \ln \delta}{\partial u}$ и $\Delta = \delta_1$, то (3c) дадут

$$N = 0.$$

§ 4

Допустим теперь, что конгруэнция касательных к линиям v сети $r_{\prime\prime}$ есть конгруэнция W. В наших обозначениях надо потребовать, чтобы конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$ была конгруэнцией W.

Так как асимптотические линии на поверхностях $(\mathbf{M}_1)$ и $(\mathbf{M}_3)$ определяются теперь уравнениями

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0,$$
$$m\delta\, du^2 - m_1\Delta\, dv^2 = 0,$$

то, полагая $\delta\,\Delta \gtrless 0$ (иначе мы пришли бы к вырождению поверхности $(\mathbf{M}_1)$ в линию или в развертывающуюся поверхность), получим

$$m = m_1.$$

Тогда уравнения (3b) дадут

$$\frac{\partial^2 \ln \delta}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v}.$$

Значит, выбором параметров u^*, v^* по формулам (7) можно привести δ и δ_1 к равенству

$$\delta = \delta_1.$$

Следовательно, в этом случае конгруэнция Розе является вместе с тем конгруэнцией Гурса *.

Второму уравнению (3d) можно удовлетворить, полагая

$$R = t\Delta,\ R_1 = t\,\delta,$$

где t — новая неизвестная функция. Введением новых параметров $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ система (3a — f) может теперь быть приведена к системе Коши относительно неизвестных функций $\delta, \Delta, \Delta_1, p, N_1, m, t, P, P_1$.

* (3), стр. 155.

Определитель системы $\delta\alpha_v^2 - \Delta\alpha_u^2$ всегда можно сделать отличным от нуля, если $\delta\Delta \gtrless 0$, что мы будем предполагать.

Следовательно, если конгруэнция касательных к линиям v сети r_u есть конгруэнция W, то касательные к линиям u описывают конгруэнцию Гурса; сеть зависит от 9 произвольных функций одного аргумента. Наоборот, если касательные к линиям u сети r_v' описывают конгруэнцию W, то асимптотические на поверхностях $(\mathbf{M}_2)$ и $(\mathbf{M}_4)$ соответствуют друг другу. Это приводит нас к уравнению

$$\left(\frac{N_1}{\Delta_1}\right)_u = m - m_1.$$

Исключая m, m_1 с помощью (3b) и интегрируя, мы получим, приводя к нулю произвольную функцию интеграции за счет выбора параметра v,

$$\frac{N_1}{\Delta_1} = \frac{\partial}{\partial v}\left(\ln\frac{\delta_1}{\delta}\right).$$

С другой стороны, исключая N_1 с помощью (3c) и P с помощью (3f), получим

$$\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\ln\frac{\Delta}{\Delta_1} = 0,$$

откуда, выбирая нормирование координат,

$$\Delta_1 = \Delta.$$

Вводя попрежнему вспомогательную функцию t, мы получим систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{l}\delta_v = p\delta \\ \delta_{1u} = p_1\delta_1, \quad \delta_{1v} = p\delta_1 + N_1\dfrac{\delta_1}{\Delta},\end{array}\right\} \tag{9a}$$

$$p_u = \delta\delta_1 - m, \quad p_{1v} = \delta\delta_1 - m_1, \tag{9b}$$

$$\Delta_u = P_1\Delta, \quad \Delta_v = P\Delta + N_1, \tag{9c}$$

$$N_{1u} = P_1N_1 + \Delta(m - m_1), \quad N_{1v} = -pN_1 + t(\Delta^2 - \delta\delta_1), \tag{9d}$$

$$P_u = \Delta^2 - m, \quad P_{1v} = \Delta^2 - m_1, \tag{9e}$$

$$\left.\begin{array}{l}m_v - t_u\Delta = P_1t\Delta - m(P + p) - \Delta N_1, \\ m_{1u} - t_v\delta = pt\delta - m_1(P_1 + p_1).\end{array}\right\} \tag{9f}$$

Условие интегрируемости для уравнений (9a, b) удовлетворено в силу (9d). Условие интегрируемости уравнений (9d) дополняет систему (9a — f) уравнением

$$-\Delta m_{1v} + t\delta_1\delta_u + t_u\delta\delta_1 = t\delta\delta_1(p_1 - P_1) + N_1(\delta\delta_1 - 2m_1) - m_1\Delta(P + p). \tag{9g}$$

Введением новых параметров $\alpha = \alpha(u, v)$, $\beta = \beta(u, v)$ система (9a — g) приводится к системе в инволюции.

Определитель системы $\delta_1\alpha_u^2 - \Delta\alpha_v^2$ можно считать отличным от нуля, если $\delta_1\Delta \gtrless 0$. Система определяет сеть с 8 произвольными функциями одного аргумента.

Условие $\Delta = \Delta_1$ показывает, что конгруэнция Розе в этом случае двойственна конгруэнции Гурса, т. е. первый тангенциальный инвариант одной фокальной сети равен второму тангенциальному инварианту второй.

§ 5

Перейдем к рассмотрению тех случаев, когда две сети r_u, r_v, r'_u или r'_v совпадают в той или иной комбинации.

Если сеть r_u совпадает с сетью r'_u, то конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ обладает свойствами конгруэнции Розе и в направлении u и в направлении v, т. е. мы имеем дело с конгруэнцией дважды Розе. Тогда мы будем иметь, очевидно,

$$N = 0, \qquad N_1 = 0. \tag{10a}$$

Уравнения (3d) примут вид

$$R\Delta_1 - R_1\delta_1 = 0, \quad R_1\Delta - R\delta = 0. \tag{10b}$$

Отсюда следует или

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0$$

или

$$R = 0, \qquad R_1 = 0. \tag{11}$$

В первом случае наша конгруэнция есть конгруэнция W и следовательно принадлежит некоторому линейному комплексу. С другой стороны, рассуждения предыдущего параграфа покажут нам, что из уравнений (8) следуют уравнения (10a), т. е. всякая конгруэнция линейного комплекса есть дважды конгруэнция Розе.

Если имеют место уравнения (11), то конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ составляет часть периодической с периодом 4 последовательности Лапласа. Действительно, таблица (2) приводит к уравнениям

$$\mathbf{M}_{3u} = m\mathbf{M}_1\,, \quad \mathbf{M}_{3v} = -P\mathbf{M}_3 - \Delta\mathbf{M}_4\,.$$

Следовательно не только касательная к линии u на поверхности $(\mathbf{M}_3)$ совпадает с ребром $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$, но и касательная к линии v совпадает с ребром $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$. В силу симметрии прямая $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ касается на поверхности $(\mathbf{M}_4)$ линии u и следовательно описывает конгруэнцию, получаемую из конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ двойным применением преобразования Лапласа и в сторону u и в сторону v.

Эти результаты более или менее очевидны.

Так как три точки $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_5$ определяют касательную плоскость к поверхности $(\mathbf{M}_3)$, то условие, характеризующее конгруэнцию Розе, можно высказать в виде требования, чтобы первое преобразование одного фокуса лежало в касательной плоскости первого преобразования (в другую сторону) другого фокуса. Если конгруэнция является дважды конгруэнцией Розе, то и, обратно, первое преобразование второго фокуса $\mathbf{M}_4$ лежит в касательной плоскости первого преобразования первого фокуса, т. е. в касательной плоскости поверхности $(\mathbf{M}_3)$; но в таком случае линия $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ является общей касательной поверхностей $(\mathbf{M}_3)$ и $(\mathbf{M}_4)$. Следовательно, четырехугольник $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3$ описывает конфигурацию * (T), т. е. совокупность четырех конгруэнций, соста-

* ([3]), стр. 177.

вляющих цикл так, что две последовательные конгруэнции имеют одну общую полость фокальной поверхности. Три звена этой конгруэнции M_3M_1, M_1M_2 и M_2M_4 принадлежат одной последовательности Лапласа.

Если при этом прямая M_3M_4 касается на поверхности (M_3) линии v, то на поверхности (M_4) она касается линии u и описывает конгруэнцию, принадлежащую той же последовательности Лапласа, т. е. вся конфигурация образует периодическую с периодом 4 последовательность Лапласа. Обратно, всякая периодическая с периодом 4 последовательность Лапласа содержит четыре конгруэнции дважды Розе.

Если конгруэнция (M_3M_4) не принадлежит к той последовательности Лапласа, которую определяет конгруэнция (M_1M_2), то, как мы видели, эта последняя принадлежит к некоторому линейному комплексу.

Заметим, что в этом случае противоположная конгруэнция (M_3M_4) принадлежит * тому же линейному комплексу. Действительно, если все лучи конгруэнции (M_1M_2) принадлежат одному линейному комплексу K, то в нулевой системе этого комплекса каждому фокусу M_1 или M_2 соответствует фокальная плоскость, касательная к фокальной поверхности в другом фокусе, ибо в фокусе пересекаются два бесконечно близких луча конгруэнции, лежащие в фокальной плоскости.

Если мы передвинемся по линии v в точку M'_1, бесконечно близкую к M_1, то луч $M'_1M'_2$, принадлежащий конгруэнции (M_1M_2), пройдет через точку M_2 [и будет касаться там линии v поверхности (M_2)]. Плоскость, сопряженная точке M'_1 в нулевой системе K, будет касаться поверхности (M_2). Линия пересечения этой плоскости и плоскости $M_1M_2M_4$ является характеристикой семейства касательных плоскостей поверхности (M_2) вдоль линии v и следовательно] совпадает с касательной M_2M_4 к этой поверхности, сопряженной (в смысле Дюпена) с касательной M_2M_1. Следовательно эта касательная M_2M_4 сопряжена относительно нулевой системы K с прямой $M_1M'_1$, которая является касательной к линии v поверхности (M_1), и совпадает с прямой M_1M_3.

Поскольку прямые M_2M_4 и M_1M_3 сопряжены, точке M_4 первой прямой соответствует плоскость $M_2M_1M_3$, проходящая через вторую прямую. Следовательно луч M_4M_3 (противоположной конгруэнции) принадлежит комплексу K.

Таким образом, если дана какая-либо конгруэнция линейного комплекса, то каждый луч ее определяет последовательность лучей комплекса так, что каждый луч соединяет два первых преобразования Лапласа обоих фокусов предыдущего луча последовательности.

§ 6

Если сеть r_u совпадает с сетью r'_v, то конгруэнцию Розе описывают не только касательные к линиям u, но и касательные к линиям v.

Конгруэнция Розе вообще не сохраняется в преобразовании Лап-

* ([3]), стр. 180.

ласа. Действительно, если первое преобразование конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, конгруэнция $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$, есть конгруэнция Розе, то первое преобразование $\mathbf{M}_4$ в сторону u — точка $\mathbf{M}_6$ — лежит в касательной плоскости поверхности $(\mathbf{M}_1)$.

Точка $\mathbf{M}_6$ лежит на касательной к линии u поверхности $\mathbf{M}_4$, следовательно имеет вид

$$\mathbf{M}_6 = \lambda\mathbf{M}_4 + N_1\mathbf{M}_1 + R_1\mathbf{M}_2 - \Delta_1\mathbf{M}_3, \tag{12}$$

где λ — неизвестная функция.

Если $\mathbf{M}_6$ лежит в касательной плоскости $(\mathbf{M}_1)$, т. е. в плоскости $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$, то правая часть (12) не должна содержать компоненты $\mathbf{M}_4$, т. е.

$$\lambda = 0.$$

Так как луч $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_6$ касается на поверхности $(\mathbf{M}_6)$ линии v, то $\mathbf{M}_{6v}$ линейно выражается через $\mathbf{M}_4$ и $\mathbf{M}_6$:

$$\mathbf{M}_{6v} = A\mathbf{M}_4 + B\mathbf{M}_6.$$

Между тем, дифференцируя (12) по v при помощи таблицы (2), получим

$$\mathbf{M}_{6v} = R_{1v}\mathbf{M}_2 + \Delta\Delta_1\mathbf{M}_4.$$

Следовательно конгруэнция $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$ есть конгруэнция Розе, если

$$R_{1v} = 0. \tag{13}$$

Допустим, что условие (13) удовлетворено и первое преобразование в сторону v конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ есть конгруэнция Розе. Тогда легко увидеть, что и первое преобразование в сторону u, т. е. конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$, тоже обладает этим свойством.

Действительно, конгруэнция $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$ есть конгруэнция Розе (все время в сторону v), если первое преобразование фокуса $\mathbf{M}_1$ в сторону u, т. е. точка $\mathbf{M}_2$, лежит в касательной плоскости первого преобразования второго фокуса $\mathbf{M}_3$ в сторону v, т. е. в касательной плоскости $(\mathbf{M}_5)$.

Так как эта касательная плоскость определяется точками $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_5$ и $\mathbf{M}_{5v}$, то это условие сводится к требованию равенства нулю определителя

$$(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_{5v}) = 0. \tag{14}$$

Здесь $\mathbf{M}_5$ — второй фокус касательной к линии v на поверхности $(\mathbf{M}_3)$, следовательно линейно выражается через $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_{3v}$. С помощью таблицы (2) мы представим его в виде

$$\mathbf{M}_5 = R\mathbf{M}_1 + \mu\mathbf{M}_3 - \Delta\mathbf{M}_4, \tag{15}$$

где μ — неизвестная функция.

Дифференцируя (15) по v с помощью таблицы (2), получим

$$\mathbf{M}_{5v} = A_1\mathbf{M}_2 + B_1\mathbf{M}_3 + (R_v + pR + \mu R)\,\mathbf{M}_1 - (\Delta_v + \Delta\mu)\,\mathbf{M}_4, \tag{16}$$

где A_1, B_1 — выражения, точный состав которых нас не интересует.

Внося (15) и (16) в уравнение (14) и развертывая определитель, получим

$$\begin{vmatrix} R & R_v + pR + \mu R \\ -\Delta & -\Delta_v - \Delta\mu \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\frac{\partial \ln R}{\partial v} + p - \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} = 0, \tag{17}$$

но в силу (4) второе уравнение (3d) дает

$$R_1 \Delta = R\delta. \tag{18}$$

Дифференцируя это уравнение по v, получим

$$\frac{\partial \ln R_1}{\partial v} + \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} = \frac{\partial \ln R}{\partial v} + \frac{\partial \ln \delta}{\partial v}.$$

Если отсюда вычесть уравнение (17), принимая во внимание (3a), то непосредственно получим уравнение (13).

Итак, если две соседние конгруэнции одной последовательности Лапласа $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ и $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$ суть конгруэнции Розе, то и третья конгруэнция этой последовательности $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$ — тоже конгруэнция Розе.

Применяя последовательно эту теорему, мы придем к заключению, что все конгруэнции этой последовательности суть конгруэнции Розе. Таким образом для конгруэнции Розе существует теорема, аналогичная теореме о конгруэнциях R: если касательные к тому или другому семейству линий сопряженной сети описывают конгруэнции Розе, направленные в одну и ту же сторону, то и все конгруэнции, получаемые отсюда применением преобразования Лапласа, суть конгруэнции Розе.

Будем называть сетью $r - r'$ сеть r_u, совпадающую с сетью r'_v, сетью $r' - r$ сеть r_v, совпадающую с сетью r'_u. Эти сети обладают следовательно свойством, аналогичным сети R: все преобразования Лапласа суть сети того же рода.

Мы будем называть последовательность сетей $r - r'$ или $r' - r$ последовательностью Розе или последовательностью r в направлении u или v.

Если сеть $(\mathbf{M}_1)$ есть сеть r_u, то точки $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_5$ и $\mathbf{M}_4$ лежат в одной плоскости. Эта плоскость является касательной плоскостью поверхности $(\mathbf{M}_3)$. Касательная плоскость поверхности $(\mathbf{M}_2)$ есть плоскость $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$. Пересечение касательных плоскостей двух преобразований Лапласа данной сети называется первой осью сети. Плоскости $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$ и $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_4)$ пересекаются по прямой $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4$. Эта прямая и служит первой осью сети $(\mathbf{M}_1)$. Она соединяет два преобразования Лапласа $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_4$ сети $(\mathbf{M}_2)$, а потому является второй осью сети $(\mathbf{M}_2)$.

Итак, конгруэнция Розе характеризуется тем, что первая ось первой фокальной сети совпадает со второй осью второй сети. В последовательности Розе первая ось любой фокальной сети является в то же время второй осью следующей сети, а вторая ось — первой осью предыдущей фокальной сети.

§ 7

Последовательность Розе определяется системой уравнений (3a — f), если сюда присоединить уравнения (4) и (13).

Интегрируя уравнение (13), получим, что R_1 есть функция одного переменного u. Если эта функция не равна нулю, то выбором параметра u мы можем привести ее к единице согласно с формулами (7), и уравнение (18), являющееся следствием уравнений (3d) и (4), даст

$$R=\frac{\Delta}{\delta}, \qquad R_1=1. \tag{19}$$

Второе уравнение (3e) в силу (3a) и (3c) тоже интегрируется и покажет, что $m_1\Delta\delta_1$ есть функция одного переменного v. Так как из уравнения (7) следует

$$m_1^*\Delta^*\delta_1^*=m_1\Delta\delta_1\left|\frac{dv}{dv^*}\right|^4,$$

то выбором параметра v мы приведем эту функцию к единице, если только она не равна нулю:

$$m_1=\frac{1}{\Delta\delta_1}. \tag{20}$$

Если ввести новые независимые переменные $\alpha=\alpha(u, v)$ и $\beta=\beta(u,v)$, то система (3a — f) может быть представлена в виде системы Коши:

$$\left.\begin{aligned}
&p_\alpha=-p_\beta\frac{\beta_u}{\alpha_u}+\frac{\delta\delta_1-m}{\alpha_u}, && p_{1\alpha}=-p_{1\beta}\frac{\beta_v}{\alpha_v}+\frac{\Delta\delta\delta_1^2-1}{\Delta\delta_1\alpha_v},\\
&P_\alpha=-P_\beta\frac{\beta_u}{\alpha_u}+\frac{\Delta\Delta_1-m}{\alpha_u}, && P_{1\alpha}=-P_{1\beta}\frac{\beta_v}{\alpha_v}+\frac{\Delta^2\Delta_1\delta_1-1}{\Delta\delta_1\alpha_v},\\
&\delta_\alpha=-\delta_\beta\frac{\beta_v}{\alpha_v}+\frac{p\delta}{\alpha_v}, && \delta_{1\alpha}=-\delta_{1\beta}\frac{\beta_u}{\alpha_u}+\frac{p_1\Delta_1}{\alpha_u},\\
&\Delta_\alpha=-\Delta_\beta\frac{\beta_u}{\alpha_u}+\frac{P_1\Delta}{\alpha_u}, && \Delta_{1\alpha}=-\Delta_{1\beta}\frac{\beta_v}{\alpha_v}+\frac{P\Delta_1+N_1}{\alpha_v},\\
&N_{1\alpha}=-N_{1\beta}\frac{\beta_v}{\alpha_v}+\frac{\Delta\Delta_1-\delta\delta_1-N_1p\delta}{\delta\alpha_v}, &&\\
&m_\alpha=-m_\beta\frac{\beta_v}{\alpha_v}+\frac{\Delta}{\delta^2}\delta_\beta\frac{\alpha_u\beta_v-\alpha_v\beta_u}{(\alpha_v)^2}-\frac{\Delta p}{\delta}\frac{\alpha_u}{(\alpha_v)^2}+ &&\\
&\qquad+\frac{\Delta^2\delta_1P_1-\delta(P+p)-\Delta^2\delta\delta_1N_1}{\Delta\delta\delta_1\alpha_v}. &&
\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Следовательно наиболее общая последовательность Розе зависит от 10 функций одного аргумента.

Переходя к оставленным без рассмотрения особым случаям, заметим прежде всего, что обращение m в нуль показывает вырождение поверхности $(\mathbf{M}_4)$ в линию, ибо в этом случае таблица (2) дает

$$M_{4v}=0.$$

Что касается R_1, то обращение этой функции в нуль влечет в силу (18) обращение в нуль R

$$R_1=0, \qquad R=0. \tag{22}$$

Если при этом $N_1 = 0$, то четырехугольник $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_3$ описывает периодическую с периодом 4 последовательность Лапласа. Если N_1 не нуль, то из (3d), интегрируя и выбирая параметр u, получим

$$N_1 = \frac{1}{\delta}, \tag{23}$$

и система (3a — f) приводится к виду системы Коши:

$$\left.\begin{aligned}
&\delta_\alpha = -\delta_\beta \frac{\beta_v}{\alpha_v} + \frac{\delta p}{\alpha_v}, &&\delta_{1\alpha} = -\delta_{1\beta} \frac{\beta_u}{\alpha_u} + \frac{\delta_1 p_1}{\alpha_u}, \\
&p_\alpha = -p_\beta \frac{\beta_u}{\alpha_u} + \frac{\delta\delta_1 - m}{\alpha_u}, &&p_{1\alpha} = -p_{1\beta} \frac{\beta_v}{\alpha_v} + \frac{\Delta\delta\delta_1^2 - 1}{\Delta\delta_1\alpha_v}, \\
&\Delta_\alpha = -\Delta_\beta \frac{\beta_u}{\alpha_u} + \frac{P_1\Delta}{\alpha_u}, &&\Delta_{1\alpha} = -\Delta_{1\beta} \frac{\beta_v}{\alpha_v} + \frac{P\Delta_1\delta + 1}{\delta\alpha_v}, \\
&m_\alpha = -m_\beta \frac{\beta_v}{\alpha_v} - \frac{m\delta(P + p) + \Delta}{\delta\alpha_v}, && \\
&P_\alpha = -P_\beta \frac{\beta_u}{\alpha_u} + \frac{\Delta\Delta_1 - m}{\alpha_u}, &&P_{1\alpha} = -P_{1\beta} \frac{\beta_v}{\alpha_v} + \frac{\Delta^2\Delta_1\delta_1 - 1}{\Delta\delta_1\alpha_v}.
\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Следовательно такая последовательность Розе определяется 9 произвольными функциями одного аргумента.

§ 8

Последовательность, которую мы получили в конце прошлого параграфа, весьма замечательна.

Таблица (2) показывает, что в этом случае прямая $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ касается на поверхности $(\mathbf{M}_3)$ линии v и следовательно описывает одну из конгруэнций последовательности Лапласа, именно: второе преобразование $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ в сторону v. Если N_1 не нуль, то прямая $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_4$ не касается, а пересекает поверхность $(\mathbf{M}_4)$ в точке $\mathbf{M}_4$.

Обратно, если касательная к линии v поверхности $(\mathbf{M}_3)$ проходит через третье преобразование Лапласа в сторону u $\mathbf{M}_4$, то таблица (2) даст

$$R = 0, \qquad N = 0,$$

а второе уравнение (3d) даст $R_1 = 0$, и мы придем к системе (24).

Еще Вильчинский рассмотрел сети, которые он назвал гармоническими, ибо в конгруэнции, связанной с такой сетью, много раз повторяется гармоническая сопряженность: развертывающиеся поверхности первой или второй оси гармонически разделяют касательные к линиям сети, фокальные плоскости первой оси гармонически разделяют соприкасающиеся плоскости линий сети, фокусы второй оси гармонически разделяют первые преобразования Лапласа заданной сети. Нас более интересует другое, отмеченное тоже Вильчинским, характеристическое свойство сети: первые преобразования Лапласа от касательных к линиям сети пересекаются, или иначе: два преобразования Лапласа в сторону u и два преобразования в сторону линии v от образующей точки сети лежат в одной плоскости. Нетрудно заметить, что гармоническая сеть

определяется, таким образом, сходно сети r'_v (три преобразования в сторону u и одно в сторону v в одной плоскости).

Легко видеть, что фокальную сеть $(\mathbf{M}_1)$ последовательности (24) можно характеризовать как гармоническую сеть r_u. Действительно, если сеть $(\mathbf{M}_1)$ есть сеть r_u, то $\mathbf{M}_1$ и два его преобразования в сторону v $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_5$ лежат в одной плоскости со вторым преобразованием в сторону u, точкой $\mathbf{M}_4$:

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_4) = 0.$$

Если это — гармоническая сеть, то в одной плоскости лежат два преобразования в сторону v — точки $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{M}_5$, и два преобразования в сторону u — точки $\mathbf{M}_2$ и $\mathbf{M}_4$:

$$(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_4) = 0.$$

Следовательно все пять точек лежат в одной плоскости, определяемой точками $\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_5$, и тогда касательные плоскости поверхностей $(\mathbf{M}_1)$ и $(\mathbf{M}_2)$ совпадают, т. е. сеть $(\mathbf{M}_1)$ вырождается, или точки $\mathbf{M}_3$. $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_5$ не определяют плоскость, т. е. лежат на одной прямой, и следовательно прямая $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5$ проходит через преобразование $\mathbf{M}_4$

Интересно отметить, что гармонические сети r_u обладают свойством сетей R: все преобразования Лапласа такой сети суть тоже гармонические сети r_u, именно: нетрудно обнаружить, что в этом случае касательная к линии v на поверхности $(\mathbf{M}_1)$ тоже пройдет через третье преобразование $\mathbf{M}_1$ в сторону u.

Это третье преобразование есть второй фокус касательной к линии u на поверхности $(\mathbf{M}_4)$. Так как $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ касается линии v на $(\mathbf{M}_1)$, то нам надо показать, что точка пересечения прямой $(\mathbf{M}_4\mathbf{M}_{4u})$ с ребром $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ является для этой прямой фокусом. Таблица (2) показывает, что эта точка пересечения есть

$$\mathbf{M}_6 = \frac{\mathbf{M}_1}{\delta} - \Delta_1\mathbf{M}_3. \tag{25}$$

Дифференцируя (25) с помощью таблицы (2) и принимая во внимание (4), (22) и (23), получим

$$\mathbf{M}_6 = \frac{1}{\Delta\delta_1}\,\mathbf{M}_4.$$

Отсюда следует, что прямая $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_6$ касается линии v на поверхности $(\mathbf{M}_6)$ и, значит, $\mathbf{M}_6$ есть второй фокус луча $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_6$.

Итак, если в последовательности Лапласа касательная к линии v одной из фокальных сетей проходит через третье преобразование в сторону u, то и соседняя фокальная сеть последовательности обладает этим свойством. Применяя последовательно эту лемму, получим, что все фокальные сети последовательности обладают указанным свойством, и следовательно вся последовательность вписана сама в себе, иначе: всякое преобразование Лапласа гармонической сети r_u есть сеть того же вида.

Очевидно, придем к тому же, рассматривая гармонические сети r'_v, лучше сказать, — гармонические сети r_u суть в то же время r'_v.

§ 9

Рассмотрим теперь сети r_u, которые в то же время являются сетями r_v. В этом случае две конгруэнции Розе сходятся затылками, отправляясь от одной фокальной поверхности в разные стороны.

По определению сети r_u, r_v мы имеем

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_4)=0, \quad (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_5)=0.$$

Отсюда или все пять точек лежат в плоскости $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_5)$ и конгруэнции $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)$ вырождаются, или три точки $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_5$ лежат на одной прямой

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_5)=0.$$

Внося сюда значение $\mathbf{M}_5$ по формуле (15), получим

$$\mathbf{M}_5=R\mathbf{M}_1-\Delta\mathbf{M}_4.$$

Так как это второй фокус конгруэнции $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5$, то

$$(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_{5u})=0,$$

откуда

$$R_u=\Delta N_1. \qquad (26$$

Система (3a — f), (4) и (26) определяет сети $r_u - r_v$ с 12 функциями одного аргумента.

Если сеть r'_u в то же время является сетью r'_v, то по определению имеем

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_4)=0, \quad (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_6\mathbf{M}_8)=0.$$

Первое уравнение дает условие (4), второе можно написать в виде

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_{4u}\mathbf{M}_{4uu})=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{R_1}{\Delta_1}\delta_1\right)+N_1\frac{\delta}{R_1}=0. \qquad (27)$$

Система (3a — f), (4), (27) определяет сеть с 12 произвольными функциями одного аргумента.

Если в последовательности Лапласа чередуются сети $r_u - r_v$ и $r'_u - r'_v$, то соответствующие точки, описывающие сети $r_u - r_v$, лежат на одной прямой. Можно показать, что в этом случае соответствующие точки, описывающие сети $r'_u - r'_v$, лежат на другой прямой; все сети суть одновременно r и r', и следовательно все конгруэнции принадлежат линейным комплексам, т. е. последовательность будет последовательностью Вильчинского.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

§ 10

Обратимся к рассмотрению поверхностей, которые несут сети Розе. С этой целью удобно построить другой тетраэдр, более тесно связанный с поверхностью, которую мы будем рассматривать.

Возьмем некоторую поверхность (**M**), отнесенную к асимптотическим линиям u, v. Координаты произвольной точки **M** такой поверхности, если подходящим образом нормировать их, удовлетворяют системе уравнений вида *

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{M}_{uu} &= \beta \mathbf{M}_v + p\mathbf{M}, \\ \mathbf{M}_{vv} &= \gamma \mathbf{M}_u + q\mathbf{M}, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

где β, γ — коэффициенты кубичной формы Фубини, а p и q — коэффициенты его третьей квадратичной формы; эти коэффициенты удовлетворяют условиям совместности системы (28)

$$\left.\begin{aligned} &2p_v + \beta_{vv} - 2\beta\gamma_u - \beta_u\gamma = 0, \\ &2q_u + \gamma_{uu} - 2\gamma\beta_v - \gamma_v\beta = 0, \\ &p_{vv} + \beta q_v + 2q\beta_v = q_{uu} + \gamma p_u + 2p\gamma_u. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Присоединим к точке **M** тетраэдр $\mathbf{M}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$, вершины которого лежат: $\mathbf{M}_1$ — на асимптотической касательной к линии u, $\mathbf{M}_2$ — на асимптотической касательной к линии v, $\mathbf{M}_3$ — в произвольной точке пространства вне касательной плоскости.

Нормируя подходящим образом точки $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$, мы можем привести таблицу компонент к виду **

$\frac{a-m}{2}$	1	0	0		$\frac{b-n}{2}$	0	1	0
a_1^0	$\frac{m-a}{2}$	β	0		b_1^0	$\frac{b+n}{2}$	m	1
a_2^0	n	$\frac{a+m}{2}$	1		b_2^0	γ	$\frac{n-b}{2}$	0
a_3^0	a_3^1	a_3^2	$-\frac{a+m}{2}$		b_3^0	b_3^1	b_3^2	$-\frac{b+n}{2}$

(30)

Условия интегрируемости принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} a_v &= \beta\gamma - mn - b_1^0 - b_3^2, \\ b_u &= \beta\gamma - mn - a_2^0 - a_3^1, \end{aligned}\right\} \tag{31a}$$

$$m_v - n_u = a_3^1 - a_2^0 + b_1^0 - b_3^2, \tag{31b}$$

$$\left.\begin{aligned} \beta_v - m_u &= b\beta + am + a_3^2 - a_1^0, \\ \gamma_u - n_v &= a\gamma + bn + b_3^1 - b_2^0, \end{aligned}\right\} \tag{31c}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{1v}^0 - b_{1u}^0 &= (a-m)\, b_1^0 + na_1^0 + ma_2^0 - \beta b_2^0 + a_3^0, \\ a_{2v}^0 - b_{2u}^0 &= -(b-n)\, a_2^0 - nb_1^0 - mb_2^0 + \gamma a_1^0 - b_3^0, \\ a_{3v}^1 - b_{3u}^1 &= -(b+n)\, a_3^1 + mb_3^1 + nb_3^2 - \gamma a_3^2 + b_3^0, \\ a_{3v}^2 - b_{3u}^2 &= (a+m)\, b_3^2 - ma_3^1 - na_3^2 + \beta b_3^1 - a_3^0, \end{aligned}\right\} \tag{31d}$$

$$a_{3v}^0 - b_{3u}^0 = ab_3^0 - ba_3^0 + a_1^0 b_3^1 + a_2^0 b_3^2 - b_1^0 a_3^1 - b_2^0 a_3^2. \tag{31e}$$

---

* ([3]), стр. 45.

** ([3]), стр. 34; здесь я несколько изменил обозначения.

В таблице (30) β и γ имеют те же значения, как в уравнениях (28). С другой стороны, внося в уравнения (28) значения производных от $\mathbf{M}$ из таблицы (30), получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_u - m_u}{2} + \left(\frac{a-m}{2}\right)^2 + \beta\frac{n-b}{2} + a_1^0 = p, \\ \frac{b_v - n_v}{2} + \left(\frac{b-n}{2}\right)^2 + \gamma\frac{m-a}{2} + b_2^0 = q. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Нетрудно заметить, что величины a, b, m, n и выражение $b_3^2 - b_1^0 + m_v = a_3^1 - a_2^0 + n_u$ [в силу (31b)] могут быть заданы произвольно и определяют положение точек $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3$; действительно, из таблицы (30) сейчас же следует

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{M}_1 = \mathbf{M}_u + \frac{m-a}{2}\mathbf{M}, \\ &\mathbf{M}_2 = \mathbf{M}_v + \frac{n-b}{2}\mathbf{M}, \\ &\mathbf{M}_3 = \mathbf{M}_{uv} - \frac{n+b}{2}\mathbf{M}_u - \frac{m+a}{2}\mathbf{M}_v + \\ &\qquad + \mathbf{M}\left[\frac{b_3^2 - b_1^0 + m_v}{2} + \frac{(a+m)(b+n)}{4} - \frac{\beta\gamma + mn}{2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Уравнения (31a, b) определят теперь $b_3^2, b_1^0, a_3^1, a_2^0$; уравнения (32) дадут a_1^0, b_2^0; уравнения (31c) позволят найти a_3^2, b_3^1. Наконец, уравнения (31d) дадут a_3^0, b_3^0 и кроме того вместе с уравнением (31e) приведут нас к системе (29).

При изменении параметров u, v на параметры

$$u^* = \varphi(u), \quad v^* = \psi(v)$$

компоненты (30) будут меняться по формулам

$$\left.\begin{aligned} &a^* = a\frac{du}{du^*} - \frac{1}{2}\frac{d}{du}\left(\ln\frac{du}{du^*}\right), \\ &m^* = m\frac{du}{du^*}, \quad \beta^* = \beta\left(\frac{du}{du^*}\right)^2\frac{dv^*}{dv}, \\ &a_1^{0*} = a_1^0\left(\frac{du}{du^*}\right)^2, \quad a_2^{0*} = a_2^0\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*}, \quad a_3^{0*} = a_3^0\left(\frac{du}{du^*}\right)^2\frac{dv}{dv^*}, \\ &a_3^{1*} = a_3^1\frac{du}{du^*}\frac{dv}{dv^*}, \quad a_3^{2*} = a_3^2\left(\frac{du}{du^*}\right)^2. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Тетраэдр (30) мы будем называть *асимптотическим* тетраэдром поверхности.

§ 11

Допустим теперь, что поверхность ($\mathbf{M}$) несет сеть r_φ, причем конгруэнция Розе описывается касательными к линиям

$$\frac{dv}{du} = \varphi(u, v). \tag{35}$$

Обозначим через $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ два первых преобразования Лапласа поверхности ($\mathbf{M}$) относительно сопряженной системы $\frac{dv}{du} = \pm\varphi$, в сторону

φ и в сторону $-\varphi$, через $\mathbf{N}_3$ — второе преобразование $\mathbf{M}$ в направлении $\frac{dv}{du}=\varphi$.

По условию задачи нам надо потребовать, чтобы второе преобразование точки $\mathbf{M}$ в сторону φ, т. е. точка $\mathbf{N}_3$, лежала в одной плоскости с точкой $\mathbf{M}$ и двумя преобразованиями Лапласа точки $\mathbf{M}$ в сторону $-\varphi$. Эта плоскость, очевидно, является касательной плоскостью первого преобразования в сторону $-\varphi$, т. е. касательной плоскостью поверхности $(\mathbf{N}_2)$. Следовательно надо потребовать, чтобы точка $\mathbf{N}_3$ лежала в касательной плоскости $(\mathbf{N}_2)$.

Располагаем тетраэдр $\mathbf{MM}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$ так, чтобы точка $\mathbf{M}_3$ совпала с $\mathbf{N}_3$ и ребро $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ прошло через точки $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$.

Так как точки $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ лежат на касательных к линиям $\frac{dv}{du}=\pm\varphi$, то, очевидно, они имеют вид

$$\mathbf{N}_1=\mathbf{M}_1+\varphi\mathbf{M}_2,\quad \mathbf{N}_2=\mathbf{M}_1-\varphi\mathbf{M}_2. \tag{36}$$

По условию касательная плоскость $(\mathbf{N}_2)$ проходит через точку $\mathbf{M}_3$; она, конечно, проходит через точку $\mathbf{M}$, следовательно совпадает с плоскостью $(\mathbf{MN}_2\mathbf{M}_3)$. Нетрудно видеть, что касательная плоскость $(\mathbf{N}_1)$ совпадает с плоскостью $(\mathbf{MN}_1\mathbf{M}_3)$; действительно, два первых преобразования $\mathbf{N}_1$ суть $\mathbf{M}$ и $\mathbf{M}_3$.

Таким образом мы приходим к условиям

$$\left.\begin{aligned}(\mathbf{MN}_1\mathbf{M}_3\mathbf{N}_{1u})=0,\quad (\mathbf{MN}_1\mathbf{M}_3\mathbf{N}_{1v})=0,\\ (\mathbf{MN}_2\mathbf{M}_3\mathbf{N}_{2u})=0,\quad (\mathbf{MN}_2\mathbf{M}_3\mathbf{N}_{2v})=0,\end{aligned}\right\} \tag{37}$$

где вторая строчка получается из первой переменой знака φ. Эти условия необходимы, но недостаточны. В силу (37) лучи $\mathbf{MN}_1$, $\mathbf{MN}_2$ касаются соответственно поверхностей $(\mathbf{N}_1)$ и $(\mathbf{N}_2)$; следовательно $\mathbf{N}_1$ и $\mathbf{N}_2$ суть первые преобразования Лапласа поверхности $(\mathbf{M})$ относительно системы (35), как это следует из (30). Так как $\mathbf{M}_3$ лежит в касательной плоскости $(\mathbf{N}_1)$, то остается потребовать, чтобы $\mathbf{N}_1$ лежало в касательной плоскости $(\mathbf{M}_3)$ и чтобы луч $\mathbf{N}_1\mathbf{M}_3$ огибал на поверхности $(\mathbf{M}_3)$ линию $\frac{dv}{du}=-\varphi$. То и другое требование можно выразить одним уравнением

$$(\mathbf{M}_{3u}-\varphi\mathbf{M}_{3v},\mathbf{M}_3,\mathbf{N}_1)=0, \tag{38}$$

где равенство нулю скобки (38) означает, что все миноры третьего порядка матрицы, содержащей по 4 координаты написанных в скобке выражений, равны нулю.

Внося в первое уравнение (37) значение $\mathbf{N}_1=\mathbf{M}_1+\varphi\mathbf{M}_2$, мы получим в силу (30)

$$\left[\mathbf{M},\mathbf{M}_1+\varphi\mathbf{M}_2,\mathbf{M}_3,\left(\frac{m-a}{2}+n\varphi\right)\mathbf{M}_1+\left(\varphi_u+\beta+\frac{a+m}{2}\varphi\right)\mathbf{M}_2\right]=0$$

или

$$\varphi_u=-\beta-a\varphi+n\varphi^2.$$

Аналогично, второе уравнение (37) даст

$$\varphi_v = -m + b\varphi + \gamma\varphi^2.$$

Так как эти уравнения допускают перемену знака φ, то мы получаем систему

$$\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} = -a, \quad \frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} = b, \tag{39}$$

$$n = \frac{\beta}{\varphi^2}, \quad m = \gamma\varphi^2. \tag{40}$$

Уравнение (38) в силу (30) и (36) принимает вид

$$[\mathbf{M}_3, \mathbf{M}_1 + \varphi\mathbf{M}_2, \mathbf{M}(a_3^0 - \varphi b_3^0) + \mathbf{M}_1(a_3^1 - \varphi b_3^1) + \mathbf{M}_2(a_3^2 - \varphi b_3^2)] = 0$$

или, если раскрыть квадратные скобки,

$$(\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M})(a_3^0 - \varphi b_3^0) + (\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2\mathbf{M})\varphi(a_3^0 - \varphi b_3^0) +$$
$$+ (\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)[a_3^2 - \varphi(b_3^2 + a_3^1) + \varphi^2 b_3^1] = 0.$$

Так как плоскости $\mathbf{M}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$, $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$ не принадлежат одному пучку, то между координатами их не может существовать линейного соотношения. Следовательно коэффициенты должны обращаться в нуль. Это приводит нас еще к двум уравнениям:

$$a_3^0 - \varphi b_3^0 = 0, \tag{41}$$

$$a_3^2 - \varphi(b_3^2 + a_3^1) + \varphi^2 b_3^1 = 0. \tag{42}$$

Таким образом для определения сети Розе r_φ, т. е. для определения φ, мы имеем систему уравнений (39), (40), (41), (42), к которым надо еще присоединить основные уравнения (31a—e). Эти уравнения, кроме φ, содержат a, b, m, n, a_i^k, b_i^k.

Уравнения (39), (40) позволяют выразить a, b, m, n через φ:

$$a = -\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}, \quad b = \frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}, \quad m = \gamma\varphi^2, \quad n = \frac{\beta}{\varphi^2}. \tag{43a}$$

Уравнения (32) позволят найти a_1^0, b_2^0:

$$\left.\begin{aligned} a_1^0 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{2}\gamma\varphi^2\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi^2\gamma_u - \frac{1}{4}\gamma^2\varphi^4 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\varphi^2} + p, \\ b_2^0 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} - \frac{1}{2}\gamma\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} + \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\beta_v}{\varphi^2} - \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\varphi^4} - \frac{1}{2}\gamma^2\varphi^2 + q. \end{aligned}\right\} \tag{43b}$$

Определяя из (31a), (31b) a_3^1, b_3^2, b_3^1, a_3^2

$$\left.\begin{aligned} a_3^1 &= -a_2^0 - \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\,\partial v}, \quad b_3^2 = -b_1^0 + \frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\,\partial v}, \\ b_3^1 &= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} + \frac{1}{2}\gamma\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\frac{\beta_v}{\varphi^2} - \frac{1}{4}\frac{\beta^2}{\varphi^4} - \frac{1}{2}\gamma^2\varphi^2 + q + \gamma_u, \\ a_3^2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\right)^2 - \frac{1}{2}\gamma\varphi^2\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u} - \frac{1}{2}\beta\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v} - \\ &\quad - \frac{1}{2}\gamma_u\varphi^2 - \frac{1}{4}\gamma^2\varphi^4 - \frac{1}{2}\frac{\beta^2}{\varphi^2} + p + \beta_v \end{aligned}\right\} \tag{43c}$$

и подставляя в (31b) и (42), получим

$$a_2^0+b_1^0=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\varphi\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}+\frac{1}{4}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^2+\frac{1}{4}\varphi\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^2-$$
$$-\frac{1}{4}\gamma\varphi\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}+\frac{1}{4}\frac{\beta}{\varphi}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\beta_v}{\varphi}-\frac{1}{2}\gamma_u\varphi+\frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\varphi^3}+$$
$$+\frac{3}{4}\gamma^2\varphi^3-\frac{p}{\varphi}-q\varphi,$$

$$b_1^0-a_2^0=\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}+\gamma\varphi^2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}-\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\varphi^2}+\frac{1}{2}\gamma_v\varphi^2,$$

откуда

$$\left.\begin{aligned}
a_2^0=&-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{4}\varphi\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^2+\\
&+\frac{1}{8}\varphi\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^2-\frac{1}{2}\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}-\frac{1}{2}\gamma\varphi^2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}+\frac{3}{8}\gamma^2\varphi^3-\frac{1}{4}\gamma_v\varphi^2-\\
&-\frac{1}{2}\varphi\left(q+\frac{1}{2}\gamma_u\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}\left(p+\frac{1}{2}\beta_v\right)+\frac{1}{4}\frac{\beta_u}{\varphi^2}+\frac{3}{8}\frac{\beta^2}{\varphi^3},\\
b_1^0=&-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{4}\varphi\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}+\frac{1}{8}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^2+\\
&+\frac{1}{8}\varphi\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}+\frac{1}{2}\gamma\varphi^2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}+\frac{3}{8}\gamma^2\varphi^3+\\
&+\frac{1}{4}\gamma_v\varphi^2-\frac{1}{2}\varphi\left(q+\frac{1}{2}\gamma_u\right)-\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}\left(p+\frac{1}{2}\beta_v\right)-\frac{1}{4}\frac{\beta_u}{\varphi^2}+\frac{3}{8}\frac{\beta^2}{\varphi^3}.
\end{aligned}\right\}\quad(43d)$$

Наконец, исключая a_3^0, b_3^0 из двух первых уравнений (31d) и уравнения (41) [два других уравнения (31d) и уравнение (31e) являются следствием уравнений (29) и остальных уравнений (31a — f)], получим

$$a_{1v}^0-b_{1u}^0+\varphi(a_{2v}^0-b_{2u}^0)=b_1^0\left(-\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}-\gamma\varphi^2-\frac{\beta}{\varphi}\right)+$$
$$+a_1^0\left(\frac{\beta}{\varphi^2}+\gamma\varphi\right)-b_2^0\varphi\left(\frac{\beta}{\varphi}+\gamma\varphi^2\right)+a_2^0\varphi\left(-\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}+\gamma\varphi+\frac{\beta}{\varphi^2}\right)$$

или, внося (43b), (43d),

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^3\ln\varphi}{\partial u^3}-\frac{\partial^3\ln\varphi}{\partial u^2\,\partial v}-\varphi\frac{\partial^3\ln\varphi}{\partial u\,\partial v^2}+\varphi^2\frac{\partial^3\ln\varphi}{\partial v^3}+$$
$$+\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}\left(-\frac{3}{\varphi}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}-4\frac{\beta}{\varphi^2}\right)+\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}-\varphi\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}\left(3\varphi^2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}-4\gamma\varphi^3\right)+\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^3+\varphi^2\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^3+$$
$$+\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^2\left(7\frac{\beta}{\varphi^2}+\gamma\varphi\right)+\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^2(-7\gamma\varphi^3-\beta)+$$
$$+\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\cdot\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\left(2\gamma\varphi^2-2\frac{\beta}{\varphi}\right)+\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\left(-3\gamma^2\varphi^3+\gamma_v\varphi^2+\right.$$
$$\left.+2\gamma_u\varphi-4\frac{\beta}{\varphi}-5\frac{\beta_u}{\varphi^2}+6\frac{\beta^2}{\varphi^3}\right)+\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\left(6\gamma^2\varphi^4-5\gamma_v\varphi^3-\right.$$
$$\left.-4\varphi^2q+2\beta_v+\frac{\beta_u}{\varphi}-3\frac{\beta^2}{\varphi^2}\right)-\gamma^3\varphi^5+3\gamma\gamma_v\varphi^4+(4\gamma q-$$
$$-\gamma_{vv}-\gamma\gamma_u)\varphi^3-(2q_v+\gamma^2\beta)\varphi^2+(2\gamma_{uu}+\beta\gamma_v-4p\gamma)\varphi+$$
$$+(-2\beta_{vv}-\beta_u\gamma+4\beta q)+\frac{1}{\varphi}(2p_u+\beta^2\gamma)+\frac{1}{\varphi^2}(\beta_{uu}-4\beta p+$$
$$+\beta\beta_v)-\frac{3}{\varphi^3}\beta\beta_u+\frac{\beta^3}{\varphi^4}=0. \qquad (44)$$

Итак, на каждой поверхности, т. е. для заданных функций p, q, β, γ, существует бесконечное множество сетей конгруэнций Розе r_φ, зависящее от трех произвольных функций одного аргумента.

§ 12

Допустим теперь, что конгруэнция $(\mathbf{MN}_2)$ тоже конгруэнция Розе и притом в ту же сторону, т. е. сеть $\frac{dv}{du} = \pm\varphi$ есть сеть $r - r'$. В таком случае первое преобразование точки $\mathbf{M}$ в сторону φ, т. е. $\mathbf{N}_1$, лежит в касательной плоскости второго преобразования $\mathbf{M}$ в сторону $-\varphi$, т. е. преобразования в сторону $-\varphi$ точки $\mathbf{N}_2$; мы обозначим эту точку буквой $\mathbf{N}_4$.

Точка $\mathbf{N}_4$, очевидно, лежит в касательной плоскости поверхности $(\mathbf{N}_2)$, т. е. в плоскости $\mathbf{MN}_2\mathbf{M}_3$; следовательно

$$\mathbf{N}_4 = \mu\mathbf{N}_2 + \lambda\mathbf{M} + \mathbf{M}_3. \tag{45}$$

Так как по условию точка $\mathbf{N}_1$ лежит в касательной плоскости $(\mathbf{N}_4)$ и, конечно, эта плоскость содержит точку $\mathbf{N}_2$, с которой $\mathbf{N}_4$ связана преобразованием Лапласа, то касательной плоскостью поверхности $(\mathbf{N}_4)$ должна быть плоскость $(\mathbf{N}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$; следовательно

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{N}_4\mathbf{N}_{4u}) = 0, \quad (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{N}_4\mathbf{N}_{4v}) = 0. \tag{46}$$

Наконец, остается потребовать, чтобы прямая $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_4$ была сопряжена прямой $\mathbf{N}_2\mathbf{M}$ относительно индикатрисы Дюпена поверхности $(\mathbf{N}_2)$ или, иначе, чтобы прямая $\mathbf{N}_2\mathbf{N}_4$ касалась на поверхности $(\mathbf{N}_2)$ линии $\frac{dv}{du} = -\varphi$, т. е. чтобы

$$(\mathbf{N}_2,\ \mathbf{N}_{2u} - \varphi\mathbf{N}_{2v},\ \mathbf{N}_4) = 0. \tag{47}$$

Внося в уравнение (47) значения (36), (45) и пользуясь таблицей (30), получим

$$\Big[\mathbf{M}_1 - \varphi\mathbf{M}_2,\quad \lambda\mathbf{M} + \mathbf{M}_3,\quad \mathbf{M}(a_1^0 - \varphi a_2^0 - \varphi b_1^0 + \varphi^2 b_2^0) + \\ + \mathbf{M}_1\left(\frac{m-a}{2} - \varphi\frac{3n+b}{2} + \varphi^2\gamma\right) + \\ + \mathbf{M}_2\left(\beta - \varphi\frac{a+3m}{2} + \varphi^2\frac{n-b}{2} - \varphi_u + \varphi\varphi_v\right) - 2\varphi\mathbf{M}_3\Big] = 0.$$

Если сюда внести, согласно (43а),

$$\varphi_u = -a\varphi, \quad \varphi_v = b\varphi, \quad m = \gamma\varphi^2, \quad \beta = n\varphi^2,$$

то члены с $\mathbf{M}_1$ и $\mathbf{M}_2$ в последнем множителе в скобках примут вид

$$\mathbf{M}_1\left(\frac{3m-a}{2} - \varphi\frac{3n+b}{2}\right) + \mathbf{M}_2\left(-\varphi\frac{3m-a}{2} + \varphi^2\frac{3n+b}{2}\right),$$

т. е. будут пропорциональны $\mathbf{M}_1 - \varphi\mathbf{M}_2$ и по свойству определителя сократятся с первым множителем. Следовательно, раскрывая квадратные скобки, получим

$$(\mathbf{M}_1 - \varphi\mathbf{M}_2,\ \mathbf{M},\ \mathbf{M}_3)\,[2\lambda\varphi + a_1^0 - \varphi(a_2^0 + b_1^0) + \varphi^2 b_2^0] = 0,$$

откуда

$$2\lambda = -\frac{a_1^0}{\varphi} - b_2^0\varphi + a_2^0 + b_1^0 \tag{48}$$

или, в силу (41b), (41d),

$$\lambda = -\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\varphi\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial v^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\right)^2 + \frac{1}{4}\varphi\left(\frac{\partial \ln\varphi}{\partial v}\right)^2 + \\ + \frac{3}{4}\gamma^2\varphi^3 - \varphi\left(q + \frac{1}{2}\gamma_u\right) - \frac{1}{\varphi}\left(p + \frac{1}{2}\beta_v\right) + \frac{3}{4}\frac{\beta^2}{\varphi^3}. \tag{48'}$$

Внося в уравнения (46) значение (45) и пользуясь таблицей (30), получим

$$\left[\mathbf{M}_1,\ \mathbf{M}_2,\ \lambda\mathbf{M} + \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}\left(\lambda_u + \lambda\frac{a-m}{2} + \mu a_1^0 - \mu\varphi a_2^0 + a_3^0\right) - \\ - \mathbf{M}_3\left(\mu\varphi + \frac{a+m}{2}\right)\right] = 0,$$

$$\left[\mathbf{M}_1,\ \mathbf{M}_2,\ \lambda\mathbf{M} + \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}\left(\lambda_v + \lambda\frac{b-n}{2} + \mu b_1^0 - \mu\varphi b_2^0 + b_3^0\right) + \\ + \mathbf{M}_3\left(\mu - \frac{b+n}{2}\right)\right] = 0$$

или

$$\lambda_u = -\mu(a_1^0 - \varphi a_2^0 + \lambda\varphi) - \lambda a + a_3^0,$$
$$\lambda_v = -\mu(b_1^0 - \varphi b_2^0 - \lambda) - \lambda b + b_3^0.$$

Если первое из этих уравнений разделить на φ и вычесть отсюда второе, то, в силу (48), μ сократится, и мы получим, если принять во внимание (41),

$$\frac{1}{\varphi}\lambda_u - \lambda_v = -\lambda\left(\frac{a}{\varphi} - b\right)$$

или, внося (43a), (48) и вычитая уравнение (44),

$$4\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u^2} + 4\gamma\varphi^3\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial v^2} - 4\frac{\partial^2 \ln\varphi}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{\beta}{\varphi} + \gamma\varphi^2\right) - \\ - \left(\frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\right)^2\left(7\frac{\beta}{\varphi^2} + \gamma\varphi\right) - 2\frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\frac{\partial \ln\varphi}{\partial v}\left(\gamma\varphi^2 - \frac{\beta}{\varphi}\right) + \\ + \left(\frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\right)^2(7\gamma\varphi^3 + \beta) + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial u}\left[-\gamma_v\varphi^2 - 2\gamma_u\varphi - 2\frac{\beta_v}{\varphi} + 5\frac{\beta_u}{\varphi^2}\right] + \\ + \frac{\partial \ln\varphi}{\partial v}\left[5\gamma_v\varphi^3 - 2\gamma_u\varphi^2 - 2\beta_v - \frac{\beta_u}{\varphi}\right] + \gamma^3\varphi^5 - \\ - (4\gamma q - \gamma_{vv} + 2\gamma\gamma_u)\varphi^3 - (\gamma_{uv} - \gamma^2\beta)\varphi^2 + (4p\gamma - \beta\gamma_v - \\ - \gamma_{uu} + 2q_u)\varphi + \beta_{vv} - 2p_v + 4\beta q + \beta_u\gamma + (\beta_{uv} - \gamma\beta^2)\frac{1}{\varphi} + \\ + (2\beta\beta_v - \beta_{uu} + 4\beta p)\frac{1}{\varphi^2} - \frac{\beta^3}{\varphi^4} = 0. \tag{49}$$

Если функция φ удовлетворяет уравнениям (44) и (49), то обе конгруэнции сети $\frac{du}{dv} = \pm\varphi$ суть конгруэнции Розе; следовательно последовательность Лапласа, связанная с этой сопряженной системой, есть последовательность Розе. Так как система (44), (49) вообще не совместна, то не всякая поверхность несет на себе сопряженные системы Розе, обе конгруэнции касательных которой суть конгруэнции Розе.

Так как при $\beta=0$, $\gamma=0$ уравнение (49) исчезает тождественно, то на поверхности 2-го порядка всякая сопряженная система с одной конгруэнцией Розе имеет и другую конгруэнцию Розе. Следовательно на поверхности 2-го порядка семейство сопряженных систем Розе зависит от трех произвольных функций одного аргумента. На всякой другой поверхности сопряженные системы Розе могут зависеть только от произвольных постоянных. Действительно, если β отлично от нуля, то уравнение (49) позволяет определить $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2}$. Если задать для $u=u_0$, $v=v_0$ значения φ, $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2}$, то уравнение (49) дает $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2}$. Дифференцируя это уравнение по u и по v и присоединяя уравнение (44), мы получим три уравнения для определения третьих производных.

Если задать значение $\frac{\partial^3 \ln \varphi}{\partial v^3}$ для $u=u_0$, $v=v_0$, то эти уравнения позволят определить все третьи производные. Дифференцируя их по u и по v и подставляя $u=u_0$, $v=v_0$, мы сумеем найти все производные, если, конечно, не встретим противоречия. Таким образом мы можем написать разложение $\ln \varphi$ в ряд по степеням $u-u_0$, $v-v_0$, если будут известны значения φ, $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u \partial v}$, $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2}$, $\frac{\partial^3 \ln \varphi}{\partial v^3}$, как произвольные постоянные для $u=u_0$, $v=v_0$. Следовательно сопряженная система Розе может зависеть не более, чем от 6 произвольных постоянных.

§ 13

Чтобы определить сети $r-r'$ на поверхности 2-го порядка, проще всего искать эту поверхность, отнесенную к такой сети, т. е. вернуться к формулам § 2 и § 6.

Итак, допустим, что поверхность $(\mathbf{M}_1)$, определяемая таблицей (2) и системой уравнений (3) и (4), есть поверхность 2-го порядка. В таком случае асимптотические линии

$$\delta\, du^2 - \Delta\, dv^2 = 0$$

на поверхности $(\mathbf{M}_1)$ будут прямые, т. е., полагая например

$$du = \pm \sqrt{\frac{\Delta}{\delta}}, \qquad dv = 1,$$

мы будем иметь

$$(d^2\mathbf{M}_1,\ d\mathbf{M}_1,\ \mathbf{M}_1) = 0$$

или, пользуясь таблицей (2),

$$\left\{ \mathbf{M}_2 \left[\Delta \left(2p_1 + P_1 + \frac{\partial \ln \delta}{\partial u}\right) + \sqrt{\delta\Delta} \left(p + \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v}\right) \right] - \right.$$
$$\left. - 2P\mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}_2\sqrt{\delta\Delta} + \mathbf{M}_3,\ \mathbf{M}_1 \right\} = 0$$

или, так как $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)$ не нуль,

$$\Delta \left(2p_1 + P_1 + \frac{\partial \ln \delta}{\partial u}\right) + \sqrt{\delta\Delta} \left(p + 2P + \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v}\right) = 0.$$

Так как это уравнение должно удовлетворяться для обоих знаков корня $\pm\sqrt{\delta\Delta}$, если оба семейства асимптотических состоят из прямых, то

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial u} = -2p_1 - P_1, \qquad \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} = -p - 2P. \tag{50}$$

Рассматривая эти уравнения совместно с уравнениями (3a, c)

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = p, \qquad \frac{\partial \ln \Delta}{\partial u} = P_1$$

и составляя условие совместности, получим в силу (3b, f)

$$m = \Delta\Delta_1, \qquad m_1 = \delta\delta_1. \tag{51a}$$

Внося это значение m_1 в уравнения (3b, e), мы получим

$$R_{1v} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \ln \delta_1}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

С другой стороны, исключая p_1, P_1 с помощью (3a), мы имеем

$$\frac{\partial}{\partial u}(\delta\Delta\delta_1^2) = 0.$$

Следовательно, выбирая подходящим образом параметры u, v и нормирование, мы получим, согласно формуле (7)

$$\delta_1 = 1, \qquad R_1 = 1, \qquad \delta\Delta = 1. \tag{51b}$$

Таблицы уравнений (3a—f) и (4) дают теперь

$$R = \frac{1}{\delta^2}, \quad N = 0, \quad N_1 = \frac{P_1}{\delta}, \quad p_1 = 0, \quad P = 0 \tag{51c}$$

и для определения δ, Δ_1, p, P_1 систему в инволюции

$$\left.\begin{aligned} &\delta_u = -\delta P_1, && \delta_v = p\delta, \\ &p_u = \delta - \frac{\Delta_1}{\delta}, && P_{1v} = \frac{\Delta_1}{\delta} - \delta, \\ &\Delta_{1v} = \frac{P_1}{\delta}, && \end{aligned}\right\} \tag{51d}$$

которая их определяет с тремя произвольными функциями одного аргумента.

Так как уравнения (19), (20) теперь удовлетворены, то мы снова получаем, что всякая система r на поверхности 2-го порядка есть система $r - r'$, следовательно порождает последовательность Розе.

Подсчитывая таким образом уравнение

$$(d^2\mathbf{M}_2, d\mathbf{M}_2, \mathbf{M}_2) = 0,$$

выражающее условие, что поверхность $(\mathbf{M}_2)$ тоже имеет два семейства прямолинейных образующих, мы найдем

$$\frac{\partial \ln \Delta_1}{\partial u} = -2P_1, \quad 2p\Delta_1\delta + 3P_1 = 0. \tag{52}$$

Так как уравнения (52) не следуют из системы (51d), то сеть $r-r'$ на поверхности 2-го порядка переводится преобразованием Лапласа в сеть, вообще не лежащую на поверхности 2-го порядка.

§ 14

Особый вид последовательностей Розе представляет сама в себя вписанная последовательность, все фокальные сети которой являются гармоническими сетями r; она может быть охарактеризована требованием: касательная к одной из линий фокальной сети каждой из фокальных поверхностей последовательности проходит через соответствующую точку третьего преобразования Лапласа в сторону другой линии сети.

Потребуем, чтобы сеть $\frac{dv}{du}=\pm\varphi$ была гармонической сетью r_φ т. е. чтобы касательная к линии $\frac{dv}{du}=\varphi$ на поверхности $(\mathbf{N}_2)$ проходила через точку $\mathbf{M}_3$. Это требование может быть выражено уравнением $\lambda=0$, т. е.

$$a_1^0-\varphi(a_2^0+b_1^0)+\varphi^2 b_2^0=0. \tag{53}$$

Так как уравнение (42) в силу (43c), (31c) принимает вид

$$a_1^0+\varphi(a_2^0+b_1^0)+\varphi^2 b_2^0=0, \tag{42'}$$

то уравнение (53) дает

$$a_1^0+\varphi^2 b_2^0=0, \quad a_2^0+b_1^0=0. \tag{54}$$

Уравнение (49) в силу $\lambda=0$ удовлетворяется тождественно. Уравнение (31b) дает теперь

$$b_1^0=-a_2^0=\frac{1}{2}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\,\partial v}+\frac{1}{2}\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}+\frac{1}{2}\gamma\varphi^2\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}-\frac{1}{4}\frac{\beta_u}{\varphi^2}+\frac{1}{4}\gamma_v\varphi^2,$$

и следовательно уравнения (48') и (44) примут вид

$$\frac{1}{\varphi}\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}-\varphi\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}-\frac{1}{2}\frac{1}{\varphi}\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^2-\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^2-\frac{3}{2}\gamma^2\varphi^3+$$
$$+(2q+\gamma_u)\varphi+\frac{2p+\beta_v}{\varphi}-\frac{3}{2}\frac{\beta^2}{\varphi^3}=0, \tag{55a}$$

$$\left(\gamma\varphi+\frac{\beta}{\varphi^2}\right)\left(\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u^2}-2\varphi\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial u\,\partial v}+\varphi^2\frac{\partial^2\ln\varphi}{\partial v^2}\right)-\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\right)^2\left(3\frac{\beta}{\varphi^2}+\gamma\varphi\right)+$$
$$+\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\left(\frac{\beta}{\varphi}-\gamma\varphi^2\right)+\left(\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\right)^2(3\gamma\varphi^3+\beta)-\frac{\partial\ln\varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\gamma_v\varphi^2+\right.$$
$$\left.+\gamma_u\varphi+\frac{\beta_v}{\varphi}-\frac{5}{2}\frac{\beta_u}{\varphi^2}\right)-\frac{\partial\ln\varphi}{\partial v}\left(-\frac{5}{2}\gamma_v\varphi^3+\gamma_u\varphi^2+\beta_v+\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\varphi}\right)-$$
$$-\gamma^3\varphi^5+\frac{1}{2}\gamma_{vv}\varphi^3+\left(2\beta\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma_{uv}\right)\varphi^2+(4p\gamma-\gamma_{uu}+4\gamma\beta_v)\varphi-$$
$$-4q\beta+\beta_{vv}-4\beta\gamma_u-\left(2\beta^2\gamma-\frac{1}{2}\beta_{uv}\right)\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{2}\beta_{uu}\frac{1}{\varphi^2}+\frac{\beta^3}{\varphi^4}=0. \tag{55b}$$

Так как второе уравнение исчезает тождественно, если $\beta=0$, $\gamma=0$, то на поверхности 2-го порядка гармонические сети r определяются уравнением (55a) с двумя произвольными функциями одного аргумента.

На всякой другой поверхности, если она допускает эти сети, совокупность их зависит не более, чем от четырех постоянных: достаточно дать начальные значения φ, $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}$, $\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2}$ для $u=u_0$, $v=v_0$, чтобы система (55 a, b) позволила вычислить все производные от φ, если, конечно, не встретится противоречий.

§ 15

Если уравнения (55a), (55b) удовлетворены значениями $\pm\varphi$, то не только $\mathbf{M}_3$, первое преобразование Лапласа от $\mathbf{N}_1$, лежит на луче, соединяющем $\mathbf{N}_2$ с его преобразованием $\mathbf{N}_4$, но и наоборот, это преобразование $\mathbf{N}_4$ лежит на луче $\mathbf{N}_1\mathbf{M}_3$, следовательно оба преобразования $\mathbf{M}_3$ и $\mathbf{N}_4$ совпадают, и косой четырехугольник $\mathbf{M}\mathbf{N}_1\mathbf{M}_2\mathbf{N}_2$ описывает периодическую с периодом 4 последовательность Лапласа.

Уравнение (55a), очевидно, допускает изменение знака φ, а уравнение (55b) распадается теперь на два:

$$\gamma\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2}+\varphi^2\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2}\right)-2\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\,\partial v}-\gamma\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\right)^2+3\varphi^2\gamma\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}\right)^2+$$
$$+\frac{\beta}{\varphi^2}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\left(\gamma_u+\frac{\beta_v}{\varphi^2}\right)+\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}\left(\frac{5}{2}\gamma_v\varphi^2-\frac{1}{2}\frac{\beta_u}{\varphi^2}\right)-$$
$$-\gamma^3\varphi^4+\frac{1}{2}\gamma_{vv}\varphi^2+(4p\gamma-\gamma_{uu}+4\gamma\beta_v)-\frac{2\beta^2\gamma-\frac{1}{2}\beta_{uv}}{\varphi^2}=0, \tag{56a}$$

$$\frac{\beta}{\varphi^2}\left(\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u^2}+\varphi^2\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial v^2}\right)-2\gamma\varphi^2\frac{\partial^2 \ln \varphi}{\partial u\,\partial v}-3\frac{\beta}{\varphi^2}\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\right)^2+\beta\left(\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}\right)^2-$$
$$-\gamma\varphi^2\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}-\frac{\partial \ln \varphi}{\partial u}\left(\frac{1}{2}\gamma_v\varphi^2-\frac{5}{2}\frac{\beta_u}{\varphi^2}\right)-\frac{\partial \ln \varphi}{\partial v}(\gamma_u\varphi^2+\beta_v)+$$
$$+\left(2\beta\gamma^2-\frac{1}{2}\gamma_{uv}\right)\varphi^2-4q\beta+\beta_{vv}-4\beta\gamma_u-\frac{1}{2}\frac{\beta_{uu}}{\varphi^2}+\frac{\beta^3}{\varphi^4}=0. \tag{56b}$$

Так как оба уравнения (56a, b) исчезают для $\beta=\gamma=0$, то на поверхности 2-го порядка все сопряженные системы, полученные из уравнения (55a), определяют периодические последовательности Лапласа; на всех остальных поверхностях эти сопряженные системы могут зависеть не более, чем от трех постоянных, если система уравнений (55a), (56a, b) вполне интегрируема. Впрочем, дальнейшее исследование показывает, что условие полной интегрируемости сводится к равенствам $\beta=\gamma=0$; следовательно на всякой поверхности, кроме поверхности 2-го порядка, эти сопряженные системы могут зависеть не более чем от двух произвольных постоянных.

Научно-исслед. институт математики
Московского гос. университета.

Поступило
22.XI.1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rozet O., Sur une congruence particulière de droites, Bull. de l'Ac. Belgique (5), 18 (1932), 356—360.

[2] Wilczynski E. I., Geometrical significance of isothermal conjugacy of a net of curves, Amer. Journ. of Mathem., 42 (1920), 215.

[3] Фиников С. П., Проективно-дифференциальная геометрия, М. 1937.

S. FINIKOFF. RÉSEAUX DE ROZET

RÉSUMÉ

1. Dans un article récent «Sur une congruence particulière de droites» (Bull. de l'Ac. Belgique **18**, 356) O. Rozet a examiné une nouvelle espèce de congruences. Elle est caractérisée par la propriété géométrique, à savoir: le transformé de Laplace d'un foyer de chaque rayon, le second foyer et ses deux transformés consécutifs sont situés dans le même plan.

Dans le présent mémoire je vais examiner la congruence de Rozet en partant de sa définition géométrique.

Comme la définition n'est pas symétrique par rapport aux foyers, il est plus commode d'examiner les réseaux focaux de cette congruence. Nous appellerons réseau de Rozet dans la direction de la ligne u ou réseau r_u le réseau conjugué (u, v) tracé sur une surface (M) dont le second transformé de Laplace du point M est situé dans le plan tangent du premier transformé de Laplace de la surface (M) dans la direction v.

Nous appellerons second réseau de Rozet ou réseau r'_v le réseau conjugué (u, v) dont les points homologues du premier transformé dans la direction u et des trois transformés consécutifs dans la direction v sont complanaires. Nous appellerons troisième réseau de Rozet ou réseau r''_u le réseau conjugué (u, v) dont le point homologue du troisième transformé dans la direction u est situé dans le plan tangent de la surface qui porte le réseau.

2. Soit $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ une congruence de Rozet, $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ les foyers, u, v les développables, le réseau focal (u, v) sur $(\mathbf{M}_1)$ le réseau r_u, sur $(\mathbf{M}_2)$ le réseau r'_v. Le transformé de Laplace de M_2 dans la direction u (le point $\mathbf{M}_4$), le foyer $\mathbf{M}_1$ et ses deux transformés dans la direction v M_3 et M_5 sont complanaires, c'est-à-dire la droite $\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5$ qui touche la ligne v sur $(\mathbf{M}_3)$ est située dans le plan $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3$ ou bien

$$(\mathbf{M}_4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_{3v}) = 0 \tag{1}$$

où le crochet désigne le déterminant dont les éléments sont les coordonnées homogènes des points (analytiques) $\mathbf{M}_4$, $\mathbf{M}_1$ etc.

Attachons à chaque rayon $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2$ le tétraèdre normal $M_1M_2M_3M_4$ que j'ai introduit (Annali de Pisa **2**, 59) et dont les déplacements projectifs sont déterminés par le système:

$$\left.\begin{array}{ll}
\mathbf{M}_{1u} = \delta\mathbf{M}_2, & \mathbf{M}_{1v} = p\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_3, \\
\mathbf{M}_{2u} = p_1\mathbf{M}_2 + \mathbf{M}_4, & \mathbf{M}_{2v} = \delta_1\mathbf{M}_2, \\
\mathbf{M}_{3u} = m\mathbf{M}_1, & \mathbf{M}_{3v} = R\mathbf{M}_1 + N\mathbf{M}_2 - P\mathbf{M}_3 - \Delta\mathbf{M}_4, \\
\mathbf{M}_{4u} = N_1\mathbf{M}_1 + R_1\mathbf{M}_2 - \Delta_1\mathbf{M}_3 - P_1\mathbf{M}_4, & \mathbf{M}_{4v} = m_1\mathbf{M}_2.
\end{array}\right\} \tag{2}$$

L'équation (1) prend maintenant la forme

$$N = 0 \tag{1'}$$

et la condition d'intégrabilité du système (2) devient

$$\frac{\partial \ln \delta}{\partial v} = p, \qquad \frac{\partial \ln \delta_1}{\partial u} = p_1, \tag{3a}$$
$$p_u = \delta\delta_1 - m, \qquad p_{1v} = \delta\delta_1 - m_1, \tag{3b}$$
$$\Delta_u = P_1\Delta, \qquad \Delta_{1v} = P\Delta_1 + N_1, \tag{3c}$$
$$N_{1v} = R\Delta_1 - R_1\delta_1 - N_1 p, \qquad R_1\Delta - R\delta = 0, \tag{3d}$$
$$m_v - R_u = -m(P+p) - \Delta N_1, \qquad m_{1u} - R_{1v} = -m_1(P_1 + p_1), \tag{3e}$$
$$P_u = \Delta\Delta_1 - m, \qquad P_{1v} = \Delta\Delta_1 - m_1. \tag{3f}$$

Si l'on donne R comme une fonction arbitraire de u et de v, la seconde équation (3d) donne R_1 et toutes les autres déterminent la solution avec 11 fonctions arbitraires d'un argument.

La congruence de Rozet ainsi que les réseaux r_u, r'_v, r''_u dépendent d'une fonction arbitraire de deux arguments.

3. Si la congruence de Rozet est W, on a (ibid., 60)

$$\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0. \tag{4}$$

En portant l'expression de P_1 tirée de (3c) dans la seconde équation (3f) on trouve que $\Delta : \delta_1$ est le produit d'une fonction arbitraire de u par une fonction de v. Le changement convenable des paramètres u, v les réduit à l'unité, donc

$$\Delta = \delta_1, \quad \Delta_1 = \delta, \tag{5}$$

c'est ce qui caractérise les congruences d'un complexe linéaire.

Inversement, chaque congruence d'un complexe linéaire est de Rozet.

4. Si les tangentes aux lignes v du réseau r_u décrivent une congruence W, les asymptotiques sur (M_1) et (M_2) se correspondent, d'où il suit

$$m = m_1 \tag{6}$$

et les équations (3b) montrent que le choix convenable des paramètres u, v rend δ égal à δ_1. Le premier invariant du réseau focal de (M_1) est égal au second de (M_2); la congruence (M_1M_2) est de Goursat.

Si la congruence des tangentes aux lignes v d'un réseau r_u est W, celle des lignes u est de Goursat, le réseau dépend de 9 fonctions arbitraires d'un argument.

Si la congruence des tangentes des lignes u d'un réseau r'_v est W, le réseau dépend de 8 fonctions arbitraires d'un argument. Le premier invariant tangentiel de (M_1) est égal au second de (M_2).

5. Si un réseau r_u est en même temps r'_u, la congruence (M_1M_2) est doublement de Rozet (dans la direction u et v). On a évidemment

$$N = 0, \quad N_1 = 0. \tag{7}$$

Les équations (3d) deviennent algébriques et donnent $\Delta\Delta_1 - \delta\delta_1 = 0$ ou bien $R = 0$, $R_1 = 0$. Le premier cas nous renvoie aux congruences W, le second nous donne une suite de Laplace périodique à période 4.

Inversement, chaque suite de Laplace périodique à période 4 contient évidemment 4 congruences doublement de Rozet.

6. Si un réseau r_u est en même temps r'_v, deux congruences quelconques du réseau par exemple $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$ et $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$ sont de Rozet dans le même sens. Le point $\mathbf{M}_6$, transformé de Laplace de $\mathbf{M}_4$ dans la direction u, est situé dans le plan tangent de $(\mathbf{M}_1)$. Comme le point $\mathbf{M}_6$ est situé sur la tangente $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_{4u}$ et dans le plan $\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3$, il est de la forme

$$\mathbf{M}_6 = N_1\mathbf{M}_1 + R_1\mathbf{M}_2 - \Delta_1\mathbf{M}_3 \tag{8}$$

et la condition que $\mathbf{M}_{6v} = R_{1v}\mathbf{M}_2 + \Delta\Delta_1\mathbf{M}_4$ appartienne à la droite $\mathbf{M}_4\mathbf{M}_6$ s'exprime par la relation

$$R_{1v} = 0. \tag{9}$$

Or si les équations (1′), (9) sont vérifiées, non seulement les congruences $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)$, $(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4)$ sont de Rozet, mais la congruence $(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4)$ l'est également. En effet, la condition, que M_2 est situé dans le plan tangent de la surface $(\mathbf{M}_5)$ décrite par le transformé de Laplace de M_3 dans la direction v, s'exprime par l'équation

$$(\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_{5v}) = 0,$$

ou bien

$$\frac{\partial \ln R}{\partial v} + p - \frac{\partial \ln \Delta}{\partial v} = 0. \tag{10}$$

Or, en différentiant la seconde équation (3d), on obtient à l'aide de (3a) et (9) précisement l'équation (10). Il en dérive que deux congruences consécutives d'une suite de Laplace étant de Rozet, la troisième l'est également et toutes les congruences de la suite le sont.

La suite de Rozet est caractérisée par la propriété que le premier axe de chaque réseau focal coïncide avec le second du réseau suivant.

L'équation (9) montre que R_1 est une fonction d'une seule variable u. Par un changement convenable des paramètres on la réduit à l'unité, si elle n'est pas égale à zéro. La suite dépend de 10 fonctions arbitraires d'un argument.

Si $R_1 = 0$, la seconde équation (3d) donne $R = 0$. Si de plus $N_1 = 0$, on obtient une suite de Laplace périodique de période 4. Si $N_1 \gtrless 0$, tous les réseau sont harmoniques de Wilczynski, la tangente à la ligne v de chaque réseau focal passe par le point homologue du troisième transformé de Laplace dans la direction u. Inversement, chaque réseau r_u harmonique donne naissance à une suite de cette espèce. La suite dépend de 9 fonctions arbitraires d'un argument.

7. Si un réseau r_u est à la fois r_v, deux congruences du réseau sont de Rozet aux directions opposées. On a

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_5\mathbf{M}_4) = 0, \quad (\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{M}_4\mathbf{M}_6) = 0,$$

d'ou il suit

$$(\mathbf{M}_1\mathbf{M}_4\mathbf{M}_5) = 0,$$

c'est-à-dire le foyer M_5 est situé sur la droite M_1M_4, le réseau dépend de 12 fonctions arbitraires d'un argument.

Le réseau r'_u, en même temps r'_v, dépend de 12 fonctions arbitraires d'un argument.

La suite de Laplace dont les réseaux focaux d'ordre pair sont les réseaux r_u, en même temps r_v, ceux d'ordre impair les réseaux r'_u, en même temps r'_v, est une suite de Wilczynski dont toutes les congruences appartiennent à des complexes linéaires.

8. Quelle que soit une surface arbitraire S, elle porte une infinité de réseaux r dépendant de trois fonctions arbitraires d'un argument.

Les surfaces focales d'une suite de Rozet ne sont pas des surfaces arbitraires. Une surface du second degré porte une infinité de réseaux qui donnent naissance à des suites de Rozet, la famille des réseaux dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument. Toutes les autres surfaces en portent (si elles portent) une famille dépendant de six constantes au plus.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 181—192 Série mathématique

Н. А. РОЗЕНСОН

О РИМАНОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ КЛАССА I

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

В работе выводятся необходимые условия того, что данное риманово пространство является пространством класса I.

В настоящей работе даны необходимые условия для того, чтобы риманово пространство n измерений имело класс I. Эти условия представляют собой систему уравнений в тензорной форме, имеющих относительно составляющих тензора кривизны степень $\frac{n}{2}$ и n, соответственно для пространства четного и нечетного числа измерений *.

Кроме того, получены выражения для некоторых совместных инвариантов первой и второй фундаментальных квадратичных форм через составляющие метрического тензора и тензора кривизны n-мерного риманова пространства класса I.

Пусть V_n есть n-мерное риманово пространство с фундаментальной квадратичной формой **

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta, \tag{1}$$

где x^α — координаты точки рассматриваемого пространства и $g_{\alpha\beta}$ — функции от этих координат, непрерывные в некоторой области изменения x^α и имеющие в этой области производные по крайней мере до второго порядка включительно. Будем предполагать, что V_n имеет класс I, т. е. что оно является гиперповерхностью $(n+1)$-мерного эвклидова пространства S_{n+1} с фундаментальной квадратичной формой

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{i=n+1} dy^{i2}, \tag{2}$$

* Вопросом о получении необходимых и достаточных условий для того, чтобы n-мерное риманово пространство имело класс I, занимались Вейзе [1] и Томас [2]. Они решили этот вопрос, за исключением некоторых случаев, но условия, полученные ими, не даны в явном виде, в тензорной форме. Метод, которым пользуется автор настоящей статьи, отличен от метода авторов упомянутых работ.

** Подразумевается суммирование от 1 до n по каждому значку, входящему дважды в какой-нибудь член. Всякое исключение из этого правила каждый раз оговаривается.

где y^i — декартовы координаты в этом пространстве. Тогда V_n определяется в S_{n+1} системой уравнений вида

$$y^i = f^i(x^1, x^2, \ldots, x^n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n+1) \tag{3}$$

и $g_{\alpha\beta}$ выражаются формулами [3]

$$g_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^{i=n+1} y^i_{,\alpha} y^i_{,\beta} \quad \left(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n; \quad y^i_{,\alpha} = \frac{\partial y^i}{\partial x^\alpha}\right) \tag{4}$$

Из последнего равенства следует, что в случае реального погружения V_n в S_{n+1} (мы ограничимся рассмотрением только такого случая) форма $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ является положительно определенной.

Тензор кривизны $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ для n-мерного риманова пространства класса I имеет вид

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \Omega_{\alpha\gamma}\Omega_{\beta\delta} - \Omega_{\alpha\delta}\Omega_{\beta\gamma}. \tag{5}$$

Здесь $\Omega_{\alpha\beta}$ — коэффициенты второй фундаментальной квадратичной формы, т. е.

$$\Omega_{\alpha\beta} = -\sum_{i=1}^{i=n+1} y^i_{,\alpha}\xi^i_{,\beta}, \tag{6}$$

где ξ^i — единичный вектор, ортогональный в данной точке V_n к касательному эвклидову пространству, образованному n векторами $y^i_{,\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n)$. (Эти n векторов линейно независимы, так как матрица $\|y^i_{,\alpha}\|$ имеет ранг n.)

Ставим себе задачу получить для V_n на основании равенств (5) ряд соотношений в тензорной форме между составляющими тензора кривизны, не содержащих коэффициентов второй квадратичной формы.

Введем в рассмотрение некоторый контравариантный симметричный тензор 2-го ранга $a^{\alpha\beta}$ и построим n независимых совместных инвариантов двух квадратичных форм с коэффициентами $a^{\alpha\beta}$ и $\Omega_{\alpha\beta}$ (будем предполагать, что первая из этих форм положительно определенная).

Введя обозначение $\Omega_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma} = \Omega_\alpha{}^\gamma$, мы можем представить эти инварианты в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}
\Omega_1 &= \Omega_\alpha{}^\alpha, \\
\Omega_2 &= \Omega_\alpha{}^\beta\, \Omega_\beta{}^\alpha, \\
\Omega_3 &= \Omega_\alpha{}^\beta\, \Omega_\beta{}^\gamma\, \Omega_\gamma{}^\alpha, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\Omega_n &= \Omega_{\alpha_1}{}^{\alpha_2}\, \Omega_{\alpha_2}{}^{\alpha_3} \ldots \Omega_{\alpha_{n-1}}{}^{\alpha_n}\, \Omega_n{}^{\alpha_1}.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Условившись обозначать $\Omega_{\alpha_1}{}^{\alpha_2}\Omega_{\alpha_2}{}^{\alpha_3} \ldots \Omega_{\alpha_{k-1}}{}^{\alpha_k}$ через $\Omega_{\underbrace{\alpha\ldots\ldots}_{k-2\text{ точек}}}{}^{\ldots\ldots\alpha_k}$, получим для инвариантов $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ следующие выражения:

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_1 = \Omega_{\alpha}^{\ \alpha},\\
&\Omega_2 = \Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\alpha},\\
&\Omega_3 = \Omega_{\alpha\cdot\cdot}^{\ \cdot\cdot\alpha},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&\Omega_n = \Omega_{\underbrace{\alpha\cdots\cdots}_{n-1\ \text{точек}}}^{\ \cdots\cdots\alpha}\ .
\end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Рассмотрим теперь риманово пространство класса I четного числа измерений и построим следующую систему тензоров четвертого ранга *:

$$\left.\begin{aligned}
{}^{(2)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} &= R_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta},\\
{}^{(4)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} &= R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu}\left({}^{(2)}W_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta} - {}^{(2)}T_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta}\right),\\
{}^{(6)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} &= R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu}\left({}^{(4)}W_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta} - {}^{(4)}T_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
{}^{(n)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} &= R_{\alpha\beta}^{\ \ \lambda\mu}\left({}^{(n-2)}W_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta} - {}^{(n-2)}T_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta}\right),
\end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

причем

$${}^{(s)}T_{\lambda\mu}^{\ \ \gamma\delta} = a_s\left({}^{(s)}W_{\lambda}^{\ \gamma}\delta_{\mu}^{\delta} - {}^{(s)}W_{\mu}^{\ \gamma}\delta_{\lambda}^{\delta} + {}^{(s)}W_{\mu}^{\ \delta}\delta_{\lambda}^{\gamma} - {}^{(s)}W_{\lambda}^{\ \delta}\delta_{\mu}^{\gamma}\right) + b_s\,{}^{(s)}W_1\left(\delta_{\lambda}^{\gamma}\delta_{\mu}^{\delta} - \delta_{\lambda}^{\delta}\delta_{\mu}^{\gamma}\right),$$

где

$${}^{(s)}W_{\lambda}^{\ \gamma} = {}^{(s)}W_{\lambda\sigma}^{\ \ \sigma\gamma};\quad {}^{(s)}W_1 = {}^{(s)}W_{\lambda}^{\ \lambda};\quad a_s = -\frac{1}{s-1};\quad b_s = \frac{1}{(s-1)s};$$

$$s = 2, 4, \ldots, n-2.$$

Как видно из равенств (9), ${}^{(2)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$, ${}^{(4)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$, ..., ${}^{(n)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$ являются функциями только от $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $a^{\lambda\mu}$. Получим для них выражения через $\Omega_{\lambda\mu}$ и $a^{\alpha\beta}$.

Для этого введем в рассмотрение n скалярных инвариантов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, связанных с $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ следующими соотношениями

$$\left.\begin{aligned}
&\Omega_1 + p_1 = 0,\\
&\Omega_2 + p_1\Omega_1 + 2p_2 = 0,\\
&\Omega_3 + p_1\Omega_2 + p_2\Omega_1 + 3p_3 = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Omega_n + p_1\Omega_{n-1} + p_2\Omega_{n-2} + \ldots + p_{n-1}\Omega_1 + np_n = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Пользуясь равенствами (5), находим, что

$${}^{(2)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = \Omega_{\alpha}^{\ \gamma}\Omega_{\beta}^{\ \delta} - \Omega_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\beta}^{\ \gamma},$$

$$\begin{aligned}{}^{(4)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = 2\big[&\Omega_{\alpha\cdot\cdot}^{\ \cdot\cdot\gamma}\Omega_{\beta}^{\ \delta} + \Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\gamma}\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\delta} + \Omega_{\alpha}^{\ \gamma}\Omega_{\beta\cdot\cdot}^{\ \cdot\cdot\delta} - \Omega_{\alpha\cdot\cdot}^{\ \cdot\cdot\delta}\Omega_{\beta}^{\ \gamma} - \Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\delta}\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\gamma} - \Omega_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\beta\cdot\cdot}^{\ \cdot\cdot\gamma} +\\
&+ p_1\left(\Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\gamma}\Omega_{\beta}^{\ \delta} + \Omega_{\alpha}^{\ \gamma}\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\delta} - \Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\delta}\Omega_{\beta}^{\ \gamma} - \Omega_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\gamma}\right) + p_2\left(\Omega_{\alpha}^{\ \gamma}\Omega_{\beta}^{\ \delta} - \Omega_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\beta}^{\ \gamma}\right)\big].\end{aligned}$$

* Все значки здесь и в дальнейшем подняты с помощью тензора $a^{\alpha\beta}$.

Предположим, что *

$$
\begin{aligned}
{}^{(s)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = K_s \Big[& \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s-2}\Omega_\beta{}^\delta + \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s-3}\Omega_{\beta\cdot}{}^{\cdot\delta} + \dots + \Omega_\alpha{}^\gamma \underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\delta}}_{s-2} - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-2}\Omega_\beta{}^\gamma - \\
& - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-3}\Omega_{\beta\cdot}{}^{\cdot\gamma} - \dots - \Omega_\alpha{}^\delta \underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\gamma}}_{s-2} + p_1 \Big(\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s-3}\Omega_\beta{}^\delta + \dots + \Omega_\alpha{}^\gamma \underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\delta}}_{s-3} - \\
& - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-3}\Omega_\beta{}^\gamma - \dots - \Omega_\alpha{}^\delta \underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\gamma}}_{s-3}\Big) + \dots + p_{s-2}\left(\Omega_\alpha{}^\gamma\Omega_\beta{}^\delta - \Omega_\alpha{}^\delta\Omega_\beta{}^\gamma\right)\Big].
\end{aligned}
$$

В таком случае, применяя равенства (10), получим

$$
\begin{aligned}
{}^{(s)}W_\alpha{}^\delta = K_s \Big[& (s-1)\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-1} - \Omega_1 \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-2} - \dots - \Omega_{s-1}\Omega_\alpha{}^\delta + \\
& + p_1\Big((s-2)\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-2} - \Omega_1\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-3} - \dots - \Omega_{s-2}\Omega_\alpha{}^\delta\Big) + \dots + p_{s-2}\left(\Omega_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\delta} - \Omega_1\Omega_\alpha{}^\delta\right)\Big] = \\
= K_s(s-1)\Big[& \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-1} + p_1\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-2} + \dots + p_{s-2}\Omega_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\delta} + p_{s-1}\Omega_\alpha{}^\delta\Big].
\end{aligned}
$$

Пользуясь этим равенством, а также равенствами (10), находим, что

$$
{}^{(s)}W_1 = -K_s(s-1)\,sp_s.
$$

Применяя равенства (9) и обозначая $2K_s$ через K_{s+2}, имеем

$$
\begin{aligned}
{}^{(s+2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = K_{s+2}\Big[& \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s}\Omega_\beta{}^\delta + \dots + \Omega_\alpha{}^\gamma\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\delta}}_{s} - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s}\Omega_\beta{}^\gamma - \\
& - \dots - \Omega_\alpha{}^\delta\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\gamma}}_{s} + p_1\Big(\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s-1}\Omega_\beta{}^\delta + \dots + \Omega_\alpha{}^\gamma\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\delta}}_{s-1} - \\
& - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-1}\Omega_\beta{}^\gamma - \dots - \Omega_\alpha{}^\delta\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\gamma}}_{s-1}\Big) + \dots + p_s\left(\Omega_\alpha{}^\gamma\Omega_\beta{}^\delta - \Omega_\alpha{}^\delta\Omega_\beta{}^\gamma\right)\Big].
\end{aligned}
$$

Полагая, что $K_s = 2^{\frac{s}{2}-1}$, приходим к выводу, что некоторая формула, полученная непосредственно для ${}^{(2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ и ${}^{(4)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ и предполагаемая справедливой для ${}^{(s)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$, оказывается верной также для ${}^{(s+2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$; следовательно эта формула справедлива при $s = 2, 4, \dots, n$. Итак,

$$
\begin{aligned}
{}^{(s)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = 2^{\frac{s}{2}-1}\Big[& \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s-2}\Omega_\beta{}^\delta + \dots + \Omega_\alpha{}^\gamma\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\delta}}_{s-2} - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-2}\Omega_\beta{}^\gamma - \\
& - \dots - \Omega_\alpha{}^\delta\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\gamma}}_{s-2} + p_1\Big(\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\gamma}}_{s-3}\Omega_\beta{}^\delta + \dots + \Omega_\alpha{}^\gamma\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\delta}}_{s-3} - \\
& - \underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-3}\Omega_\beta{}^\gamma - \dots - \Omega_\alpha{}^\delta\underbrace{\Omega_{\beta\dots}^{\dots\gamma}}_{s-3}\Big) + \dots + p_{s-2}\left(\Omega_\alpha{}^\gamma\Omega_\beta{}^\delta - \Omega_\alpha{}^\delta\Omega_\beta{}^\gamma\right)\Big], \qquad (11)
\end{aligned}
$$

$$
{}^{(s)}W_\alpha{}^\delta = 2^{\frac{s}{2}-1}(s-1)\Big(\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-1} + p_1\underbrace{\Omega_{\alpha\dots}^{\dots\delta}}_{s-2} + \dots + p_{s-2}\Omega_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\delta} + p_{s-1}\Omega_\alpha{}^\delta\Big) \qquad (12)
$$

* K_s — некоторый численный множитель.

и

$$ {}^{(s)}W_1 = -2^{\frac{s}{2}-1}(s-1)\,sp_s\,. \tag{13}$$

Введем теперь обозначение

$$ {}^{(k)}U_{\alpha}^{\ \delta} = \Omega_{\underbrace{\alpha\cdots\cdots}_{k-1}}^{\ \cdots\cdots\delta} + p_1\Omega_{\underbrace{\alpha\cdots\cdots}_{k-2}}^{\ \cdots\cdots\delta} + \ldots + p_{k-2}\Omega_{\alpha\cdot}^{\ \cdot\delta} + p_{k-1}\Omega_{\alpha}^{\ \delta} \tag{14}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots, n, \quad {}^{(1)}U_{\alpha}^{\ \delta} = \Omega_{\alpha}^{\ \delta}\,.$$

В таком случае равенства (11) и (12) можно переписать в следующем виде:

$$ {}^{(s)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = 2^{\frac{s}{2}-1}\big({}^{(s-1)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\,\Omega_{\beta}^{\ \delta} + {}^{(s-2)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\,\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\delta} + \ldots + {}^{(1)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\,\Omega_{\underbrace{\beta\cdots\cdots}_{s-2}}^{\ \cdots\cdots\delta} -$$

$$ - {}^{(s-1)}U_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\beta}^{\ \gamma} - {}^{(s-2)}U_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\gamma} - \ldots - {}^{(1)}U_{\alpha}^{\ \delta}\Omega_{\underbrace{\beta\cdots\cdots}_{s-2}}^{\ \cdots\cdots\gamma}\big), \tag{15}$$

$$ {}^{(s)}W_{\alpha}^{\ \delta} = 2^{\frac{s}{2}-1}(s-1)\,{}^{(s)}U_{\alpha}^{\ \delta}\,. \tag{16}$$

До сих пор мы предполагали, что s принимает значения $s = 2, 4, 6, \ldots, n$. Рассмотрим теперь n-мерное риманово пространство класса I, считая, что n может быть любым числом, не обязательно четным, и построим систему тензоров ${}^{(s)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta}$ при $s = 2, 3, \ldots, n$, определяя их равенствами (11) (или (15))*. Тогда ${}^{(s)}W_{\alpha}^{\ \delta} = {}^{(s)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \beta\delta}$ будут удовлетворять равенствам (12) (или (16)). Формула (13) для ${}^{(s)}W_1 = {}^{(s)}W_{\alpha}^{\ \alpha}$ также останется в силе.

Ставим себе задачу доказать существование следующего тождества относительно $\Omega_{\alpha\beta}$ и $a^{\lambda\mu}$ для риманова пространства n измерений:

$$ {}^{(n)}W_{\alpha\beta}^{\ \ \gamma\delta} = \frac{{}^{(n)}W_1}{n(1-n)}\left(\delta_{\alpha}^{\gamma}\delta_{\beta}^{\delta} - \delta_{\alpha}^{\delta}\delta_{\beta}^{\gamma}\right). \tag{17}$$

Для доказательства выберем такую систему координат (как известно, это возможно сделать), чтобы в некоторой точке рассматриваемого пространства существовали равенства

$$a^{11} = a^{22} = \ldots = a^{nn} = 1; \quad a^{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta; \quad \Omega_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta.$$

Из равенств (14) и (15) видно, что в выбранной системе координат и в указанной точке сумма

$$ {}^{(n-1)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\,\Omega_{\beta}^{\ \delta} + {}^{(n-2)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\,\Omega_{\beta\cdot}^{\ \cdot\delta} + \ldots + {}^{(1)}U_{\alpha}^{\ \gamma}\,\Omega_{\underbrace{\beta\cdots\cdots}_{n-2}}^{\ \cdots\cdots\delta} \tag{18}$$

не равна нулю лишь тогда, когда $\gamma = \alpha$ и $\delta = \beta$. Сделав предположение о существовании последних равенств, мы получим для суммы (18) следующее выражение **:

$$ {}^{(n-1)}U_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta} + {}^{(n-2)}U_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}^{2} + \ldots + {}^{(1)}U_{\alpha\alpha}\Omega_{\beta\beta}^{n-1}\,.$$

* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ попрежнему определяем с помощью равенств (10).

** В выражениях ${}^{(s)}U_{\alpha\alpha}$, $\Omega_{\beta\beta}$ нет суммирования по индексам α и β.

Легко заметить, что $p_1, p_2, \ldots, p_n$, при сделанных предположениях относительно $\Omega_{\alpha\beta}$ и $a^{\lambda\mu}$, примут следующий вид ([2]):

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= -\sum_{\gamma=1}^{n} \Omega_{\gamma\gamma}, \\ p_2 &= \sum_{\gamma<\delta} \Omega_{\gamma\gamma}\Omega_{\delta\delta}, \\ p_3 &= -\sum_{\gamma<\delta<\varepsilon} \Omega_{\gamma\gamma}\Omega_{\delta\delta}\Omega_{\varepsilon\varepsilon}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_n &= (-1)^n \Omega_{11}\Omega_{22}\ldots\Omega_{nn}. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Вычислим сначала ${}^{(k)}U_{\alpha\alpha}$ $(k=1, 2, \ldots, n-1)$. На основании равенства (14) имеем

$$\begin{aligned} {}^{(k)}U_{\alpha\alpha} &= \Omega_{\alpha\alpha}^{k} + p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1} + p_2\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2} + \ldots + p_{k-1}\Omega_{\alpha\alpha} = \\ &= \Omega_{\alpha\alpha}\left(\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1} + p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2} + p_2\Omega_{\alpha\alpha}^{k-3} + \ldots + p_{k-1}\right). \end{aligned}$$

Замечаем, что

$$\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1} + p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2} = \Omega_{\alpha\alpha}^{k-2}\left(\Omega_{\alpha\alpha} - \sum_{\gamma=1}^{n}\Omega_{\gamma\gamma}\right) = -\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2}\sum_{\gamma\neq\alpha}\Omega_{\gamma\gamma},$$

$$\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1} + p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2} + p_2\Omega_{\alpha\alpha}^{k-3} = -\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2}\sum_{\gamma\neq\alpha}\Omega_{\gamma\gamma} + \Omega_{\alpha\alpha}^{k-3}\sum_{\gamma<\delta}\Omega_{\gamma\gamma}\Omega_{\delta\delta} =$$

$$= \Omega_{\alpha\alpha}^{k-3}\left(-\Omega_{\alpha\alpha}\sum_{\gamma\neq\alpha}\Omega_{\gamma\gamma} + \Omega_{\alpha\alpha}\sum_{\gamma\neq\alpha}\Omega_{\gamma\gamma} + \sum_{\substack{\gamma<\delta \\ \gamma\neq\alpha;\ \delta\neq\alpha}}\Omega_{\gamma\gamma}\Omega_{\delta\delta}\right) = \Omega_{\alpha\alpha}^{k-3}\sum_{\substack{\gamma<\delta \\ \gamma\neq\alpha;\ \delta\neq\alpha}}\Omega_{\gamma\gamma}\Omega_{\delta\delta}.$$

Предполагаем, что

$$\begin{gathered} \Omega_{\alpha\alpha}^{k-1} + p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2} + \ldots + p_m\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1-m} = \\ = (-1)^m\,\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1-m}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_m \\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_m\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_m\gamma_m} \\ m < k-1. \end{gathered} \tag{*}$$

В таком случае

$$\begin{aligned} &\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1} + p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2} + \ldots + p_m\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1-m} + p_{m+1}\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2-m} = \\ &= (-1)^{m+1}\,\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2-m}\Bigg(-\Omega_{\alpha\alpha}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_m \\ \gamma_1\neq\alpha;\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_m\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_m\gamma_m} + \\ &\qquad + \sum_{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{m+1}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_{m+1}\gamma_{m+1}}\Bigg) = \\ &= (-1)^{m+1}\,\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2-m}\Bigg(-\Omega_{\alpha\alpha}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_m \\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_m\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_m\gamma_m} + \end{aligned}$$

$$+\Omega_{\alpha\alpha}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_m\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_m\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_m\gamma_m}+\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots\gamma_{m+1}\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_{m+1}\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ldots\Omega_{\gamma_{m+1}\gamma_{m+1}}\Big)=$$

$$=(-1)^{m+1}\,\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2-m}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{m+1}\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots\ \gamma_{m+1}\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ \ldots\ \Omega_{\gamma_{m+1}\gamma_{m+1}}.$$

Отсюда следует, что равенство (*) справедливо при любом $m \leqslant k-1$ и, в частности,

$$\Omega_{\alpha\alpha}^{k-1}+p_1\Omega_{\alpha\alpha}^{k-2}+\ \ldots\ +p_{k-1}=p'_{k-1},$$

где через p'_{k-1} обозначаем

$$(-1)^{k-1}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{k-1}\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_{k-1}\neq\alpha}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\,\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ \ldots\ \Omega_{\gamma_{k-1}\gamma_{k-1}}.$$

Получаем для ${}^{(k)}U_{\alpha\alpha}$ выражение

$${}^{(k)}U_{\alpha\alpha}=\Omega_{\alpha\alpha}\,p'_{k-1}.$$

Сумму (18) можно записать в виде

$$\Omega_{\alpha\alpha}\,\Omega_{\beta\beta}(\Omega_{\beta\beta}^{n-2}+p'_1\Omega_{\beta\beta}^{n-3}+\ \ldots\ +p'_{n-2}).$$

Но рассуждая так же, как и при выводе равенства (*), заключаем, что *

$$\Omega_{\beta\beta}^{n-2}+p'_1\Omega_{\beta\beta}^{n-3}+\ \ldots\ +p'_{n-2}=(-1)^{n-2}\sum_{\substack{\gamma_1<\gamma_2<\ldots<\gamma_{n-2}\\ \gamma_1\neq\alpha,\ \gamma_2\neq\alpha,\ \ldots,\ \gamma_{n-2}\neq\alpha\\ \gamma_1\neq\beta,\ \gamma_2\neq\beta,\ \ldots,\ \gamma_{n-2}\neq\beta}}\Omega_{\gamma_1\gamma_1}\,\Omega_{\gamma_2\gamma_2}\ \ldots\ \Omega_{\gamma_{n-2}\gamma_{n-2}}$$

Следовательно

$${}^{(n-1)}U_{\alpha\alpha}\,\Omega_{\beta\beta}+{}^{(n-2)}U_{\alpha\alpha}\,\Omega_{\beta\beta}^2+\ \ldots\ +{}^{(1)}U_{\alpha\alpha}\,\Omega_{\beta\beta}^{n-1}=(-1)^n\Omega_{11}\Omega_{22}\ \ldots\ \Omega_{nn}=p_n.$$

Из полученных соотношений можно заключить, что в любой точке и в любой системе координат справедливо равенство

$${}^{(n-1)}U_\alpha{}^{[\gamma}\Omega_\beta{}^{\delta]}+{}^{(n-2)}U_\alpha{}^{[\gamma}\Omega_{\beta\cdot}{}^{\cdot\delta]}+\ \ldots\ +{}^{(1)}U_\alpha{}^{[\gamma}\underbrace{\Omega_{\beta\cdots\cdots}{}^{\cdots\cdots\delta]}}_{n-2}=p_n\,\delta_\alpha^{[\gamma}\delta_\beta^{\delta]}.$$

Таким образом ${}^{(n)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$, на основании равенства (15), представляется следующей формулой:

$${}^{(n)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=2^{\frac{n}{2}-1}p_n\,(\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta-\delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma).$$

Но ${}^{(n)}W_1=2^{\frac{n}{2}-1}n\,(1-n)\,p_n$. Следовательно

$${}^{(n)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=\frac{{}^{(n)}W_1}{n\,(1-n)}\,(\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta-\delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma),$$

что и требовалось доказать.

---

* Считаем, что $\alpha\neq\beta$. При $\alpha=\beta$, как видно из равенств (11), ${}^{(s)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ обращается в нуль.

Путем свертывания ${}^{(n)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ имеем

$$ {}^{(n)}W_{\alpha}{}^{\delta} = \frac{{}^{(n)}W_1}{n}\,\delta_{\alpha}^{\delta}. \tag{20} $$

Заметим, что последний результат можно было бы получить и непосредственно, не пользуясь частной системой координат, а доказав предварительно равенство

$$ {}^{(n)}W_{\alpha}{}^{\gamma}\,{}^{(n)}W_{\gamma}{}^{\alpha} = \frac{1}{n}\,{}^{(n)}W_1^2 \ (^5). $$

Равенства (17) и (20) представляют собой тождества относительно $\Omega_{\alpha\beta}$ и $a^{\lambda\mu}$. Мы предполагали вначале, что $a^{\lambda\mu}$ — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы, но так как обе части равенств (17) и (20) являются целыми рациональными функциями от $a^{\lambda\mu}$, мы можем это ограничение снять и считать $a^{\lambda\mu}$ произвольным контравариантным симметричным тензором 2-го ранга.

Рассмотрим теперь пространство четного числа измерений. В этом случае ${}^{(n)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ удовлетворяют равенствам (9) и являются функциями только от $R_{\lambda\mu\nu\sigma}$ и $a^{\alpha\beta}$. Следовательно, равенства (17) представляют собой необходимые условия для того, чтобы риманово пространство четного числа измерений имело класс 1, имеющие вид уравнений в тензорной форме, связывающих составляющие тензора кривизны и произвольного контравариантного симметричного тензора 2-го ранга и степени $\frac{n}{2}$ относительно составляющих тензора кривизны.

Поставим теперь задачу получить необходимые условия для того чтобы n-мерное риманово пространство имело класс I в том случае, когда n нечетное число. Для решения этой задачи обратимся к равенствам (14).

Замечаем, что

$$ {}^{(k+1)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = \Omega_{\underbrace{\alpha\cdots\cdots}_{k}}{}^{\gamma} + p_1\Omega_{\underbrace{\alpha\cdots\cdots}_{k-1}}{}^{\gamma} + \ \ldots\ + p_{k-1}\Omega_{\alpha\cdot}{}^{\gamma} + p_k\Omega_{\alpha}{}^{\gamma} = $$
$$ = \Omega_{\alpha}{}^{\lambda}\,(\Omega_{\underbrace{\lambda\cdots\cdots}_{k-1}}{}^{\gamma} + p_1\Omega_{\underbrace{\lambda\cdots\cdots}_{k-2}}{}^{\gamma} + \ \ldots\ + p_{k-1}\Omega_{\lambda}{}^{\gamma} + p_k\delta_{\lambda}^{\gamma}) = \Omega_{\alpha}{}^{\lambda}\,({}^{(k)}U_{\lambda}{}^{\gamma} + p_k\delta_{\lambda}^{\gamma}). $$

На основании равенств (10) можем заключить, что

$$ p_k = -\frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_{\lambda}{}^{\lambda} = -\frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1. $$

Отсюда вытекает, что

$$ {}^{(k+1)}U_{\alpha}{}^{\gamma} = \Omega_{\alpha}{}^{\lambda}\left({}^{(k)}U_{\lambda}{}^{\gamma} - \frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1\delta_{\lambda}^{\gamma}\right). $$

Следовательно

$$ {}^{(k+1)}U_{\beta}{}^{\delta} = \Omega_{\beta}{}^{\mu}\left({}^{(k)}U_{\mu}{}^{\delta} - \frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1\delta_{\mu}^{\delta}\right), $$
$$ {}^{(k+1)}U_{\alpha}{}^{\gamma}\,{}^{(k+1)}U_{\beta}{}^{\delta} - {}^{(k+1)}U_{\beta}{}^{\gamma}\,{}^{(k+1)}U_{\alpha}{}^{\delta} $$

$$=(\Omega_\alpha{}^\lambda\,\Omega_\beta{}^\mu-\Omega_\beta{}^\lambda\,\Omega_\alpha{}^\mu)\left({}^{(k)}U_\lambda{}^\gamma-\frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1\delta_\lambda^\gamma\right)\left({}^{(k)}U_\mu{}^\delta-\frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1\delta_\mu^\delta\right)=$$
$$=R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left({}^{(k)}U_\lambda{}^\gamma-\frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1\delta_\lambda^\gamma\right)\left({}^{(k)}U_\mu{}^\delta-\frac{1}{k}\,{}^{(k)}U_1\delta_\mu^\delta\right).$$

Умножая обе части равенства на $2^{k-1}\cdot k^2$ и применяя равенства (16), имеем

$$^{(k+1)}W_\alpha{}^\gamma\,{}^{(k+1)}W_\beta{}^\delta-{}^{(k+1)}W_\beta{}^\gamma\,{}^{(k+1)}W_\alpha{}^\delta=$$
$$=\frac{2k^2}{(k-1)^2}\,R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left({}^{(k)}W_\lambda{}^\gamma-\frac{1}{k}\,{}^{(k)}W_1\delta_\lambda^\gamma\right)\left({}^{(k)}W_\mu{}^\delta-\frac{1}{k}\,{}^{(k)}W_1\delta_\mu^\delta\right) \qquad (21)$$
$$k=2,\ \ldots,\ n-1.$$

Из этой формулы мы заключаем, что тензор 4-го ранга

$$^{(s)}\overline{W}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}={}^{(s)}W_\alpha{}^\gamma\,{}^{(s)}W_\beta{}^\delta-{}^{(s)}W_\beta{}^\gamma\,{}^{(s)}W_\alpha{}^\delta,$$

при $s=2,\ 3,\ \ldots,\ n$, выражается только через составляющие тензора кривизны и тензора $a^{\lambda\mu}$. Действительно, при четном s это следует из равенств (9); при нечетном же s этот результат является следствием того обстоятельства, что $^{(s)}\overline{W}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$ выражается через $R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}$ и $^{(s-1)}W_\nu{}^\sigma$ [см. равенства (21)].

Рассмотрим теперь тензор $^{(n)}\overline{W}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}$. Исходя из равенства, определяющего этот тензор, и применяя формулы (20), получаем

$$^{(n)}\overline{W}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=\frac{^{(n)}W_1^2}{n^2}\,(\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta-\delta_\beta^\gamma\delta_\alpha^\delta). \qquad (22)$$

Обозначив $^{(n)}\overline{W}_{\alpha\beta}{}^{\beta\alpha}$ через $^{(n)}\overline{W}_1$, придем к равенству

$$^{(n)}\overline{W}_1=\frac{^{(n)}W_1^2}{n}\,(1-n). \qquad (23)$$

Таким образом равенства (22) примут вид

$$^{(n)}\overline{W}_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=\frac{^{(n)}\overline{W}_1}{n\,(1-n)}\,(\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta-\delta_\beta^\gamma\delta_\alpha^\delta). \qquad (24)$$

Равенства (24) являются необходимыми условиями для того, чтобы риманово пространство n измерений имело класс I. Они представляют уравнения в тензорной форме, связывающие составляющие тензора кривизны и произвольного контравариантного симметричного тензора 2-го ранга и имеющие степень n относительно составляющих тензора кривизны. Мы будем пользоваться этими условиями лишь в случае нечетного n; для пространства четного числа измерений мы имеем более сильные необходимые условия в виде равенств (17).

Заметим, что для трехмерного риманова пространства равенства (24) удовлетворяются тождественно.

Для доказательства этого утверждения нужно лишь воспользоваться следующим равенством, справедливым для любого трехмерного риманова пространства ([3]):

$$R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}=-(R_\alpha{}^\gamma\delta_\beta^\delta-R_\alpha{}^\delta\delta_\beta^\gamma+R_\beta{}^\delta\delta_\alpha^\gamma-R_\beta{}^\gamma\delta_\alpha^\delta)+\frac{R_1}{2}\,(\delta_\alpha^\gamma\delta_\beta^\delta-\delta_\alpha^\delta\delta_\beta^\gamma), \qquad (25)$$

где $R_\alpha{}^\gamma=R_{\alpha\lambda}{}^{\lambda\gamma}$; $R_1=R_\alpha{}^\alpha$.

Предположим теперь, что $a^{\alpha\beta}=g^{\alpha\beta}$. В таком случае, $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n$ и следовательно $p_1, p_2, \ldots, p_n$ будут совместными скалярными инвариантами первой и второй фундаментальных квадратичных форм. Из равенств (13) следует, что, при четном s, p_s являются целыми рациональными инвариантами риманова пространства, т. е. совместными инвариантами $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\nu\sigma}$

$$p_s = \frac{-{}^{(s)}W_1}{2^{\frac{s}{2}-1}s(s-1)}. \tag{26}$$

Для n-мерного риманова пространства можно выразить p_n через $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ и $g^{\nu\sigma}$. При n четном мы получаем результат из равенства (26), положив $s=n$:

$$p_n = \frac{-{}^{(n)}W_1}{2^{\frac{n}{2}-1}n(n-1)}. \tag{27}$$

При нечетном n, пользуясь равенствами (3) и (23), получаем следующую формулу для p_n^2:

$$p_n^2 = \frac{{}^{(n)}\overline{W}_1}{2^{n-2}n(1-n)^3}. \tag{28}$$

Отметим геометрическое значение p_n для пространства n измерений. Прежде всего легко доказать, что

$$p_n = (-1)^n |\Omega_\alpha{}^\beta|. \tag{29}$$

Для этого нужно лишь применить частную систему координат (см. стр. 185).

Рассмотрим теперь два n-мерных параллелепипеда, построенных на n векторах $\xi^i_{,\alpha}$ $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$ и на n векторах $y^i_{,\alpha}$ $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$. Обозначим их объемы соответственно через V_1 и V. Очевидно *,

$$V^2 = |y^i_{,\alpha}y^i_{,\beta}| = |g_{\alpha\beta}|, \qquad V_1^2 = |\xi^i_{,\alpha}\xi^i_{,\beta}|. \quad \text{Но} \quad \xi^i_{,\alpha} = -\Omega_\alpha{}^\gamma y^i_{,\gamma}.$$

[Вектор $\xi^i_{,\alpha}$, как вектор, ортогональный к единичному вектору ξ^i, лежит в касательном пространстве, образованном n векторами $y^i_{,\alpha}$ $(\alpha=1, 2, \ldots, n)$]. Следовательно

$$|\xi^i_{,\alpha}\xi^i_{,\beta}| = (-1)^n |\Omega_\alpha{}^\gamma y^i_{,\gamma}\xi^i_{,\beta}| = |\Omega_\alpha{}^\gamma||\Omega_{\gamma\beta}| = |\Omega^2_{\alpha\beta}||g^{\lambda\mu}|.$$

Деля V_1^2 на V^2, получаем

$$\frac{V_1^2}{V^2} = |\Omega_\alpha{}^\beta|^2. \tag{30}$$

Отсюда следует, что

$$\sigma_n = \frac{V_1}{V} = \Big||\Omega_\alpha{}^\beta|\Big| = |p_n|. \tag{31}$$

* В выражениях $y^i_{,\alpha}y^i_{,\beta}$, $\xi^i_{,\alpha}\xi^i_{,\beta}$, $\xi^i_{,\alpha}y^i_{,\beta}$ подразумевается суммирование по i от 1 до $n+1$.

Заметим, что отношение $\frac{V_1}{V}$ является обобщением гауссовой кривизны поверхности в данной точке. Нами получено для этого отношения объемов выражение через составляющие тензора кривизны и метрического тензора.

Рассмотрим в качестве примера трехмерное риманово пространство класса I. Поставим задачу найти для такого пространства формулу для σ_3. Так как

$$^{(2)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}, \quad \text{то} \quad ^{(2)}W_{\alpha}{}^{\delta} = R_{\alpha}{}^{\delta} \quad \text{и} \quad ^{(2)}W_1 = R_1 \quad (R_{\alpha}{}^{\delta} \text{ — тензор Риччи}).$$

Пользуясь равенством (21), получаем

$$^{(3)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = 8R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left(R_{\lambda}{}^{\gamma} - \frac{R_1}{2}\delta_{\lambda}^{\gamma}\right)\left(R_{\mu}{}^{\delta} - \frac{R_1}{2}\delta_{\mu}^{\delta}\right).$$

Следовательно [применяем равенства (28) и (31)]

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{6} R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left(R_{\lambda}{}^{\alpha} - \frac{R_1}{2}\delta_{\lambda}^{\alpha}\right)\left(R_{\mu}{}^{\beta} - \frac{R_1}{2}\delta_{\mu}^{\beta}\right). \tag{32}$$

Для σ_3^2 можно получить еще другие выражения, пользуясь равенствами (25). Так, например *,

$$\sigma_3^2 = \frac{1}{3} R_3' - \frac{1}{4} R_1 R_2 + \frac{1}{24} R_1^3 = \left| R_{\alpha}{}^{\beta} - \frac{R_1}{2}\delta_{\alpha}^{\beta} \right|. \tag{33}$$

Обратимся теперь к четырехмерному риманову пространству класса I. Применяя равенства (9), получаем

$$^{(4)}W_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} = R_{\alpha\beta}{}^{\lambda\mu}\left[R_{\lambda\mu}{}^{\gamma\delta} + R_{\lambda}{}^{\gamma}\delta_{\mu}^{\delta} - R_{\mu}{}^{\gamma}\delta_{\lambda}^{\delta} + R_{\mu}{}^{\delta}\delta_{\lambda}^{\gamma} - R_{\lambda}{}^{\delta}\delta_{\mu}^{\gamma} - \frac{R_1}{2}(\delta_{\lambda}^{\gamma}\delta_{\mu}^{\delta} - \delta_{\mu}^{\gamma}\delta_{\lambda}^{\delta})\right].$$

Следовательно $^{(4)}W_1 = -(Q_2 - 4R_2 + R_1^2)$, где $Q_2 = R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}R_{\gamma\delta}{}^{\alpha\beta}$.

Имеем следующую формулу для σ_4 на основании равенств (27) и (31):

$$\sigma_4 = \frac{1}{24}|Q_2 - 4R_2 + R_1^2|. \tag{34}$$

Заметим, что для пространства постоянной кривизны K

$$\sigma_n^2 = K^n.$$

Ленинградский индустриальный институт.

Поступило 26. X. 1939.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Weise K. H., Beitrage zum Klassenproblem der quadratischen Differentialformen, Mathem. Ann., B. 110, H. 4 (1935), 522—570.

[2] Thomas T. Y., Riemann spaces of class one and their characterisation, Acta Mathem., 67, 3—4 (1936), 169—211.

[3] Eisenhart L. P., Riemannian Geometry, Princeton, 1926 (Ch. IV).

[4] Граве Д. А., Элементы высшей алгебры, 1914 (гл. IX, Симметрич. функции).

[5] Розенсон Н. А., Некоторые неравенства из теории квадратичных форм, Труды Ленингр. индустр. ин-та, № 4, 1937.

---

* $R_2 = R_{\alpha\cdot}^{\cdot\alpha}$; $R_3 = R_{\alpha\cdot\cdot}^{\cdot\cdot\alpha}$.

N. ROSENSON. SUR LES ESPACES RIEMANNIENS DE CLASSE I

RÉSUMÉ

On trouve les conditions nécessaires pour qu'un espace riemannien à n dimensions soit de classe I. Ces conditions ont la forme d'un système d'équations tensorielles, contenant les composantes du tenseur de Riemann et d'un tenseur arbitraire contrevariant symétrique du second ordre de degré $\frac{n}{2}$ par rapport à $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ pour n pair et de degré n pour n impair.

On exprime quelques invariants simultanés des deux formes fondamentales quadratiques d'un espace de Riemann à n dimensions de classe I, par les composantes du tenseur de Riemann et du tenseur métrique. A l'un de ces invariants on donne une interprétation géométrique en généralisant la notion de courbure gaussienne de surface au cas d'un espace riemannien à n dimensions et de classe I.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 193–214 Série mathématique

К. К. МАРДЖАНИШВИЛИ

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ АДДИТИВНОЙ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

Автор проводит исследование вопроса об одновременном представлении нескольких чисел суммами степеней простых чисел.

§ 1. Пусть n — заданное натуральное число, $0 < N_1 < \ldots < N_n$ — целые. В настоящей работе рассматривается вопрос о представлении системы $(N_1, \ldots, N_n)$ в форме

$$N_k = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

где $p_1, \ldots, p_s$ — простые. Следует отметить, что вопрос о представимости системы $(N_1, \ldots, N_n)$ в виде

$$N_k = \sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при целых неотрицательных x_ν был мною рассмотрен в работе «Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых, ..., n-ых степеней» (1).

§ 2. Обозначим через $I(N_1, \ldots, N_n;\ s)$ число упорядоченных систем $(p_1, \ldots, p_s)$ простых чисел, удовлетворяющих системе (1). Положим, далее, при взаимно простых a_k и q_k

$$D(a_1, q_1; \ldots; a_n, q_n) = \frac{1}{\varphi(q_1 \cdots q_n)} \sum_r{}' \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r\right)\right), \tag{2}$$

где сумма распространена на значения r, пробегающие приведенную систему вычетов по модулю $q_1 \ldots q_n$;

$$A(q_1, \ldots, q_n; s; N_1, \ldots, N_n) = \\ = \sum_{a_1, \ldots, a_n}{}' D^s \exp\left(-2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} N_1\right)\right), \tag{3}$$

где $a_1, \ldots, a_n$ пробегают приведенные системы вычетов соответственно по модулям $q_1, \ldots, q_n$;

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1, \ldots, q_n = 1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n; s; N_1, \ldots, N_n). \tag{4}$$

Условимся, наконец, говорить, что система положительных чисел $h_1, \ldots, h_n$ обладает по отношению к натуральному s свойством (a), если существует такое $\varepsilon > 0$, что при

$$h_k - \varepsilon \leqslant h'_k \leqslant h_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

разрешима в положительных ξ_ν система

$$\xi_1^k + \ldots + \xi_s^k = h'_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{6}$$

ТЕОРЕМА I. *Пусть $N_1, \ldots, N_n$ — целые положительные числа, s — целое, удовлетворяющее условию*

$$s \geqslant 5n(n+1)(n+2)\lg n, \tag{7}$$

$$N_k = h_k N_n^{\frac{k}{n}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{8}$$

причем числа $h_1, h_2, \ldots, h_n = 1$ обладают по отношению к s свойством (a); тогда

$$I(N_1, \ldots, N_n; s) = B(h_1, \ldots, h_{n-1}; s) N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} (\lg N_n)^{-s} \mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n; s) + \\ + O(N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} (\lg N_n)^{-s-\omega}), \tag{9}$$

где ω — какая-либо положительная постоянная и

$$0 < C_1(n, s) \leqslant B(h_1, \ldots, h_{n-1}; s) \leqslant C_2(n, s). \tag{10}$$

§ 3. Пусть p — простое и $n_1(p) = 1$, $n_2(p), \ldots, n_n(p)$ — первые n из чисел натурального ряда, взаимно-простых с p. Обозначим через $\theta(p)$ то целое, которое определяется условием *

$$p^\theta \,\|\, \begin{vmatrix} n_n^{n-1}(p), \ldots, n_1^{n-1}(p) \\ \cdots\cdots\cdots \\ n_n^0(p), \ldots, n_1^0(p) \end{vmatrix}, \tag{11}$$

через $\pi_1 = 2$, $\pi_2 = 3, \ldots, \pi_m$ обозначим первые m членов последовательности простых чисел, причем под π_m будем понимать наибольшее простое, не превосходящее n.

ТЕОРЕМА II. *Если целые $M_1, \ldots, M_n$ удовлетворяют системе mn сравнений*

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} M_n, n_{n-1}^{n-1}(\pi_i), \ldots, n_1^{n-1}(\pi_i) \\ \cdots\cdots\cdots \\ M_1, n_{n-1}^0(\pi_i), \ldots, n_1^0(\pi_i) \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}}, \ldots \\ \ldots, &\begin{vmatrix} n_n^{n-1}(\pi_i), n_{n-1}^{n-1}(\pi_i), \ldots, M_n \\ \cdots\cdots\cdots \\ n_n^0(\pi_i), n_{n-1}^0(\pi_i), \ldots, M_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \right\} \tag{12}$$

то можно найти такое $s_0 = s_0(M_1, \ldots, M_n)$, что

$$s_0 \leqslant \beta_0(n), \tag{13}$$

где $\beta_0(n)$ зависит только от n, и что

$$\mathfrak{S}(M_1, \ldots, M_n; s_0) \geqslant C_0(n) > 0. \tag{14}$$

§ 4. Если p — простое, большее чем n, то

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} p^n, n_{n-1}^{n-1}(\pi_i), \ldots, n_1^{n-1}(\pi_i) \\ \cdots\cdots\cdots \\ p, n_{n-1}^0(\pi_i), \ldots, n_1^0(\pi_i) \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}}, \ldots \\ \ldots, &\begin{vmatrix} n_n^{n-1}(\pi_i), n_{n-1}^{n-1}(\pi_i), \ldots, p^n \\ \cdots\cdots\cdots \\ n_n^0(\pi_i), n_{n-1}^0(\pi_i), \ldots, p \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}} \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \right\} \tag{15}$$

* $p^\theta \,\|\, a$ означает, что $p^\theta \mid a$, $p^{\theta+1} \nmid a$.

где попрежнему π_m — наибольшее простое, не превосходящее n; поэтому необходимым условием представимости системы $(N_1, \ldots, N_n)$ в форме (1) является разрешимость системы сравнений

$$\left.\begin{array}{l} \left|\begin{array}{l} N_n - z_1\cdot 2^n - \ldots - z_m \pi_m^n,\ n_{n-1}^{n-1}(\pi_i), \ldots, n_1^{n-1}(\pi_i) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ N_1 - z_1\cdot 2 - \ldots - z_m \pi_m,\ n_{n-1}^0(\pi_i), \ldots, n_1^0(\pi_i) \end{array}\right| \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}}, \\ \cdot \\ \left|\begin{array}{l} n_n^{n-1}(\pi_i), n_{n-1}^{n-1}(\pi_i), \ldots, N_n - z_1\cdot 2^n - \ldots - z_m\cdot \pi_m^n \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n_n^0(\pi_i),\ \ n_{n-1}^0(\pi_i), \ldots, N_1 - z_1\cdot 2 - \ldots - z_m\cdot\pi_m \end{array}\right| \equiv 0 \pmod{\pi_i^{\theta(\pi_i)}} \end{array}\right\} \qquad (16)$$

при $i = 1, 2, \ldots, m$ в целых неотрицательных $z_1, \ldots, z_m$, удовлетворяющих условию

$$z_1\cdot 2^k + z_2\cdot 3^k + \ldots + z_m \pi_m^k \leqslant N_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \qquad (17)$$

§ 5. Введем обозначение

$$K(n) = \prod_{i=1}^{m} \pi_i^{\theta(\pi_i)}. \qquad (18)$$

ТЕОРЕМА III. *Система целых положительных чисел* $(N_1, \ldots, N_n)$ *может быть представлена в форме*

$$N_k = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

при p_ν *простых и некотором* s, *зависящем от распределения чисел* $N_1, \ldots, N_n$ *по модулю* $K(n)$ *и удовлетворяющем неравенству* $s < \beta(n)$, *если разрешима в целых положительных* $z_1, \ldots, z_n$, *удовлетворяющих* (17), *система* (16), *причем*

$$N_1 > C_3(n) \qquad (19)$$

и числа $h_1, h_2, \ldots, h_n = 1$, *определяемые равенствами* (8)

$$N_k = h_k N_n^{\frac{k}{n}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

обладают свойством (а).

§ 6. Приступая к доказательству теоремы I, положим

$$N_k = h_k P^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (20)$$

и рассмотрим целые $M_1, \ldots, M_n$, удовлетворяющие условиям

$$0 < M_k \leqslant N_k. \qquad (21)$$

Тогда

$$I(M_1, \ldots, M_n; s) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{p_1, \ldots, p_s \leqslant P} \exp\left(2\pi i \alpha_n \left(\sum_{\nu=1}^{s} p_\nu^n - M_n\right) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + 2\pi i \alpha_1 \left(\sum_{\nu=1}^{s} p_\nu - M_1\right)\right) d\alpha_n \ldots d\alpha_1, \qquad (22)$$

где суммирование распространено на значения $p_1, \ldots, p_s$, пробегающих независимо друг от друга простые числа $\leqslant P$. Полагая

$$T = \sum_{p \leqslant P} \exp\left(2\pi i (\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p)\right), \qquad (23)$$

найдем, что

$$I(M_1, \ldots, M_n; s) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 T^s \exp\left(-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M_k\right) d\alpha_n \ldots d\alpha_1. \qquad (24)$$

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_n > \omega > 0; \qquad (25)$$

пусть, далее,

$$\tau_k = P^k (\lg P)^{-\lambda_k}. \qquad (26)$$

Каждое α_k, лежащее между 0 и 1 ($k = 1, 2, \ldots, n$), представим в виде

$$\alpha_k = \frac{a_k}{q_k} + z_k, \qquad (27)$$

где

$$(a_k, q_k) = 1, \quad 1 \leqslant q_k \leqslant \tau_k, \quad |z_k| \leqslant \frac{1}{q_k \tau_k}. \qquad (28)$$

В целях выделения главной части $I_0(M_1, \ldots, M_n; s)$ интеграла (24) рассмотрим те $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, у которых отвечающие им q_k таковы, что

$$q_k \leqslant (\lg P)^{\lambda_k}, \qquad (29)$$

и возьмем сумму интегралов от $T^s \exp\left(-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \alpha_k M_k\right) d\alpha_n \ldots d\alpha_1$, по параллелоидам

$$\left|\alpha_k - \frac{a_k}{q_k}\right| \leqslant \frac{1}{\tau_k}. \qquad (30)$$

Возьмем постоянное f, удовлетворяющее неравенству

$$f > 3\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \lambda_1 + \omega, \qquad (31)$$

и преобразуем сумму T, разбивая ее на $\ll (\lg P)^f$ сумм вида

$$T_l = \sum_{L_l < p \leqslant L_{l+1}} \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} + z_n\right) p^n + \ldots + 2\pi i \left(\frac{a_1}{q_1} + z_1\right) p\right),$$

где

$$0 < L_{l+1} - L_l \leqslant P(\lg P)^{-f}.$$

Разобьем, далее, сумму T_l на частичные суммы, полагая

$$T_l = \sum_r T_{lr},$$

где T_{lr} представляет часть суммы T_l, соответствующую простым числам вида

$$p = q_1 \ldots q_n + r; \qquad (32)$$

при этом $(r, q_1 \ldots q_n) = 1$ и $0 < r < q_1 q_2 \ldots q_n$.

Число U простых чисел, принадлежащих прогрессии (32) и удовлетворяющих неравенствам $L_l < p < L_{l+1}$, выражается, как известно [2], формулой

$$U = \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \int_{L_l}^{L_{l+1}} \frac{dx}{\lg x} + O\left(\frac{P(\lg P)^{-f_1}}{\varphi(q_1 \ldots q_n) \lg P}\right) \qquad (33)$$

при любом положительном постоянном f_1; мы возьмем

$$f_1 > f + \omega + 3\sum_{k=1}^{n} \lambda_k. \tag{34}$$

Для рассматриваемых значений p имеем

$$z_k p^k = z_k L_l^k + O(|z_k| P^k (\lg P)^{-f}),$$

следовательно

$$\exp\left(2\pi i\left(\left(\frac{a_n}{q_n} + z_n\right)p^n + \ldots + \left(\frac{a_1}{q_1} + z_1\right)p\right)\right) =$$

$$= \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r + \sum_{k=1}^{n} z_k L_l^k\right)\right) + O((\lg P)^{\lambda_1 - f}),$$

$$T_{lr} = \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r + \sum z_k L_l^k\right)\right)\frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \int_{L_l}^{L_{l+1}} \frac{dx}{\lg x} +$$

$$+ O\left(\frac{P(\lg P)^{-f_1}}{\varphi(q_1 \ldots q_n)\lg P} + \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \int_{L_l}^{L_{l+1}} \frac{dx}{\lg x}(\lg P)^{\lambda_1 - f}\right). \tag{35}$$

Так как при $L_l \leqslant x \leqslant L_{l+1}$ имеем

$$|z_k|(x^k - L_l^k) \ll |z_k| \cdot P^k (\lg P)^{-f},$$

то

$$T_{lr} = \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r\right)\right) \int_{L_l}^{L_{l+1}} \frac{\exp(2\pi i \sum z_k x^k)}{\lg x} dx +$$

$$+ O\left(\frac{P(\lg P)^{-f_1}}{\varphi(q_1 \ldots q_n)\lg P} + \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \int_{L_l}^{L_{l+1}} \frac{dx}{\lg x}(\lg P)^{\lambda_1 - f}\right),$$

и следовательно

$$T = \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \sum_{\substack{r \\ (r, q_1 \ldots q_n) = 1}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r\right)\right) \int_2^P \frac{\exp(2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k x^k)}{\lg x} dx +$$

$$+ O\left(P(\lg P)^{-f_1 + f - 1} + \int_2^P \frac{dx}{\lg x}(\lg P)^{\lambda_1 - f}\right). \tag{36}$$

Введем обозначение

$$\rho = \int_2^P \frac{\exp(2\pi i \sum_{k=1}^{n} z_k x^k)}{\lg x} dx, \tag{37}$$

тогда

$$\rho \ll \frac{P}{\lg P}.$$

Полагая, далее,

$$D = \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \sum_r{}' \exp\left(2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} r^k\right), \tag{38}$$

где r пробегает приведенную систему вычетов по модулю $q_1 \ldots q_n$, получим

$$D \ll 1,$$

$$T = D \cdot \rho + O\left(P(\lg P)^{-f_1+f-1} + P(\lg P)^{-f+\lambda_1-1}\right),$$

и, ввиду (34),

$$T^s = D^s \rho^s + O\left(P^s (\lg P)^{-s-f_1+f} + P^s (\lg P)^{-s-f+\lambda_1}\right). \tag{39}$$

Пусть

$$N_k - N_k P^{-\delta} \leqslant M_k \leqslant N_k, \tag{40}$$

где δ — некоторое постоянное, лежащее между 0 и 1, тогда

$$T^s \exp\left(-2\pi i \sum \alpha_k M_k\right) = \rho^s \exp\left(-2\pi i \sum z_k N_k\right) \times$$
$$\times D^s \exp\left(-2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k} M_k\right) + O\left(P^s (\lg P)^{-s-f_1+f} + P^s (\lg P)^{-s-f+\lambda_1}\right).$$

Считая a_k, q_k постоянными и интегрируя в пределах

$$-\frac{1}{\tau_k} \leqslant z_k \leqslant \frac{1}{\tau_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

а затем суммируя по всем $q_k \leqslant (\lg P)^{\lambda_k}$ и соответствующим им a_k, получим главную (как, при определенных условиях, действительно увидим далее) часть $I_0(M_1, \ldots, M_n; s)$ интеграла (24)

$$I_0(M_1, \ldots, M_n; s) = Q \sum_{a_k,\, q_k} D^s \exp\left(-2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k} M_k\right) +$$
$$+ O\left(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}} \left((\lg P)^{3\Sigma\lambda_k + f - f_1 - s} + (\lg P)^{3\Sigma\lambda_k + \lambda_1 - f - s}\right)\right),$$

где

$$Q = \int_{-\frac{1}{\tau_1}}^{\frac{1}{\tau_1}} \ldots \int_{-\frac{1}{\tau_n}}^{\frac{1}{\tau_n}} \rho^s \exp\left(-2\pi i \sum z_k N_k\right) dz_n \ldots dz_1. \tag{41}$$

Принимая во внимание (3) и неравенства (31) и (34), получим

$$I_0(M_1, \ldots, M_n; s) = Q \sum_{1 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} \ldots \sum_{1 \leqslant q_n \leqslant (\lg P)^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n; M_1, \ldots, M_n; s) +$$
$$+ O\left(P^{s-\frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s-\omega}\right). \tag{42}$$

§ 7. Возьмем теперь некоторое $k \geqslant 1$ и рассмотрим любые $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}$ и те $\alpha_k, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$, у которых отвечающие им $q_{k+1}, \ldots, q_n$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{array}{c} q_n \leqslant (\lg P)^{\lambda_n},\ q_{n-1} \leqslant (\lg P)^{\lambda_{n-1}}, \ldots,\ q_{k+1} \leqslant (\lg P)^{\lambda_{k+1}}, \\ q_k > (\lg P)^{\lambda_k}. \end{array}\right\} \tag{43}$$

Соответствующую часть интеграла от $|T|^s$ обозначим через Y_k. При нечетном s имеем

$$|Y_k| < (\max|T|) \cdot \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{p_1, \ldots, p_{s-1} \leqslant P} \exp\left(2\pi i \alpha_n \left(p_1^n + \ldots + p_{\frac{s-1}{2}}^n - p_{\frac{s+1}{2}}^n - \right.\right.$$
$$\left.\left. - \ldots - p_{s-1}^n\right) + \ldots + 2\pi i \alpha_1 \left(p_1 + \ldots + p_{\frac{s-1}{2}} - p_{\frac{s+1}{2}} - \ldots - p_{s-1}\right)\right) d\alpha_n \ldots d\alpha_1, \tag{44}$$

где $\max |T|$ относится к значениям α, у которых отвечающие им q удовлетворяют условиям (43). Но число решений системы

$$x_1^k + \ldots + x_{\frac{s-1}{2}}^k - x_{\frac{s+1}{2}}^k - \ldots - x_{s-1}^k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{45}$$

в целых положительных числах, не превосходящих P, при

$$s \geqslant 5n(n+1)(n+2)\lg n,$$

будет, как показал И. М. Виноградов [3],

$$\ll P^{s-1-\frac{n(n+1)}{2}};$$

тем более это относится к числу решений системы (45) в простых числах, не превосходящих P. Поэтому

$$|Y_n| \ll (\max|T|) \cdot P^{s-1-\frac{n(n+1)}{2}}. \tag{46}$$

Для оценки $\max|T|$ разобьем T на $\ll (\lg P)^{\gamma_k}$ частных сумм T_l, взяв

$$0 < L_{l+1} - L_l \leqslant P(\lg P)^{-\gamma_k},$$

где γ_k — некоторая постоянная, большая чем λ_{k+1}, и

$$T_l = \sum_{L_l < p \leqslant L_{l+1}} \exp(2\pi i(\alpha_n p^n + \ldots + \alpha_1 p)),$$

и в свою очередь разобьем T_l на частичные суммы, взятые по простым вида

$$p = q_n \cdots q_{k+1} t + r.$$

Этим путем получим

$$|T| < (\lg P)^{\lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1} + \gamma_k} \cdot \max_{(l,r)} \Bigl| \sum_{\substack{L_l < p \leqslant L_{l+1} \\ p = q_n \cdots q_{k+1} t + r}} \exp(2\pi i(\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p)) \Bigr| + \\ + O(P(\lg P)^{\lambda_{k+1} - \gamma_k}). \tag{47}$$

Рассмотрим сперва случай $k > 1$. Нетрудно видеть, что для сумм вида

$$S_r = \sum_{\substack{p \leqslant N \\ p = qt + r}} \exp(2\pi i(\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p)),$$

распространенных на простые числа арифметической прогрессии с каким-либо целым знаменателем q, имеют место те же оценки, что и для сумм

$$S = \sum_{p \leqslant N} \exp(2\pi i(\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p)).$$

Действительно, пусть в зависимости от α_k установлена оценка $S \ll \Delta$, тогда

$$S_r = \frac{1}{q} \sum_{p \leqslant N} \exp(2\pi i(\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p)) \sum_{h=1}^{q} e^{2\pi i \frac{h(p-r)}{q}} =$$

$$= \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{q} \sum_{p \leqslant N} \exp\left(2\pi i\left(\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p + \frac{h}{q} p - \frac{hr}{q}\right)\right) \ll \frac{1}{q} \cdot q \cdot \Delta.$$

Воспользуемся теперь следующей леммой ([4]).

Пусть N — целое > 0; p пробегает последовательность простых чисел;

$$S = \sum_{p \leqslant N} e^{2\pi i m f(p)};$$

k — постоянное целое > 1, $f(p) = \alpha p^k + \ldots + \alpha_k$, $\alpha, \ldots, \alpha_k$ — действительные, $\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q^2}$; $(a, q) = 1$; $0 < q \leqslant N^k$; $|\theta| \leqslant 1$;

$$Q = \min\left(q, \frac{N^k}{q}\right).$$

Тогда можно выбрать положительное σ_k, зависящее лишь от k, так, чтобы

$$|S| \leqslant cNQ^{-\sigma_k},$$

где c — постоянное, если m целое; $0 < m < Q^{2\sigma_k}$.

Согласно этой лемме и предыдущему замечанию

$$\sum_{\substack{L_l < p \leqslant L_{l+1} \\ p = q_n \ldots q_{k+1} t + r}} \exp\left(2\pi i (\alpha_k p^k + \ldots + \alpha_1 p)\right) \ll P (\lg P)^{-\lambda_k \sigma_k}. \tag{48}$$

Взяв

$$\left.\begin{aligned} \gamma_k &\geqslant \lambda_{k+1} + s + \omega, \\ \lambda_k \sigma_k &\geqslant \lambda_n + \ldots + \lambda_{k+1} + \gamma_k + s + \omega, \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

из (46), (47) и (48) получим

$$|Y_k| \ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s-\omega} \quad (k = 2, 3, \ldots, n). \tag{50}$$

В случае четного s ту же оценку (50) найдем, вынося за знак интеграла в (44) $\max |T|^2$.

Теперь предположим, что $k = 1$. Согласно (47) имеем

$$|T| < (\lg P)^{\lambda_n + \ldots + \lambda_2 + \gamma_1} \cdot \max_{(l, r)} \left| \sum_{\substack{L_l < p \leqslant L_{l,1} \\ p = q_n \ldots q_2 t + r}} e^{2\pi i \alpha_1 p} \right| + O\left(P (\lg P)^{\lambda_2 - \gamma_1}\right). \tag{51}$$

Полагая $q = q_n \ldots q_2$, получим

$$\sum_{\substack{p = qt + r \\ L_l < p \leqslant L_{l+1}}} e^{2\pi i \alpha_1 p} = \frac{1}{q} \sum_{h=1}^{q} e^{-2\pi i \frac{hr}{q}} \sum_{L_l < p \leqslant L_{l+1}} e^{2\pi i \left(\alpha_1 + \frac{h}{q}\right) p}. \tag{52}$$

Но

$$\alpha_1 + \frac{h}{q} = \frac{a_1}{q_1} + \frac{h}{q} + z_1 = \frac{a'}{q'} + z_1,$$

где

$$(a', q') = 1; \quad \frac{q_1}{q} \leqslant q' \leqslant q q_1,$$

следовательно

$$q' \leqslant P (\lg P)^{-\lambda_1 + (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} = \tau',$$
$$q' \geqslant (\lg P)^{\lambda_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}.$$

Вместе с тем

$$|z_1| \leqslant \frac{1}{q_1 \tau_1}, \quad |z_1| \leqslant \frac{}{q' \tau_1} \leqslant \frac{(\lg P)^{2(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}}{q' \tau'} = \frac{\Lambda}{q' \tau'}.$$

Таким образом вопрос сводится к оценке суммы

$$\sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i \alpha p}, \tag{53}$$

где

$$\alpha = \frac{a'}{q'} + z_1, \quad (a', q') = 1, \quad (\lg P)^{3h_1} \leqslant q' \leqslant P (\lg P)^{-3h_1} = \tau',$$
$$h_1 = \frac{\lambda_1 - (\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)}{3} > 3, \quad |z_1| \leqslant \frac{\Lambda}{q'\tau'}.$$

Оценивая сумму (53) аналогично тому, как это сделано И. М. Виноградовым в его работе «Some theorems concerning the theory of primes» (5), получим

$$\sum_{p \leqslant P} e^{2\pi i \alpha p} \ll P (\lg P)^{2-h_1} \cdot \Lambda,$$

откуда, ввиду (51) и (52),

$$|T| \ll P (\lg P)^{-\frac{\lambda_1}{3} + 2 + \gamma_1 + \frac{10}{3}(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n)} + P (\lg P)^{\lambda_2 - \gamma_1}.$$

Взяв

$$\left.\begin{aligned} &\gamma_1 > \lambda_2 + s + \omega, \\ &\lambda_1 \geqslant 10(\lambda_2 + \ldots + \lambda_n) + 6 + 3\gamma_1 + 3s + 3\omega, \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

таким образом получим

$$|T| \ll P (\lg P)^{-s-\omega},$$
$$|Y_1| \ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s-\omega}. \tag{55}$$

§ 8. Принимая во внимание соотношения (42), (50) и (55), получим

$$I(M_1, \ldots, M_n; s) = Q \sum_{1 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} \ldots \sum_{1 \leqslant q_n \leqslant (\lg P)^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n) +$$
$$+ O\left(P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s-\omega}\right). \tag{56}$$

Просуммируем теперь (56) по значениям $M_1, \ldots, M_n$, удовлетворяющим неравенствам (40),

$$N_k - N_k P^{-\delta} \leqslant M_k \leqslant N_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

При этом $A(1, \ldots, 1; M_1, \ldots, M_n; s) = 1$ и соответствующая часть суммы будет

$$Q \cdot N_1 \ldots N_n P^{-n\delta} + O\left(|Q| \cdot N_2 \ldots N_n P^{-(n-1)\delta}\right).$$

Суммируя теперь по $q_1 \geqslant 2$ слагаемые с $A(q_1, 1, \ldots, 1; M_1, \ldots, M_n; s)$ при фиксированных $M_1, \ldots, M_n$, получим

$$Q \sum_{2 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} \sum_{\substack{a_1 \\ (a_1, q_1) = 1}} D^s e^{-2\pi i \frac{a_1}{q_1} M_1}.$$

Суммируя сперва по M_1 и далее по $M_2, \ldots, M_n$, получим выражение, модуль которого

$$< |Q| \cdot N_2 N_3 \ldots N_n P^{-(n-1)\delta} \Big| \sum_{2 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} \sum_{\substack{a_1 \\ (a_1, q_1)=1}} D^s \sum_{M_1} e^{-2\pi i \frac{a_1}{q_1} M_1} \Big| \leqslant$$

$$\leqslant |Q| \cdot N_2 N_3 \ldots N_n P^{-(n-1)\delta} \sum_{2 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} \sum_{\substack{a_1 \\ (a_1, q_1)=1}} \Big| \sum_{M_1} e^{-2\pi i \frac{a_1}{q_1} M_1} \Big| \ll$$

$$\ll |Q| \cdot N_2 N_3 \ldots N_n P^{-(n-1)\delta} \sum_{2 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} q_1 \lg q_1 \ll$$

$$\ll |Q| N_2 N_3 \ldots N_n P^{-(n-1)\delta} (\lg P)^{2\lambda_1 + \varepsilon_1}.$$

Оценивая таким же образом сумму членов с $A(q_1, \ldots, q_n; M_1, \ldots, M_n; s)$, у которых $q_{i_1}, \ldots, q_{i_l}$ больше 1, а остальные q равны 1, учитывая остаточный член в (56) и принимая во внимание, что из (41) следует

$$Q \ll P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k - s},$$

найдем

$$\sum_{N_k - N_k P^{-\delta} \leqslant M_k \leqslant N_k} I(M_1, \ldots, M_n; s) = Q N_1 \ldots N_n P^{-n\delta} +$$

$$+ O(P^{s-n\delta} (\lg P)^{-s-\omega}). \qquad (57)$$

С другой стороны, та же сумма дает число V решений в простых числах $(p_1, \ldots, p_s)$ системы

$$N_k - N_k P^{-\delta} \leqslant p_1^k + \ldots + p_s^k \leqslant N_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как

$$N_k = h_k N_n^{\frac{k}{n}}$$

и числа $h_1, \ldots, h_n$ обладают свойством (a) (см. § 2), то

$$P^{s-n\delta} (\lg P)^{-s} \ll V \ll P^{s-n\delta} (\lg P)^{-s}.$$

Из (57) поэтому следует, что

$$P^{s-n\delta} (\lg P)^{-s} \ll Q N_1 N_2 \ldots N_n P^{-n\delta} \ll P^{s-n\delta} (\lg P)^{-s}. \qquad (58)$$

Положим

$$Q = B_1(N_1, \ldots, N_n; s) P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s}; \qquad (59)$$

тогда

$$C'(n, s) \leqslant B_1(N_1, \ldots, N_n; s) \leqslant C''(n, s). \qquad (60)$$

Пользуясь равенством (56) при $s \geqslant 5n(n+1)(n+2) \lg n$, получим

$$I(M_1, \ldots, M_n; s) = B_1(N_1, \ldots, N_n; s) P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s} \times$$

$$\times \sum_{1 \leqslant q_1 \leqslant (\lg P)^{\lambda_1}} \ldots \sum_{1 \leqslant q_n \leqslant (\lg P)^{\lambda_n}} A(q_1, \ldots, q_n; M_1, \ldots, M_n; s) +$$

$$+ O(P^{s - \frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s-\omega}). \qquad (61)$$

§ 9. Установим теперь сходимость ряда (4)

$$\mathfrak{S}(M_1, \ldots, M_n; s) = \sum_{q_1, \ldots, q_n=1} A(q_1, \ldots, q_n; s; M_1, \ldots, M_n)$$

при $s \geqslant 5n(n+1)(n+2)\lg n$. Как показано в § 10, при попарно простых $(q_{11} \ldots q_{n1}), \ldots, (q_{1l} \ldots q_{nl})$ имеем

$$A(q_{11} \ldots q_{1l}; \ldots; q_{n1} \ldots q_{nl}) = A(q_{11}, \ldots, q_{n1}) \ldots A(q_{1l}, \ldots, q_{nl}),$$

следовательно, в частности, при простых $\pi_1, \ldots, \pi_l$

$$A(\pi_1^{l_1} \ldots \pi_l^{m_1}; \ldots; \pi_1^{l_n} \ldots \pi_l^{m_n}) = A(\pi_1^{l_1}, \ldots, \pi_1^{l_n}) \ldots A(\pi_l^{m_1}, \ldots, \pi_l^{m_n}).$$

Убедимся в том, что при простом p

$$A(p^{l_1}, \ldots, p^{l_n}) \ll p^{-(l_1+\ldots+l_n)(1+\eta)},$$

где $\eta > 0$ — постоянная. Рассмотрим для этого сумму

$$H = \sum_{\substack{x=1\\ p \nmid x}}^{p^{l_1+\ldots+l_n}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n x^n}{p^{l_n}} + \ldots + \frac{a_1 x}{p^{l_1}}\right)\right), \text{ где } (a_n \ldots a_1, p) = 1.$$

Представим H в виде

$$H = H_1 - H_2,$$

где H_1 представляет соответствующую полную сумму и

$$H_2 = \sum_{\substack{x=1\\ p \mid x}}^{p^{l_n+\ldots+l_1}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n x^n}{p^{l_n}} + \ldots + \frac{a_1 x}{p^{l_1}}\right)\right).$$

H_1 — сумма типа, рассмотренного Морделлем (Mordell), и для нее существует оценка

$$H_1 \ll p^{(l_1+\ldots+l_n)\left(1-\frac{2,1}{5n(n+1)(n+2)\lg n}\right)}$$

[см. уже цитированную работу И. М. Виноградова ([3])]. Сумму H_2, полагая $x = zp$, представим в виде

$$H_2 = \sum_{z=1}^{p^{l_1+\ldots+l_n-1}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n z^n}{p^{l_n-n}} + \ldots + \frac{a_1 z}{p^{l_1-1}}\right)\right).$$

Предположим сперва, что $l_k \geqslant k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$, тогда

$$H_2 = p^{\frac{n(n+1)}{2}-1} \sum_{z=1}^{p^{l_n+\ldots+l_1-\frac{n(n+1)}{2}}} \exp\left(2\pi i\left(\frac{a_n z^n}{p^{l_n-n}} + \ldots + \frac{a_1 z}{p^{l_1-1}}\right)\right);$$

мы пришли к сумме рассмотренного вида, а потому

$$H_2 \ll p^{l_n+\ldots+l_1-1}\, p^{\left(l_n+\ldots+l_1-\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(-\frac{2,1}{5n(n+1)(n+2)\lg n}\right)},$$

$$H_2 \ll p^{(l_1+\ldots+l_n)\left(1-\frac{2,1}{5n(n+1)(n+2)\lg n}\right)}.$$

Нетрудно видеть, что в случае, когда некоторые $l_i \geqslant i$, последняя оценка остается справедливой, а следовательно и

$$H \ll p^{(l_1+\ldots+l_n)\left(1-\frac{2,1}{5n(n+1)(n+2)\lg n}\right)}. \tag{62}$$

Отсюда вытекает, что, при $s \geqslant 5n(n+1)(n+2)\lg n$, $A(p^{l_1}, \ldots, p^{l_n})$ действительно удовлетворяет соотношению $A(p^{l_1}, \ldots, p^{l_n}) \ll p^{-(l_1+\cdots+l_n)(1+\gamma)}$, что и влечет за собой сходимость ряда $\mathfrak{S}$. При этом из (61) легко получается асимптотическая формула

$$I(N_1, \ldots, N_n; s) = B_2(h_1, \ldots, h_{n-1}; s) P^{s-\frac{n(n+1)}{2}} (\lg P)^{-s} \mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n; s) + \\ + O\left(N_n^{\frac{s}{n}-\frac{n+1}{2}} (\lg N_n)^{-s-\omega}\right), \qquad (63)$$

откуда и вытекает справедливость теоремы I.

§ 10. Перейдем теперь к доказательству теоремы II, относящейся к исследованию $\mathfrak{S}$. Для краткости будем писать

$$A(q_1, \ldots, q_n;\ s;\ N_1, \ldots, N_n) = A(q_1, \ldots, q_n).$$

Покажем сперва, что при попарно простых $(q_{11} \ldots q_{n1}), \ldots, (q_{1l} \ldots q_{nl})$ имеем

$$A(q_{11}, \ldots, q_{n1}) \ldots A(q_{1l}, \ldots, q_{nl}) = A(q_{11} \ldots q_{1l}; \ldots ; q_{n1} \ldots q_{nl}). \qquad (64)$$

Для этого предварительно установим, что при $(q_1 \ldots q_n;\ \bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n) = 1$ имеем

$$D(a_1, q_1; \ldots; a_n, q_n) \cdot D(\bar{a}_1, \bar{q}_1; \ldots; \bar{a}_n, \bar{q}_n) = \\ = D(a_1\bar{q}_1 + \bar{a}_1 q_1, q_1\bar{q}_1; \ldots; a_n\bar{q}_n + \bar{a}_n q_n, q_n\bar{q}_n). \qquad (65)$$

Действительно,

$$D(a_1, q_1; \ldots; a_n, q_n) \cdot D(\bar{a}_1, \bar{q}_1; \ldots; \bar{a}_n, \bar{q}_n) = \\ = \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \sum_{\substack{r \\ (r,\, q_1 \ldots q_n)=1}} \exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k} r^k\right) \times \\ \times \frac{1}{\varphi(\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n)} \sum_{\substack{\bar{r} \\ (\bar{r},\, \bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n)=1}} \exp\left(2\pi i \sum \frac{\bar{a}_k}{\bar{q}_k} \bar{r}^k\right) = \\ = \frac{1}{\varphi(q_1\bar{q}_1 \ldots q_n\bar{q}_n)} \sum_{\substack{r \\ (r,\, q_1 \ldots q_n)=1}} \exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k} (\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n r)^k\right) \times \\ \times \sum_{\substack{\bar{r} \\ (\bar{r},\, \bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n)=1}} \exp\left(2\pi i \sum \frac{\bar{a}_k}{\bar{q}_k} (q_1 \ldots q_n \bar{r})^k\right) = \\ = \frac{1}{\varphi(q_1\bar{q}_1 \ldots q_n\bar{q}_n)} \sum_{\substack{r,\, \bar{r} \\ (\bar{r},\, \bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n)=1 \\ (r,\, q_1 \ldots q_n)=1}} \exp\left(2\pi i \sum \left(\frac{a_k}{q_k} (\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n r + q_1 \ldots q_n \bar{r})^k + \right.\right. \\ \left.\left. + \frac{\bar{a}_k}{\bar{q}_k} (\bar{q}_1 \ldots \bar{q}_n r + q_1 \ldots q_n \bar{r})^k\right)\right) = \\ = \frac{1}{\varphi(q_1\bar{q}_1 \ldots q_n\bar{q}_n)} \sum_{\substack{z \\ (z,\, q_1\bar{q}_1 \ldots q_n\bar{q}_n)=1}} \exp\left(2\pi i \sum \left(\frac{a_k}{q_k} + \frac{\bar{a}_k}{\bar{q}_k}\right) z^k\right) = \\ = D(a_1\bar{q}_1 + \bar{a}_1 q_1, q_1\bar{q}_1; \ldots; a_n\bar{q}_n + \bar{a}_n q_n, q_n\bar{q}_n),$$

что мы и хотели показать.

Рассмотрим, далее, произведение

$$A(q_{11}\ldots q_{n1})\,A(q_{12}\ldots q_{n2})=$$
$$=\sum_{a_{11},\ldots,a_{n1}} D^s(a_{11},q_{11};\ldots;a_{n1},q_{n1})\exp\left(-2\pi i\sum\frac{a_{k1}}{q_{k1}}N_k\right)\times$$
$$\times\sum_{a_{12},\ldots,a_{n2}} D^s(a_{12},q_{12};\ldots;a_{n2},q_{n2})\exp\left(-2\pi i\sum\frac{a_{k2}}{q_{k2}}N_k\right)=$$
$$=\sum_{\substack{a_{11},\ldots,a_{n1}\\ a_{12},\ldots,a_{n2}\\ (a_{ki},q_{ki})=1}} D^s(a_{11}q_{12}+a_{12}q_{11};\,q_{11}q_{12};\ldots;a_{n1}q_{n2}+a_{n2}q_{n1};\,q_{n1}q_{n2})\times$$
$$\times\exp\left(-2\pi i\sum\frac{a_{k1}q_{k2}+a_{k2}q_{k1}}{q_{k1}q_{k2}}N_k\right)=$$
$$=\sum_{\substack{z_1,\ldots,z_n\\ (z_k,\,q_{k1}q_{k2})=1}} D^s(z_1,q_{11}q_{12};\ldots;z_n,q_{n1}q_{n2})\exp\left(-2\pi i\sum_k\frac{z_k}{q_{k1}q_{k2}}N_k\right).$$

Таким образом при $(q_{11}\ldots q_{n1},\,q_{12}\ldots q_{n2})=1$ имеем

$$A(q_{11},\ldots,q_{n1})\,A(q_{12},\ldots,q_{n2})=A(q_{11}q_{12};\ldots;q_{n1}q_{n2});\qquad(66)$$

теперь справедливость формулы (64) очевидна.

§ 11. Покажем, что если $\pi_1,\pi_2,\ldots$ представляют последовательные числа из ряда простых чисел, то

$$\mathfrak{S}=\lim_{l\to\infty}\prod_{k=1}^{l}\sum_{\substack{q_{1k}\mid\pi_k^l\\ \cdots\\ q_{nk}\mid\pi_k^l}} A(q_{1k},\ldots,q_{nk}).\qquad(67)$$

Действительно, из (64) вытекает, что при $(\mu_1,\mu_2)=1$

$$\sum_{\substack{q_{11}\mid\mu_1\\ \cdots\\ q_{n1}\mid\mu_1}} A(q_{11},\ldots,q_{n1})\cdot\sum_{\substack{q_{12}\mid\mu_2\\ \cdots\\ q_{n2}\mid\mu_2}} A(q_{12},\ldots,q_{n2})=\sum_{\substack{q_{i1}\mid\mu_1\\ q_{i2}\mid\mu_2}} A(q_{11}q_{12};\ldots;q_{n1}q_{n2})=$$
$$=\sum_{q_i\mid\mu_1\mu_2} A(q_1,q_2,\ldots,q_n)\qquad(68)$$

и при попарно простых $\mu_1,\ldots,\mu_n$

$$\sum_{q_i\mid\mu_1\ldots\mu_l} A(q_1,\ldots,q_n)=$$
$$\sum_{q_{i1}\mid\mu_1} A(q_{11},\ldots,q_{n1})\cdot\sum_{q_{i2}\mid\mu_2} A(q_{12},\ldots,q_{n2})\ldots\sum_{q_{il}\mid\mu_l} A(q_{1l},\ldots,q_{nl}).\qquad(69)$$

В частности

$$\sum_{\substack{q_1\mid\pi_1^l\ldots\pi_l^l\\ \cdots\\ q_n\mid\pi_1^l\ldots\pi_l^l}} A(q_1,\ldots,q_n)=\prod_{k=1}^{l}\sum_{q_{ik}\mid\pi_k^l} A(q_{1k},\ldots,q_{nk}).\qquad(70)$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1, \ldots, q_n = 1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n) = \lim_{l \to \infty} \sum_{\substack{q_1 \mid \pi_1^l \ldots \pi_l^l \\ \cdots\cdots \\ q_n \mid \pi_1^l \ldots \pi_l^l}} A(q_1, \ldots, q_n), \tag{71}$$

и следовательно ввиду (70) действительно

$$\mathfrak{S} = \lim_{l \to \infty} \prod_{k=1}^{l} \sum_{q_{ik} \mid \pi_k^l} A(q_{1k}, \ldots, q_{nk}).$$

§ 12. Обозначим через $W(p^l, s)$ число решений системы сравнений

$$\left.\begin{aligned} h_1^n + \ldots + h_s^n &\equiv N_n \pmod{p^l}, \\ \cdots\cdots&\cdots\cdots \\ h_1 + \ldots + h_s &\equiv N_1 \pmod{p^l}, \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

удовлетворяющих условиям

$$(h_\nu, p) = 1, \quad 1 \leqslant h_\nu < p^l \quad (p — \text{простое}). \tag{73}$$

Покажем, что

$$\sum_{\substack{q_1 \mid p^l \\ \cdots \\ q_n \mid p^l}} A(q_1, \ldots, q_n) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^s \cdot p^{-l(s-n)} \cdot W(p^l, s). \tag{74}$$

Действительно, согласно (2) и (3),

$$\sum_{\substack{q_1 \mid p^l \\ \cdots \\ q_n \mid p^l}} A(q_1, \ldots, q_n) = 1 + p^{-lns} \sum_{\substack{q_k \mid p^l \\ q_1 \ldots q_n > 1}} \sum_{\substack{a_1, \ldots, a_n \\ (a_k, q_k) = 1}} \left(\frac{q_1 \cdots q_n}{\varphi(q_1 \ldots q_n)}\right)^s \times$$

$$\times \exp\left(-2\pi i \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{q_k} N_k\right) \cdot \left(\sum_{\substack{r=1 \\ (r, p)=1}}^{p^{nl}} \exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k} r^k\right)\right)^s =$$

$$= 1 + p^{-lns}\left(\frac{p}{p-1}\right)^s \times$$

$$\times \sum_{\substack{q_k \mid p^l \\ q_1 \ldots q_n > 1}} \sum_{a_1, \ldots, a_n} \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_s = 1 \\ (h_\nu, p) = 1}}^{p^{nl}} \exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k}(h_1^k + \ldots + h_s^k - N_k)\right) =$$

$$= 1 - p^{-lns}\left(\frac{p}{p-1}\right)^s \varphi^s(p^{nl}) +$$

$$+ \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_s = 1 \\ (h_\nu, p) = 1}}^{p^{nl}} \frac{p^{-(ln-1)s}}{(p-1)^s} \sum_{q_k \mid p^l} \sum_{a_1, \ldots, a_n} \exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k}(h_1^k + \ldots + h_s^k - N_k)\right) =$$

$$= \frac{p^{-(ln-1)s}}{(p-1)^s} \sum_{\substack{h_1, \ldots, h_s = 1 \\ (h_\nu, p) = 1}}^{p^{nl}} \sum_{\substack{q_1 \mid p^l \\ \cdots \\ q_n \mid p^l}} \sum_{a_1, \ldots, a_n} \exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k}(h_1^k + \ldots + h_s^k - N_k)\right);$$

если при этом $h_1, \ldots, h_s$ таковы, что $(h_\nu, p)=1$ и имеет место система (72) то

$$\exp\left(2\pi i \sum \frac{a_k}{q_k}(h_1^k + \ldots + h_s^k - N_k)\right) = 1,$$

и, суммируя по $q_1, a_1; \ldots; q_n, a_n$, получим $\sum\limits_{q_1 | p^l} \varphi(q_1) \ldots \sum\limits_{q_n | p^l} \varphi(q_n) = p^{nl}$ слагаемых, равных единице; если же, например,

$$h_1^b + \ldots + h_s^b \not\equiv N_b \pmod{p^l},$$

то

$$\sum_{q_b | p^l} \sum_{a_b} \exp\left(2\pi i \frac{a_b}{q_b}(h_1^b + \ldots + h_s^b - N_b)\right) = 0.$$

Таким образом

$$\sum_{\substack{q_1 | p^l \\ \cdots \\ q_n | p^l}} A(q_1, \ldots, q_n) = \frac{p^{-(ln-1)s}}{(p-1)^s} \cdot p^{ln} \cdot W(p^l, s) \cdot p^{l(n-1)s},$$

т. е. (74) действительно имеет место.

§ 13. Рассмотрим некоторое простое p и обозначим через $n_1 = 1$, $n_2, \ldots, n_n$ первые n чисел натурального ряда, являющиеся взаимно простыми с p. Через θ обозначим то целое, которое определяется условием

$$p^\theta \,\|\, \begin{vmatrix} n_n^{n-1}, & \ldots, & n_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ n_n^0, & \ldots, & n_1^0 \end{vmatrix}. \tag{75}$$

Далее, при $k = 1, 2, \ldots, n$ определим θ_k из условия

$$p^{\theta_k} \,\|\, k \tag{76}$$

и положим

$$\theta_0 = \max(\theta_1, \ldots, \theta_n). \tag{77}$$

Обозначим через $W_1(p^l, s; M_1, \ldots, M_n)$ число решений системы

$$y_1^k + \ldots + y_s^k \equiv M_k \pmod{p^l} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{78}$$

удовлетворяющих условиям

$$\left.\begin{aligned} &1 \leqslant y_\nu < p^l, && (y_\nu, p) = 1 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ &1 \leqslant y_\mu < p^{l-\theta-\theta_0}, && (y_\mu, p) = 1 \quad (\mu = n+1, \ldots, s) \end{aligned}\right\} \tag{79}$$

и

$$p^\theta \,\|\, \begin{vmatrix} y_n^{n-1}, & \ldots, & y_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ y_n^0, & \ldots, & y_1^0 \end{vmatrix}. \tag{80}$$

Покажем теперь, что *если* $M_1, \ldots, M_n$ *удовлетворяют условиям*

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} M_n, & n_{n-1}^{n-1}, & \ldots, & n_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ M_1, & n_{n-1}^0, & \ldots, & n_1^0 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^\theta}, \ldots \\ \ldots, &\begin{vmatrix} n_n^{n-1}, & n_{n-1}^{n-1}, & \ldots, & M_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n_n^0, & n_{n-1}^0, & \ldots, & M_1 \end{vmatrix} \equiv 0 \pmod{p^\theta}, \end{aligned}\right\} \tag{81}$$

то при некотором $s = s_{p,l}(M_1 \ldots, M_n)$, *удовлетворяющем условию*

$$s_{p,l} \leqslant n \cdot p^l,$$

имеем

$$W_1(p^l;\ s_{p,l};\ M_1, \ldots, M_n) \geqslant 1,$$

если

$$l \geqslant l_0(p) = 2\theta + 2\theta_0 + 1. \qquad (82)$$

Действительно, система сравнений

$$x_1 n_n^k + x_2 n_{n-1}^k + \ldots + x_n n_1^k \equiv M_k \pmod{p^l} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

имеет детерминант, равный

$$n_1 \ldots n_n \begin{vmatrix} n_n^{n-1}, \ldots, n_1^{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ n_n^0\ , \ldots, n_1^0 \end{vmatrix}$$

и поэтому она разрешима. Условия (79) и (80) выполняются, так как можно взять $y_1 = n_n, \ldots, y_n = n_1$. Заметим, что число слагаемых $s_{p,l}$ можно увеличить на кратное p^l (прибавлением слагаемых, равных единице).

Из сказанного легко следует, что, *имея* λ *простых чисел* $\pi_1, \ldots, \pi_\lambda$, *можно найти такое* $s_{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\lambda; l}$, *удовлетворяющее неравенству*

$$s_{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\lambda; l} \leqslant \pi_1^l \pi_2^l \ldots \pi_\lambda^l + (n-1)\pi_\lambda^l, \qquad (83)$$

что

$$W_1(\pi_i^l, s_{\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_\lambda; l}) \geqslant 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda), \qquad (84)$$

если

$$l \geqslant \max l_0(\pi_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \lambda). \qquad (85)$$

§ 14. Покажем далее, что *если выполнено условие* (82) *и* $W_1(p^l, s) \geqslant 1$, *то при любом натуральном* u

$$W_1(p^{l+u}, s) \geqslant p^{(s-n)u}. \qquad (86)$$

Действительно, пусть $(y_1, \ldots, y_s)$ — некоторое решение системы

$$\sum_{\nu=1}^{s} y_\nu^k \equiv M_k \pmod{p^l} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n), \qquad (87)$$

удовлетворяющее условиям (79) и (80). Возьмем произвольные целые $z_{n+1}, \ldots, z_s$, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant z_\mu < p \qquad (\mu = n+1, \ldots, s)$$

и определим $z_1, \ldots, z_n$ так, чтобы при

$$k_0 = kp^{-\theta_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

удовлетворялась система сравнений

$$\sum_{\nu=1}^{s} k_0 y_\nu^{k-1} z_\nu \equiv \frac{M_k - \sum\limits_{\nu=1}^{s} y_\nu^k}{p^{l-\theta_0+\theta_k-\theta}} \equiv M_k \pmod{p^{\theta_0+\theta+1}}. \qquad (88)$$

Детерминант D_0 этой системы выразится так:

$$D_0 = n_0 (n-1)_0 \ldots 1_0 \begin{vmatrix} y_1^{n-1}, \ldots, y_n^{n-1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_1^0\ , \ldots, y_n^0 \end{vmatrix};$$

при этом $p^{\theta} \| D_0$. Нетрудно видеть, что при $(p, t_k)=1$ $(k=1, 2, \ldots, n)$

$$p^{\theta} \mid \begin{vmatrix} t_1^{n-1}, & t_2^{n-1}, & \ldots, & t_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ t_1^0, & t_2^0, & \ldots, & t_n^0 \end{vmatrix},$$

поэтому

$$p^{\theta} \mid \begin{vmatrix} \sum_{\mu=n+1}^{s} n_0 y_\mu^{n-1} z_\mu, & \ldots, & n_0 y_n^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \sum_{\mu=n+1}^{s} 1_0 y_\mu^0 z_\mu, & \ldots, & 1_0 y_n^0 \end{vmatrix}, \ldots, p^{\theta} \mid \begin{vmatrix} n_0 y_1^{n-1}, & \ldots, & \sum_{\mu=n+1}^{s} n_0 y_\mu^{n-1} z_\mu \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1_0 y_1^0, & \ldots, & \sum_{\mu=n+1}^{s} 1_0 y_\mu^0 z_\mu \end{vmatrix}.$$

Так как, с другой стороны, $p^{\theta} \mid \overline{M}_k$, то система (88) разрешима. При определенных таким образом значениях $z_1, \ldots, z_n$ мы будем иметь

$$\sum_{\nu=1}^{s} (y_\nu^k + k y_\nu^{k-1} z_\nu p^{l-\theta_0-\theta}) \equiv M_k \pmod{p^{l+1}} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{89}$$

Возьмем теперь

$$h_\nu = y_\nu + z_\nu p^{l-\theta_0-\theta} \quad (\nu=1, 2, \ldots, s); \tag{90}$$

тогда $(h_\nu, p)=1$ и

$$h_\nu^k \equiv y_\nu^k + k y_\nu^{k-1} z_\nu p^{l-\theta_0-\theta} \pmod{p^{2l-2\theta_0-2\theta}},$$

причем в силу (89)

$$\sum_{\nu=1}^{s} h_\nu^k \equiv N_k \pmod{p^{l+1}} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{91}$$

Так как при этом

$$\begin{vmatrix} h_n^{n-1}, & \ldots, & h_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_n^0, & \ldots, & h_1^0 \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} y_n^{n-1}, & \ldots, & y_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^0, & \ldots, & y_1^0 \end{vmatrix} \pmod{p^{\theta_0+\theta+1}},$$

то ввиду (80)

$$p^{\theta} \| \begin{vmatrix} h_n^{n-1}, & \ldots, & h_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ h_n^0, & \ldots, & h_1^0 \end{vmatrix} \tag{92}$$

Далее, ввиду (79), имеем

$$1 \leqslant h_\mu < p^{l+1-\theta-\theta_0} \quad (\mu=n+1, \ldots, s). \tag{93}$$

При этом различным по модулю p^l системам $(y_{n+1}, \ldots, y_s)$ соответствуют различные по модулю p^{l+1} системы $(h_{n+1}, \ldots, h_s)$. Меняя $z_{n+1}, \ldots, z_s$, мы по одному решению $(y_1, \ldots, y_s)$ системы (87) получим p^{s-n} различных решений $(h_1, \ldots, h_s)$ системы (91), удовлетворяющих условиям (92),

(93) и таких, что $(h_\nu, p)=1$ (если при этом $h_k > p^{l+1}$ при некотором $k \leqslant n$, то вместо h_k возьмем его наименьший положительный вычет по модулю p^{l+1}). Переходя к сравнениям по модулям $p^{l+2}, \ldots, p^{l+u}$, мы убедимся в справедливости (86).

§ 15. Покажем теперь, что *при* $s \geqslant n^3+n$, $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+3}$ *имеем* $W_1(p, s) \geqslant 1$. Рассмотрим с этой целью систему

$$\left.\begin{array}{c} x_1^k+\ldots+x_s^k \equiv L_k \pmod p \\ (x_\nu, p)=1 \end{array}\right\} (k=1, 2, \ldots, n) \tag{94}$$

и покажем, что она разрешима при любых целых L_k, если $s \geqslant n^3$, $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+3}$. Действительно, пусть

$$S=\sum_{h_1, \ldots, h_n=0}^{p-1} \sum_{x_1, \ldots, x_s=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{h_n\left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu^n-L_n\right)+\ldots+h_1\left(\sum_{\nu=1}^{s} x_\nu-L_1\right)}{p}\right). \tag{95}$$

Имеем

$$S=p^n \cdot V(p), \tag{96}$$

где $V(p)$ представляет число решений системы (94) с $0 < x_\nu < p$. Вместе с тем

$$S=(p-1)^s+\sum_{h_1, \ldots, h_n}' \exp\left(-2\pi i \frac{h_n L_n+\ldots+h_1 L_1}{p}\right) \times$$
$$\times\left(\sum_{x=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{h_n x^n+\ldots+h_1 x}{p}\right)\right)^s, \tag{97}$$

где знак $'$ показывает, что сумма распространена на все значения h_ν от 0 до $p-1$, за исключением того случая, когда все h_ν сразу обращаются в нуль. Если $h_n \not\equiv 0 \pmod p$, то согласно известной оценке Морделля [6]

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{h_n x^n+\ldots+h_1 x}{p}\right)\right| \leqslant 1+n^{\frac{1}{2}} \cdot (n, p-1)^{\frac{1}{2n}} \cdot \frac{p}{(p(p-1))^{\frac{1}{2n}}},$$

откуда

$$\left|\sum_{x=1}^{p-1} \exp\left(2\pi i \frac{h_n x^n+\ldots+h_1 x}{p}\right)\right| \leqslant 1+n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \frac{p^{1-\frac{1}{2n}}}{(p-1)^{\frac{1}{2n}}}; \tag{98}$$

последняя оценка справедлива и когда одновременно $h_n \equiv 0 \pmod p$, $h_{n-1} \equiv 0 \pmod p, \ldots, h_{\mu+1} \equiv 0 \pmod p$; $h_\mu \not\equiv 0 \pmod p$ $(\mu \geqslant 1)$.

Пользуясь (96), (97) и (98), находим

$$p^n V(p)=(p-1)^s+\zeta(p^n-1)\left(1+n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}} \cdot \frac{p^{1-\frac{1}{2n}}}{(p-1)^{\frac{1}{2n}}}\right)^s, \tag{99}$$

где $|\zeta|$ лежит между 0 и 1. При $s \geqslant n^3$ и $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+3}$ выражение в правой части равенства (99) будет >0, и следовательно $V(p) > 1$, т. е. система (94) разрешима.

Взяв

$$L_k = M_k - n_1^k - n_2^k - \dots - n_n^k \pmod p,$$

мы находим, что система

$$n_1^k + \dots + n_n^k + x_1^k + \dots + x_s^k \equiv M_k \pmod p \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

разрешима, откуда и следует, что $W_1(p, s) \geqslant 1$ при $s \geqslant n^3 + n$, $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+3}$

§ 16. Покажем теперь, что *если целые* $M_1, \dots, M_n$ *удовлетворяют условиям* (81) *при* $p = \pi_1, \dots, \pi_m$, где π_m — *наибольшее простое, не превосходящее* n, *то можно найти постоянное* $\beta_0(n)$, *обладающее тем свойством, что при любом простом* p *и некотором* $s_0(M_1, \dots, M_n) < \beta_0(n)$ *имеем*

$$W(p^l, s_0;\ M_1, \dots, M_n) \geqslant \pi_i^{(s_0 - n)l} \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{100}$$

при $l \geqslant \max l_0(\pi_i) = l'$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, *где* $l_0(\pi_i)$ *определяется условием* (82).

Действительно, если $M_1, \dots, M_n$ удовлетворяют условиям (81), то при указанном значении l' согласно § 13 имеем при $p < n^{\frac{n}{2}+3}$

$$W_1(p^{l'}, s_{p,l'};\ M_1, \dots, M_n) \geqslant 1$$

(заметим, что согласно (75), (76) и (77), при $p > n$, $\theta(p) = 0$ и $\theta_0(p) = 0$, и следовательно $l_0(p) = 1$) и

$$W_1(\pi_i^{l'}, s_0';\ M_1, \dots, M_n) \geqslant 1$$

при $i = 1, \dots, \lambda$, где π_λ — наибольшее простое $< n^{\frac{n}{2}+3}$, причем $s_0' = s_{\pi_1, \dots, \pi_\lambda; l'}$, ввиду (83), удовлетворяет неравенству

$$s_0' < \pi_1^{l'} \dots \pi_\lambda^{l'} + (n-1)\,\pi_\lambda^{l'}.$$

Согласно § 14 имеем тогда для $l \geqslant l'$

$$W(\pi_i^l, s_0') \geqslant W_1(\pi_i^l, s_0') \geqslant \pi_i^{(s_0' - n)(l - l')}.$$

Если при этом $s_0' > n^3 + n$, то, взяв $s_0 = s_0'$, убеждаемся в справедливости (100) для любых простых p, так как для $p \geqslant n^{\frac{n}{2}+3}$ справедливость (100) вытекает из результатов, указанных в §§ 15 и 14. Если же $s_0' \leqslant n^3 + n$, то возьмем $s_0 = s_0' + (\pi_1 \dots \pi_\lambda)^{l'}$.

Таким образом можно считать $\beta_0(n) = (\pi_1 \ldots \pi_\lambda)^{l'} + (n-1)\pi_\lambda^{l'}$.

§ 17. Согласно (74) имеем

$$\sum_{\substack{q_1 \mid p^l \\ \cdots \\ q_n \mid p^l}} A(q_1, \ldots, q_n; s_0) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{s_0} p^{-l(s_0-n)} W(p^l, s_0).$$

При значениях $M_1, \ldots, M_n$, s_0 и l, указанных в предыдущем параграфе, имеем следовательно

$$\sum_{\substack{q_1 \mid p^l \\ \cdots \\ q_n \mid p^l}} A(q_1, \ldots, q_n; s_0) \geq \left(\frac{p}{p-1}\right)^{s_0}. \tag{101}$$

Но согласно (67)

$$\mathfrak{S} = \lim_{l \to \infty} \prod_{k=1}^{l} \sum_{q_{ik} \mid \pi_k^l} A(q_{1k}, \ldots, q_{nk}).$$

Из оценок, приведенных в § 9, следует, что

$$\sum_{\substack{q_{ik} \mid \pi_k^l \\ (i=1, \ldots, n)}} A(q_{1k}, \ldots, q_{nk}) \geq 1 - C\pi_k^{-(1+\tau_1)},$$

где $C > 0$ и $\tau_1 > 0$ — постоянные; поэтому, ввиду (101), имеем

$$\mathfrak{S} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \max\left(\left(\frac{\pi_k}{\pi_k - 1}\right)^{s_0},\ 1 - C\pi_k^{-(1+\tau_1)}\right),$$

откуда видно, что действительно имеет место соотношение (14)

$$\mathfrak{S}(M_1, \ldots, M_n; s_0) \geq C_0(n) > 0.$$

Таким образом теорема II доказана.

Сопоставляя теорему I и теорему II, нетрудно убедиться в справедливости теоремы III, так как из доказательства теоремы II видно, что $s_0(M_1, \ldots, M_n)$ не изменится от замены $M_1, \ldots, M_n$ числами, сравнимыми с ними по модулю

$$K(n) = \prod_{i=1}^{m} \pi_i^{\theta(\pi_i)}.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
31. I. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Марджанишвили К. К., Об одновременном представлении n чисел суммами полных первых, вторых, ..., n-ых степеней, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем. (1937), 609—631.

[2] Walfisz A., Zur additiven Zahlentheorie II, Math. Zeitschrift, **40** (1935), 592—607.

[3] Виноградов И. М., Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм, Матем. сборн., **3 : 3** (1938), 435—471, лемма 6.

[4] Виноградов И. М., Новые оценки тригонометрических сумм, содержащих простые числа, Докл. Ак. Наук СССР, XVII (1937), № 4.

[5] Vinogradow I., Some theorems concerning the theory of primes, Матем. сборн., **2 : 2** (1937), 179—195.

[6] Mordell L. J., On a sum analogous to a Gauss's sum, Quart. J. Math., Oxford, Ser. 3 (1932).

C. MARDJANICHVILI. SUR UN PROBLÈME ADDITIF DE LA THÉORIE DES NOMBRES

RÉSUMÉ

Soit n un entier positif donné, $0 < N_1 < \ldots < N_n$ — des entiers.

Le présent article est consacré à l'étude du problème de la représentation du système $(N_1, \ldots, N_n)$ sous la forme

$$N_k = \sum_{\nu=1}^{s} p_\nu^k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

où $p_1, \ldots, p_s$ sont des nombres premiers.

Désignons par $I(N_1, \ldots, N_n; s)$ le nombre des systèmes ordonnés $(p_1, \ldots, p_s)$ de nombres premiers satisfaisant à (1) et posons

$$D(a_1, q_1; \ldots; a_n, q_n) = \frac{1}{\varphi(q_1 \ldots q_n)} \sum_r{}' \exp\left(2\pi i \left(\frac{a_n}{q_n} r^n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} r\right)\right), \tag{2}$$

où $(a_k, q_k) = 1$ et la somme est étendue aux valeurs de r qui parcourent un système réduit de résidus modulo $q_1 \ldots q_n$,

$$A(q_1, \ldots, q_n; s; N_1, \ldots, N_n) = \sum_{a_1, \ldots, a_n}{}' D^s \exp\left(-2\pi i\left(\frac{a_n}{q_n} N_n + \ldots + \frac{a_1}{q_1} N_1\right)\right), \tag{3}$$

où $a_1, \ldots, a_n$ parcourent des systèmes réduits de résidus respectivement modulo $q_1, \ldots, q_n$,

$$\mathfrak{S} = \sum_{q_1, \ldots, q_n = 1}^{\infty} A(q_1, \ldots, q_n; s; N_1, \ldots, N_n). \tag{4}$$

Nous dirons qu'un système de nombres positifs $h_1, \ldots, h_n$ vérifie la condition (a) s'il existe un nombre $\varepsilon > 0$ tel que pour

$$h_k - \varepsilon \leqslant h_k' \leqslant h_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

le système

$$\xi_1^k + \ldots + \xi_s^k = h_k' \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{6}$$

est résoluble en nombres positifs ξ_ν.

THÉORÈME I. *Soient $N_1, \ldots, N_n$ n nombres entiers positifs, s—un entier,*

$$s \geqslant 5n(n+1)(n+2)\lg n, \tag{7}$$

$$N_k = h_k N_n^{\frac{k}{n}} \quad (k=1, 2, \ldots, n). \tag{8}$$

Alors, si $h_1, \ldots, h_n$ vérifient la condition (a), on a

$$I(N_1, \ldots, N_n; s) = B(h_1, \ldots, h_{n-1}; s) N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} (\lg N)^{-s} \mathfrak{S}(N_1, \ldots, N_n; s) + \\ + O(N_n^{\frac{s}{n} - \frac{n+1}{2}} (\lg N)^{-s-\omega}), \tag{9}$$

où ω est une constante > 0 et

$$0 < C_1(n, s) \leqslant B(h_1, \ldots, h_{n-1}; s) \leqslant C_2(n, s). \tag{10}$$

Soit p un nombre premier et $n_1(p) = 1$, $n_2(p)$, ..., $n_n(p)$ les premiers n nombres entiers positifs pour lesquels $(n_k(p), p) = 1$. Désignons par $\theta(p)$ l'entier qui se détermine pas la condition

$$p^{\theta} \| \begin{vmatrix} n_n^{n-1}(p), & \ldots, & n_1^{n-1}(p) \\ \cdot & \cdot\cdot\cdot & \cdot \\ n_n^0(p), & \ldots, & n_1^0(p) \end{vmatrix} \tag{11}$$

($p^{\theta} \| a$ désigne que $p^{\theta} | a$, $p^{\theta+1} \nmid a$).

Soient $\pi_1 = 2$, $\pi_2 = 3$, ..., π_m les premiers m nombres de la suite des nombres premiers et π_m le plus grand des nombres premiers qui ne dépassent pas n.

THÉORÈME II. *Si les entiers $M_1, \ldots, M_n$ satisfont au système* (12) *du texte on peut trouver un $s_0(M_1, \ldots, M_n)$ tel que*

$$s_0 \leqslant \beta_0(n) \tag{13}$$

où $\beta_0(n)$ ne dépend que de n et

$$\mathfrak{S}(M_1, \ldots, M_n; s_0) \geqslant C_0(n) > 0. \tag{14}$$

Pour que (1) ait lieu il est nécessaire que le système (16) du texte soit résoluble par rapport à $z_1, \ldots, z_m$, satisfaisant à (17).

Posons $K(n) = \prod_{i=1}^{m} \pi_i^{\theta(\pi_i)}$.

THÉORÈME III. *Le système des entiers $N_1, \ldots, N_n$ est représentable sous la forme* (1) *où les p_ν sont premiers et s ne dépend que de la distribution des nombres $N_1, \ldots, N_n$* modulo $K(n)$, $s < \beta(n)$, *si le système* (16) *est résoluble par rapport à $z_1, \ldots, z_n$, satisfaisant à* (17),

$$N_1 > C_3(n)$$

et les nombres $h_1, h_2, \ldots, h_n$, définis par les rélations (8), *vérifient la condition* (a).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 215—228 Série mathématique

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О ПОЛИНОМАХ, ОРТОГОНАЛЬНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ДАННОЙ ЧИСЛОВОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ, И О ТЕОРЕМЕ W. HAHN'а

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Статья содержит обобщение понятия об ортогональности полиномов; кроме того находятся условия, необходимые и достаточные для того, чтобы одновременно с данными полиномами были ортогональны и их производные.

Введение

Рассмотрим две последовательности комплексных чисел

$$c_0,\ c_1,\ \ldots,\ c_n,\ \ldots;\quad c_0^*,\ c_1^*,\ \ldots,\ c_n^*,\ \ldots$$

(короче, последовательности $\{c_n\}_0^\infty$, $\{c_n^*\}_0^\infty$), подчиненные условиям

$$\Delta_n = |\, c_{i+k}\,|_{i,k=0}^{n-1} \neq 0, \tag{1}$$

$$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

$$\Delta_n^* = |\, c_{i+k}^*\,|_{i,k=0}^{n-1} \neq 0. \tag{1'}$$

Построим соответствующие этим последовательностям системы ортогональных полиномов $\{P_n(z)\}$ и $\{P_n^*(z)\}$

$$P_n(z) = \frac{1}{\Delta_n}\begin{vmatrix} c_0 & c_1 & \ldots & c_n \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1} & c_n & \ldots & c_{2n-1} \\ 1 & z & \ldots & z^n \end{vmatrix} = z^n + \ldots \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{2}$$

В таком случае имеем

$$\mathfrak{S}\{P_n(z)\,P_m(z)\} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ h_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \neq 0, & n = m, \end{cases} \tag{3}$$

где $\mathfrak{S}$ — функционал Стильтьеса, который всякому полиному

$$Q(z) = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i z^i$$

ставит в соответствие число *

$$\mathfrak{S}\{Q(z)\} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i c_i. \tag{4}$$

* Для полиномов $\{P_n^*(z)\}$ имеют место соотношения, аналогичные (2)—(4).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача I. *Найти условия, необходимые и достаточные для того, чтобы полиномы одной ортогональной системы выражались линейной комбинацией определенного числа полиномов другой ортогональной системы, т. е.**

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{s} A_i^{(n)} P_{n-i}^*(z) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \qquad P_{-k}^*(z) = 0. \tag{5}$$

Решив эту задачу, мы сможем решить в самом общем виде задачу, поставленную и решенную В. Ханом [W. Hahn ([1])]:

Задача II. *Найти условия, необходимые и достаточные для одновременной ортогональности системы* $\{P_n(z)\}$ *и системы* $\left\{\frac{1}{n} P_n'(z)\right\}$, *т. е.*

$$\mathfrak{S}\{P_n(z)\,P_m(z)\} \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m; \end{cases}$$

$$\mathfrak{S}^*\{P_n'(z)\,P_m'(z)\} \begin{cases} = 0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n = m, \end{cases}$$

где

$$\mathfrak{S}\left\{\sum_{i=0}^{r} \alpha_i z^i\right\} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i c_i, \qquad \mathfrak{S}^*\left\{\sum_{i=0}^{r} \alpha_i z^i\right\} = \sum_{i=0}^{r} \alpha_i c_i^*.$$

Наше обобщение заключается в следующем: Хан считает последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ вещественной и допускающей представление

$$c_n = \int_r^s x^n \omega(x)\,dx \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{6}$$

где $\omega(x)$ — функция, неотрицательная в интервале (r, s); в дальнейшем, впрочем, он пользуется только тем, что все корни полинома $\{P_n(x)\}$ вещественны и различны; следовательно, его выводы сохраняют силу и в том более общем случае, когда

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n\,d\psi(x) \quad (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{7}$$

где $\psi(x)$ — неубывающая функция с бесконечным множеством точек роста; это последнее представление последовательности $\{c_n\}_0^\infty$ равносильно тому, что вместо требования

$$\Delta_n \neq 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$$

ставится более ограничительное требование

$$\Delta_n > 0 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{8}$$

Кролл ([2]) и Вебстер ([3]), рассматривавшие задачу Хана после него, представляют числа $\{c_n\}_0^\infty$ именно в виде (6), т. е. требуют существования производной у функции $\psi(x)$

$$d\psi(x) = \omega(x)\,dx.$$

* Случай $s = 1$ подробно рассмотрен в нашей заметке ([4]).

Из нашего решения задачи II будет вытекать, что все эти ограничения не нужны.

§ 1

Займемся сперва задачей I и выведем необходимые условия; для этого рассмотрим равенство

$$\mathfrak{S}^*\left\{\frac{P_n(z)}{c_0^*}\right\} = \begin{cases} 0 & (n=s+1,\ s+2,\ \ldots); \\ A_n^{(n)} & (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s); \end{cases} \tag{9}$$

с другой стороны, имеем

$$\mathfrak{S}\left\{P_n(z)\sum_{i=0}^{s}\frac{A_i^{(i)}P_i(z)}{h_i}\right\} = \begin{cases} 0 & (n=s+1,\ s+2,\ \ldots); \\ A_n^{(n)} & (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ s); \end{cases} \tag{9'}$$

отсюда вытекает следующее основное равенство:

$$c_n^* = \mathfrak{S}^*\{z^n\} = \mathfrak{S}\{g(z)\,z^n\} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{10}$$

где $g(z)$ — полином степени не выше s, не зависящий от n,

$$g(z) = c_0^*\sum_{i=0}^{s}\frac{A_i^{(i)}P_i(z)}{h_i}. \tag{11}$$

Если $A_s^{(s)} \neq 0$, то полином $g(z)$ можно записать еще в таком виде:

$$g(z) = a\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i), \qquad a = \frac{c_0^* A_s^{(s)}}{h_s}. \tag{11'}$$

Нетрудно видеть, что полиномы $\{P_n^*(z)\}$ выражаются в зависимости от $\{P_n(z)\}$ следующей простой формулой, являющейся обратной по отношению к (5) *:

$$P_n^*(z)\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i) =$$

$$=(-1)^s \begin{vmatrix} P_n(z) & \ldots & P_{n+s}(z) \\ P_n(\alpha_1) & \ldots & P_{n+s}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_n(\alpha_s) & \ldots & P_{n+s}(\alpha_s) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} P_n(\alpha_1) & \ldots & P_{n+s-1}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ P_n(\alpha_s) & \ldots & P_{n+s-1}(\alpha_s) \end{vmatrix}, \tag{12}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

при условии]

$$|P_{n+k-1}(\alpha_i)|_{i,\,k=1}^{s} \neq 0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{12'}$$

Мы приходим к следующей теореме, дающей решение задачи I:

ТЕОРЕМА I. *Если выбрать произвольную последовательность* $\{c_n\}_0^\infty$, *подчиненную единственному условию* (1), *построить соответствующую систему ортогональных полиномов* $\{P_n(z)\}$ *по формуле* (2), *затем выбрать произвольные числа* $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$, *удовлетворяющие* (12'), *и*

* См. также ([5]), ([6]), ([7]); если $\alpha_i = \alpha_k$, то $P_\nu(\alpha_k)$ надо заменить через $P'_\nu(\alpha_i)$ ($\nu = n,\ n+1,\ \ldots,\ n+s$).

построить систему полиномов $\{P_n^*(z)\}$ *по формуле* (12), *то она будет ортогональна относительно последовательности* $\{c_n^*\}_0^\infty$, *причем*

$$c_n^* = a\mathfrak{S}\left\{z^n \prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)\right\}, \quad h_n^* = (-1)^s a h_n \frac{\left|P_{n+k}(\alpha_\nu)\right|_{\nu,\, k=1}^{s}}{\left|P_{n+k-1}(\alpha_\nu)\right|_{\nu,\, k=1}^{s}}, \qquad (10')$$

где $a \neq 0$ — *произвольное число; кроме того*

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{s} A_i^{(n)} P_{n-i}^*(z) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \quad P_{-k}^* = 0,$$

причем

$$A_i^{(n)} = \frac{(-1)^i h_n}{h_{n-i}\left|P_{n+k-i}(\alpha_\nu)\right|_{k,\nu=1}^{s}} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} P_{n-i}(\alpha_1) & \ldots & P_{n-1}(\alpha_1) & P_{n+1}(\alpha_1) & \ldots & P_{n-i+s}(\alpha_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_{n-i}(\alpha_s) & \ldots & P_{n-1}(\alpha_s) & P_{n+1}(\alpha_s) & \ldots & P_{n-i+s}(\alpha_s) \end{vmatrix} \qquad (13)$$

$$(i=0,\ 1,\ \ldots,\ s).$$

Мы доказали необходимость наших условий, доказательство их достаточности не представляет труда. Для вывода формулы для $A_i^{(n)}$ мы положим

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{n} A_i^{(n)} P_{n-i}^*(z) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots);$$

в таком случае получим по (10′)

$$\mathfrak{S}\{P_n(z) P_{n-i}^*(z)\} = A_i^{(n)} h_{n-i}^* = a\mathfrak{S}\left\{\prod_{i=1}^{s}(z-\alpha_i)\left[P_n(z) P_{n-i}^*(z)\right]\right\};$$

подставляя вместо $P_{n-i}^*(z)$, h_{n-i}^* их значения по формулам (12) и (10′), легко найдем

$$A_i^{(n)} = 0 \quad (i=s+1,\ s+2,\ \ldots,\ n)$$

и выведем формулу (13) *.

§ 2

Решив нашу задачу I, мы сможем теперь решить обобщенную задачу Хана, сформулированную во введении (задача II).

Выведем сперва необходимые условия. Для этого рассмотрим рекуррентные соотношения, которым должны удовлетворять ортогональные полиномы $\{P_n(z)\}$ и $\left\{\frac{P_n'(z)}{n}\right\}$:

$$P_{n+1}(z) = (z + a_{n+1}) P_n(z) - \lambda_{n+1} P_{n-1}(z) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots), \qquad (14)$$

$$\frac{P_{n+1}'(z)}{n+1} = (z + a_n') \frac{P_n'(z)}{n} - \lambda_n' \frac{P_{n-1}'(z)}{n-1} \quad (n=2,\ 3,\ \ldots), \qquad (14')$$

---

* Задача I, как мы видим, решается весьма просто, если исходить из системы $\{P_n(z)\}$; в нашей заметке (4) мы решаем при $s=1$ ту же задачу, считая заданной систему $\{P_n^*(z)\}$.

причем

$$\lambda_n \neq 0, \quad \lambda'_n \neq 0 \quad (n=2,\ 3,\ \ldots). \tag{15}$$

Дифференцируя первое из них и исключая $zP'_n(z)$, мы находим

$$P_n(z)=\frac{P'_{n+1}(z)}{n+1}+(a'_n-a_{n+1})P'_n(z)+\left(\lambda_{n+1}-\frac{n\lambda'_n}{n-1}\right)P'_{n-1}(z);$$

таким образом, полином $P_n(z)$ должен выражаться линейной комбинацией трех ортогональных полиномов, т. е. мы приходим к частному случаю решенной нами задачи I, причем $s=2$ и

$$P^*_n(z)=\frac{P'_{n+1}(z)}{n+1} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Мы имеем таким образом по (10′)

$$\mathfrak{S}\{(az^2+bz+c)z^n\theta_{n-2}(z)P'_n(z)\}=0, \tag{16}$$

ибо в данном случае $g(z)$ будет полиномом степени не выше второй; через $\theta_k(z)$ здесь и во всем дальнейшем обозначим полином степени не выше k.

Введем новую последовательность $\{c'_n\}_0^\infty$ по формуле

$$c'_n=a(n+2)c_{n+1}+b(n+1)c_n+cnc_{n-1} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots); \tag{17}$$

в таком случае имеем

$$c'_n=\mathfrak{S}'\{z^n\}=\mathfrak{S}\{[(az^2+bz+c)z^n]'\} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{18}$$

Пользуясь этим равенством и (16), находим

$$\mathfrak{S}\{[(az^2+bz+c)P_n(z)\theta_{n-2}(z)]'\}=$$
$$=\mathfrak{S}\{(az^2+bz+c)P'_n(z)\theta_{n-2}(z)\}=\mathfrak{S}'\{P_n(z)\theta_{n-2}(z)\}=0. \tag{19}$$

Рассмотрим последовательность $\{\gamma_n\}_0^\infty$, где

$$\gamma_n=\mathfrak{S}\{(dz+e)z^n\}=dc_{n+1}+ec_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{20}$$

причем числа d и e подобраны из условия

$$\gamma_0=c'_0, \qquad \gamma_1=c'_1,$$

т. е.

$$dc_1+ec_0=2ac_1+bc_0, \quad dc_2+ec_1=3ac_2+2bc_1+cc_0.$$

В таком случае можем записать

$$\gamma_n=c'_n+c''_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

причем $c''_0=c''_1=0$; если ввести обозначение

$$\mathfrak{S}''\{z^n\}=c''_n \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{21}$$

то мы найдем

$$\mathfrak{S}''\{P_n(z)\theta_{n-2}(z)\}=\mathfrak{S}\{(dz+e)P_n(z)\theta_{n-2}(z)\}-\mathfrak{S}'\{P_n(z)\theta_{n-2}(z)\}=0;$$

полагая $n=2,\ 3,\ 4,\ \ldots$, легко находим

$$c''_2=c''_3=\ \ldots\ =0.$$

Мы приходим, таким образом, к следующему основному равенству:

$$\mathfrak{S}\{[(az^2+bz+c)z^n]'\}=\mathfrak{S}\{(dz+e)z^n\} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots), \tag{22}$$

откуда вытекает уравнение в конечных разностях для последовательности $\{c_n\}_0^\infty$

$$[a(n+3)-d]c_{n+2}+[b(n+2)-e]c_{n+1}+c(n+1)c_n=0 \tag{23}$$
$$(n=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Задавая произвольно c_0, мы можем по этой формуле построить всю последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ при условии

$$d \neq ka \quad (k=2, 3, 4, \ldots). \tag{23'}$$

§ 3

Нетрудно видеть, что найденные нами необходимые условия являются в то же время и достаточными; действительно, зададим произвольно числа a, b, d, e, c_0 при условии (23′), найдем по формуле (23) всю последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ и все те значения c, при которых обращается в нуль хоть один из определителей

$$\Delta_n = | c_{i+k} |_{i, k=0}^{n-1} \quad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

Таких значений c будет счетное множество; выбирая затем c не равным ни одному из этих значений, мы получим последовательность $\{c_n\}_0^\infty$, удовлетворяющую (1).

Далее, из (23) следует соотношение (22), откуда вытекает

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}\{(az^2+bz+c)P_n'(z)\theta_{n-2}(z)\} = \\ &= \mathfrak{S}\{[(az^2+bz+c)P_n(z)\theta_{n-2}(z)]'\} = \\ &= \mathfrak{S}\{(dz+e)P_n(z)\theta_{n-2}(z)\} = 0;\end{aligned}$$

кроме того имеем

$$\begin{aligned}&\mathfrak{S}\{(az^2+bz+c)P_n'(z)P_n'(z)\} = \mathfrak{S}\{[(az^2+bz+c)P_n(z)P_n'(z)]'\} - \\ &- \mathfrak{S}\{(2az+b)P_n(z)P_n'(z)\} - \mathfrak{S}\{(az^2+bz+c)P_n(z)P_n''(z)\},\end{aligned}$$

откуда вытекает равенство

$$\mathfrak{S}\{(az^2+bz+c)P_n'(z)P_n'(z)\} = \mathfrak{S}\{(dz+e)P_n(z)P_n'(z)\} - nah_n(n+1),$$

или, окончательно,

$$h_{n-1}^* = \mathfrak{S}\left\{(az^2+bz+c)\frac{P_n'(z)}{n}\cdot\frac{P_n'(z)}{n}\right\} = \frac{h_n}{n}[d-(n+1)a] \quad (n=1, 2, \ldots). \tag{24}$$

Последнее выражение не равно нулю вследствие сделанных нами оговорок, ибо

$$h_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \neq 0, \quad d-(n+2)a \neq 0 \qquad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Мы приходим к следующей теореме:

ТЕОРЕМА II. *Для того чтобы одновременно были ортогональны две системы полиномов* $\{P_n(z)\}$ *и* $\left\{\frac{1}{n}P_n'(z)\right\}$, *т. е. для справедливости соотношений*

$$\mathfrak{S}\{P_n(z)P_m(z)\} \begin{cases} =0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n=m; \end{cases} \qquad \mathfrak{S}^*\{P_n'(z)P_m'(z)\} \begin{cases} =0, & n \neq m, \\ \neq 0, & n=m, \end{cases}$$

где

$$\mathfrak{S}\left\{\sum_{i=0}^r \alpha_i z^i\right\} = \sum_{i=0}^r \alpha_i c_i, \qquad \mathfrak{S}^*\left\{\sum_{i=0}^r \alpha_i z^i\right\} = \sum_{i=0}^r \alpha_i c_i^*,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ *была построена по рекуррентной формуле* (23)

$$[a(n+3)-d]c_{n+2} + [b(n+2)-e]c_{n+1} + c(n+1)c_n = 0$$
$$(n=-1, 0, 1, 2, \ldots),$$

где a, b, c, d, e — произвольные числа, удовлетворяющие условиям

$$d-(n+2)a \neq 0, \quad \Delta_{n+1} = |c_{i+k}|_{i,k=0}^{n} \neq 0, \quad (n=0, 1, 2, \ldots); \qquad (23'')$$

кроме того a, b и c одновременно не равны нулю; при этом

$$c_n^* = ac_{n+2}+bc_{n+1}+cc_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots). \qquad (25)$$

§ 4

Для более детального изучения последовательности $\{c_n\}_0^\infty$ займемся решением уравнения в конечных разностях

$$[an+(3a-d)]\,c_{n+2}+[bn+(2b-e)]\,c_{n+1}+(cn+c)\,c_n=0$$
$$(n=-1, 0, 1, 2, \ldots);$$

оно принадлежит к хорошо изученному типу и решается посредством преобразования Лапласа

$$c_n=\int\limits_C z^{n-1}f(z)\,dz \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \qquad (26)$$

где интеграл берется вдоль некоторой кривой C; эту последнюю, а также ее крайние точки p и q надо найти из условий

$$[z^n f(z)\psi(z)]_p^q=0, \qquad (27)$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\psi(z)=az^2+bz+c, \quad \varphi(z)=(3a-d)z^2+(2b-e)z+c,\\ &f(z)\psi(z)=\exp\left\{\int\frac{\varphi(z)\,dz}{z\psi(z)}\right\}; \quad f(z)=z\exp\left\{-\int\frac{dz+e}{az^2+bz+c}\,dz\right\}. \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

Рассмотрим все возможные случаи.

I случай

$$a\neq 0; \quad az^2+bz+c=a(z-\alpha_1)(z-\alpha_2), \quad \alpha_1\neq\alpha_2.$$

В этом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} &f(z)=z(z-\alpha_1)^{\beta_1-1}(z-\alpha_2)^{\beta_2-1},\\ &c_n=\int\limits_C z^n(z-\alpha_1)^{\beta_1-1}(z-\alpha_2)^{\beta_2-1}\,dz \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

где

$$\beta_1=1-\frac{d\alpha_1+e}{a(\alpha_1-\alpha_2)}, \qquad \beta_2=1-\frac{d\alpha_2+e}{a(\alpha_2-\alpha_1)}; \qquad (29')$$

наше условие (27) приобретает вид

$$[z^{n+1}(z-\alpha_1)^{\beta_1}(z-\alpha_2)^{\beta_2}]_p^q=0 \qquad (n=-1, 0, 1, 2, \ldots). \qquad (30)$$

Предположим сперва, что

I_1 $$\Re\beta_1>0, \quad \Re\beta_2>0;$$

в таком случае за C можно взять любую кривую, идущую из α_1 в α_2,

$$c_n=\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} z^n(z-\alpha_1)^{\beta_1-1}(z-\alpha_2)^{\beta_2-1}\,dz \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Пусть теперь

I$_2$ $$\Re\beta_1 > 0, \qquad \Re\beta_2 \leqslant 0;$$

в таком случае за C берем петлю, начинающуюся в точке $z=\alpha_1$, охватывающую точку $z=\alpha_2$ и кончающуюся в точке $z=\alpha_1$.

Пусть, наконец,

I$_3$ $$\Re\beta_1 \leqslant 0, \qquad \Re\beta_2 \leqslant 0;$$

в этом случае за C надо взять контур, образованный петлей из любой точки $z=z_0$ $(z_0 \neq \alpha_1,\ z_0 \neq \alpha_2)$ вокруг точки $z=\alpha_1$ в положительном направлении, такой же петлей вокруг α_2, петлей вокруг α_1 в отрицательном направлении и такой же петлей вокруг α_2.

II случай

II$_1$ $$a \neq 0, \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha; \quad \gamma=\frac{d\alpha+e}{a} \neq 0.$$

В этом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} f(z)=z(z-\alpha)^\beta \exp\left\{\frac{\gamma}{z-\alpha}\right\}, \quad c_n=\int\limits_C z^n (z-\alpha)^\beta \exp\left\{\frac{\gamma}{z-\alpha}\right\} dz; \\ \left[z^{n+1}(z-\alpha)^{\beta+2} \exp\left\{\frac{\gamma}{z-\alpha}\right\}\right]_p^q=0; \quad \beta=-\frac{d}{a}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Проведем через точку $z=\alpha$ прямую линию, уравнение которой

$$\Re\left\{\frac{\gamma}{z-\alpha}\right\}=0;$$

она делит всю плоскость на две полуплоскости: в первой полуплоскости

$$\Re\left\{\frac{\gamma}{z-\alpha}\right\}<0,$$

во второй полуплоскости

$$\Re\left\{\frac{\gamma}{z-\alpha}\right\}>0;$$

за C берем петлю, начинающуюся в точке $z=\alpha$, идущую сперва в первой полуплоскости, затем переходящей во вторую полуплоскость, затем снова в первую и возвращающуюся в точку $z=\alpha$.

Если же

II$_2$ $$a \neq 0, \quad \alpha_1=\alpha_2=\alpha, \quad \gamma=\frac{d\alpha+e}{a}=0,$$

то, как легко найти из (23), имеем

$$c_n=\alpha^n c_0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

Так как при этом не выполняется основное условие (1), то этот случай надо отбросить.

III случай *

III $$a=0, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

В этом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} f(z)=z(z-\alpha)^\beta \exp\{\nu z\}, \quad \nu=-\frac{d}{b}, \quad \beta=-\frac{d\alpha+e}{b}, \quad \alpha=-\frac{c}{b}, \\ c_n=\int\limits_C z^n (z-\alpha)^\beta \exp\{\nu z\}\, dz \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

* Случай $a=d=0$ невозможен вследствие (23′).

а наше условие (27) имеет вид

$$[z^{n+1}(z-\alpha)^{\beta+1}\exp\{\nu z\}]_p^q=0 \quad (n=-1,0,1,\ldots). \tag{33}$$

Если при этом

III$_1$ $$\Re\beta>-1,$$

то за C можно взять любую кривую, исходящую из точки $z=\alpha$ и уходящую в бесконечность по любому направлению, лежащему в полуплоскости

$$\Re\{\nu z\}<0;$$

если же имеем

III$_2$ $$\Re\beta\leqslant 0,$$

то за C берем петлю, начинающуюся в точке $z=\infty$ в полуплоскости $\Re\{\nu z\}<0$, охватывающую точку $z=\alpha$ и уходящую на бесконечность по направлению, лежащему в той же полуплоскости.

IV случай

IV $$a=b=0, \quad c\neq 0, \quad d\neq 0.$$

В этом случае имеем

$$\left.\begin{aligned} &f(z)=z\exp\{-k(z-\alpha)^2\}, \quad k=\frac{d}{2c}, \quad \alpha=-\frac{e}{d};\\ &c_n=\int\limits_C z^n\exp\{-k(z-\alpha)^2\}\,dz, \quad [z^{n+1}\exp\{-k(z-\alpha)^2\}]_p^q=0. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Разобьем всю плоскость на четыре квадранта — в двух из них (I тип)

$$\Re\{k(z-\alpha)^2\}>0,$$

в двух других (II тип)

$$\Re\{k(z-\alpha)^2\}<0;$$

за C возьмем любую кривую, исходящую из точки $z=\infty$ в области I типа, пересекающую область II типа и уходящую снова на бесконечность по направлению, лежащему в области I типа.

Мы разобрали, таким образом, все случаи. В том частном случае, если все числа, с которыми мы имеем дело, вещественны, и если вместо условия

$$\Delta_n\neq 0 \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

поставлено более ограничительное условие

$$\Delta_n>0 \quad (n=1,2,3,\ldots),$$

то, как известно, числа $\{c_n\}_0^\infty$ будут допускать представление (7), — при этих условиях мы получим полиномы Якоби (случай I$_1$), обобщенные полиномы Лагерра (случай III$_1$) и полиномы Эрмита (случай IV). В этом и заключается теорема Хана.

§ 5

В качестве первого примера рассмотрим такой вопрос: в каком случае имеет место тождество

$$R_{n-1}(y)=\frac{1}{c_0}\mathfrak{S}\left\{\frac{P_n(y)-P_n(z)}{y-z}\right\}\equiv\frac{P_n'(y)}{n} \quad (n=1,2,3,\ldots). \tag{35}$$

Так как полиномы $\{R_{n-1}(y)\}$ также образуют ортогональную систему одновременно с $\{P_n(z)\}$ ([13, 14, 4]), то мы снова приходим к задаче II.

Как известно, полиномы $\{R_{n-1}(z)\}$ удовлетворяют тому же уравнению в конечных разностях (14), что и полиномы $\{P_n(z)\}$, — поэтому, пользуясь (35), легко найдем равенство

$$P_n(z) = \frac{P'_{n+1}(z)}{n+1} - \lambda_{n+1}\frac{P'_{n-1}(z)}{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{36}$$

Пользуясь формулой (13), получим

$$A_2^{(n)} = -\lambda_{n+1} = \frac{ah_n}{h^*_{n-2}} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots),$$

где по (24) имеем

$$h^*_{n-2} = \frac{h_{n-1}[d - an]}{n-1};$$

отсюда легко находим равенство

$$d = a \neq 0. \tag{37}$$

С другой стороны, условие $A_1^{(n)} = 0$ дает нам

$$\frac{P_{n-1}(\alpha_1)}{P_{n+1}(\alpha_1)} = \frac{P_{n-1}(\alpha_2)}{P_{n+1}(\alpha_2)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{38}$$

Пользуясь снова (14), мы найдем

$$\alpha_1 + \alpha_2 = a_n + a_{n+1} = -\frac{b}{a} = \text{const} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots). \tag{39}$$

Приравнивая коэффициенты при z^{n-1} в (14) и пользуясь (39), находим окончательно

$$b = 2e. \tag{37'}$$

Таким образом мы имеем случай I_1, причем *

$$\beta_1 = \beta_2 = \frac{1}{2}. \tag{40}$$

Мы приходим к полиномам Чебышева.

Рассмотренный нами пример имеет значение в следующем вопросе. Как известно, при условии (7) имеет место квадратурная формула Гаусса

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_{2n-1}(x)\, d\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{R_{n-1}(x_k)}{P'_n(x_k)} \theta_{2n-1}(x_k), \tag{41}$$

где $P_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k)$; с другой стороны, имеет место квадратурная формула Чебышева

$$\int_{-\infty}^{\infty} \theta_n(x)\, d\psi(x) = \frac{c_0}{n}\sum_{i=1}^{n}\theta_n(\xi_i), \tag{41'}$$

где $\xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_n$ некоторые абсциссы. Возникает вопрос: *в каком случае формула Чебышева даст ту же точность, что и формула Гаусса?*

Полагая

$$\theta_{2n-1}(x) = P_n(x)\,\theta_{n-1}(x),$$

---

* Если $\alpha_1 = \alpha_2$, то $\gamma = 0$, т. е. приходим к случаю II_2, который надо отбросить.

мы находим, что абсциссы $\{\xi_i\}_1^n$ должны совпадать с $\{x_i\}_1^n$ и, кроме того, должно иметь место равенство

$$R_{n-1}(x_k) = \frac{c_0}{n} P'_n(x_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n);$$

следовательно должно иметь место тождество

$$R_{n-1}(x) \equiv \frac{c_0}{n} P'_n(x) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Мы доказали в самом общем случае, — не делая никаких специальных предположений о функции $\psi(x)$, — что это возможно только для веса, соответствующего полиномам Чебышева.

В качестве второго примера рассмотрим вопрос об ортогональности системы полиномов $\{P_n(z)\}$, обладающей свойством

$$P_n(z) = \frac{P'_{n+1}(z)}{n+1} + B_n P'_n(z) + C_n P'_{n-1}(z) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \ P_{-1} = 0. \quad (42)$$

Пользуясь (14), мы легко находим как необходимое следствие ортогональности системы $\{P_n(z)\}$, что полиномы $\left\{\frac{P'_n(z)}{n}\right\}$ должны удовлетворять рекуррентному соотношению

$$\frac{P'_{n+1}(z)}{n+1} = (z + a'_n)\frac{P'_n(z)}{n} - \lambda'_n \frac{P'_{n-1}(z)}{n-1}, \ a'_n = a_{n+1} + B_n,$$

$$\lambda'_n = \frac{n-1}{n}(\lambda_{n+1} - C_n) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Из этого соотношения вытекает, что при условии $\lambda'_n \neq 0$ полиномы $\left\{\frac{P'_n(z)}{n}\right\}$ ортогональны относительно последовательности $\{c_n^*\}_0^\infty$, которая определяется (вплоть до множителя) из соотношений

$$\lambda'_{n+1} = \frac{\Delta^*_{n+1}\Delta^*_{n-1}}{(\Delta^*_n)^2}; \ a'_n = \frac{1}{\Delta^*_{n-1}}\begin{vmatrix} c_0^* & \ldots & c_{n-3}^* & c_{n-1}^* \\ c_1^* & \ldots & c_{n-2}^* & c_n^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-2}^* & \ldots & c_{2n-5}^* & c_{2n-3}^* \end{vmatrix} - \frac{1}{\Delta^*_n}\begin{vmatrix} c_0^* & \ldots & c_{n-2}^* & c_n^* \\ c_1^* & \ldots & c_{n-1}^* & c_{n+1}^* \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-1}^* & \ldots & c_{2n-3}^* & c_{2n-1}^* \end{vmatrix}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Действительно, имеем

$$a'_1 = -\frac{c_1^*}{c_0^*}, \quad c_1^* = -a'_1 c_0^*;$$

затем находим c_2^* из условия

$$\frac{c_0^* c_2^* - (c_1^*)^2}{(c_1)^2} = \lambda'_2$$

и c_3^* из условия

$$-\frac{c_0^* c_3^* - c_1^* c_2^*}{c_0 c_2^* - (c_1)^2} + \frac{c_1^*}{c_0^*} = a'_2,$$

и т. д. Таким образом одновременно с системой $\{P_n(z)\}$ должна быть ортогональна система $\{P'_n(z)\}$, т. е. мы снова приходим к рассмотренной нами задаче II.

В частности, если $B_n = C_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то

$$P_n(z) = \frac{P'_{n+1}(z)}{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

т. е. наши полиномы являются полиномами Аппеля; если они ортогональны, то мы должны иметь

$$c_n^* = c_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

и из (25) видно, что в этом случае $a = b = 0$, $c = 1$, т. е. мы имеем наш случай IV; если поставить ограничение (7), то мы придем к полиномам Эрмита *.

§ 6

Возвращаясь к общему случаю, когда последовательность $\{c_n\}_0^\infty$ подчинена единственному условию (1), покажем в заключение, что наши полиномы $\{P_n(z)\}$ являются частным решением линейного дифференциального уравнения ([1])

$$\{(az^2 + bz + c)\, P_n'(z)\}' - (dz + e)\, P_n'(z) + n\,[d - (n+1)\,a]\, P_n(z) = 0 \qquad (43)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для доказательства положим

$$(az^2 + bz + c)\, P_n''(z) + (\lambda z + \mu)\, P_n'(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k\, P_k(z); \qquad (44)$$

умножая обе части на $P_\nu(z)$, получим

$$P_\nu(z) \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(z) = [(az^2 + bz + c)\, P_n'(z)\, P_\nu(z)]' - (az^2 + bz + c)\, P_n'(z)\, P_\nu'(z) -$$
$$- (2az + b)\, P_n'(z)\, P_\nu(z) + (\lambda z + \mu)\, P_n'(z)\, P_\nu(z),$$

или иначе

$$P_\nu(z) \sum_{k=0}^{n} b_k P_k(z) = [(az^2 + bz + c)\, P_n'(z)\, P_\nu(z)]' -$$
$$- [(az^2 + bz + c)\, P_n(z)\, P_\nu'(z)]' + (az^2 + bz + c)\, P_n(z)\, P_\nu''(z) +$$
$$+ (2az + b)\, P_n(z)\, P_\nu'(z) + [(\lambda - 2a)\, z + \mu - b]\, P_n'(z)\, P_\nu(z).$$

Отсюда находим при $\nu \leqslant n - 1$

$$h_\nu b_\nu = \mathfrak{S}\{P_n'(z)\, P_\nu(z)\, [z\,(\lambda - 2a + d) + (\mu - b + e)]\} = 0,$$

при условии

$$\lambda = 2a - d, \quad \mu = b - e.$$

Таким образом

$$\{(az^2 + bz + c)\, P_n'(z)\}' - (dz + e)\, P_n'(z) - b_n\, P_n(z) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Приравнивая нулю коэффициент при z^n, найдем

$$b_n = -n\,[d - (n+1)\,a].$$

Все случаи, полученные нами из рассмотрения уравнения в конечных разностях (23), можно было бы получить и из уравнения (43); в частности при условии (7) Бренке показал ([8]) еще до Хана, что

* См. также ([9–12], [3]).

уравнению (43) удовлетворяют только так называемые классические полиномы Якоби, Лагерра и Эрмита *.

Отметим мимоходом, что моменты $\{c_n\}_0^\infty$ весов, соответствующих всем классическим ортогональным полиномам, удовлетворяют одному и тому же уравнению в конечных разностях (23).

Институт математики и механики при Харьковском гос. университете.

Поступило 25.XI.1939.

ЛИТЕРАТУРА

1 Hahn W., Über die Jacobischen Polynome und zwei verwandte Polynomklassen, Math. Zeitschr., **39** (1935), 634—38.

Krall H., On derivatives of orthogonal polynomials, Bull. Americ. Math. Soc., **42** (1936), 423—28.

3 Webster M., Orthogonal polynomials with orthogonal derivatives, ibid., **44** (1938), 880—88.

4 Геронимус Я. Л., О полиномах, ортогональных относительно данной числовой последовательности, Зап. Научно-исслед. инст. матем. и мех. Харьк. гос. ун-та, 17 (1940), в печати.

5 Геронимус Я. Л., Sur le polynôme multiplement monotone qui s'écarte le moins de zéro, dont les deux premiers coefficients sont donnés, Докл. Акад. Наук СССР, № 23—А (1928), 485—90.

6 Бернштейн С. Н., О полиномах, ортогональных в конечном интервале, 1937.

7 Shohat J., Théorie générale des polynômes orthogonaux de Tchebychef, Mémorial des Sc. Math., fasc. LXVI (1934).

8 Brenke W., On polynomial solutions of a class of linear differential equations of the second order, Bull. Americ. Math. Soc. (1930), 77—84.

9 Angelesco A., Sur les polynômes orthogonaux en rapport avec d'autres polynômes, Bull. Soc. Sc. de Cluj, I (1921), 44—59.

10 Meixner J., Orthogonal Polynomsysteme mit einer besonderen Gestalt der erzeugenden Funktion, Journ. Lond. Math. Soc., **9** (1934), 6—12.

11 Shohat J., The relation of classical orthogonal polynomials to the polynomials of Appell, Amer. Journ. of Math., **58** (1936), 453—64.

12 Webster M., On the zeros of Jacobi polynomials with applications, Duke Math. Journ., **3** (1937), 426—42.

13 Shohat J. and Sherman J., On the numerators of the continued fraction $\frac{\lambda_1|}{|x-c_1} - \frac{\lambda_2|}{|x-c_2}, \ldots$, Proc. Nation. Acad., **18** (1932), 283—87.

14 Sherman J., On the numerators of the convergents of the Stieltjes continued fraction, Trans. Amer. Math. Soc., **35** (1933), 64—87.

J. GERONIMUS. SUR LES POLYNÔMES ORTHOGONAUX RELATIFS À UNE SUITE DE NOMBRES DONNÉE ET SUR LE THÉORÈME DE W. HAHN

RÉSUMÉ

Considérons deux suites des nombres complexes $\{c_n\}_0^\infty$, $\{c_n^*\}_0^\infty$, soumises à la condition

$$\Delta_n = |c_{i+k}|_{i,k=0}^{n-1} \neq 0, \quad \Delta_n^* = |c_{i+k}|_{i,k=0}^{n-1} \neq 0 \quad (n=1,2,3,\ldots)$$

et deux systèmes $\{P_n(z)\}$ et $\{P_n^*(z)\}$ de polynômes orthogonaux correspondants

$$\text{où} \quad \mathfrak{S}\{P_n(z)\,P_m(z)\} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ h_n = \frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n} \neq 0, & n = m; \end{cases} \quad \mathfrak{S}\left\{\sum_{i=0}^r \alpha_i z^i\right\} = \sum_{i=0}^r \alpha_i c_i.$$

* См. также Шохат (7).

Problème I. *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la relation*

$$P_n(z) = \sum_{i=0}^{s} A_i^{(n)} P_{n-i}^*(z) \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \quad P_{-k}^* = 0,$$

entre les polynômes de deux systèmes orthogonaux.

La solution de ce problème nous permet de résoudre le problème generalisé de W. Hahn ([1]):

Problème II. *Trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que le système* $\left\{\frac{1}{n} P_n'(z)\right\}$ *soit orthogonal en même temps que* $\{P_n(z)\}$.

On démontre aisément que le problème II est un cas particulier du problème I avec

$$s = 2, \quad P_n^*(z) = \frac{P_{n+1}'(z)}{n+1}.$$

On trouve la relation fondamentale suivante

$$\mathfrak{S}\{[(az^2+bz+c)z^n]'\} = \mathfrak{S}\{(dz+e)z^n\} \quad (n=0, 1, 2, \ldots) \tag{1}$$

a, b, c, d, e étant des nombres arbitraires soumis aux conditions $|a|+|b|+|c| \neq 0$ et

$$d \neq (n+1)a, \quad \Delta_n \neq 0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots);$$

de (1) résulte l'équation aux différences finies

$$[a(n+3)-d]c_{n+2} + [b(n+2)-e]c_{n+1} + c(n+1)c_n = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots), \tag{2}$$

d'où l'on peut trouver la suite $\{c_n\}_0^\infty$, c_0 étant arbitraire; la suite $\{c_n^*\}_0^\infty$ est donnée par la formule

$$c_n^* = ac_{n+2} + bc_{n+1} + cc_n \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

En se servant de (1) il est facile de trouver l'équation différentielle à laquelle satisfait $P_n(z)$

$$\{(az^2+bz+c)P_n'(z)\}' - (dz+e)P_n'(z) + \\ + n[d-(n+1)a]P_n(z) = 0 \quad (n=0, 1, 2, \ldots).$$

La solution de l'équation (2) à l'aide de la transformation de Laplace nous donne

$$c_n = \int_C z^{n-1} f(z)\,dz, \quad f(z) = z \exp\left\{-\int \frac{dz+e}{az^2+bz+c}\,dz\right\}$$

où le contour C doit être convenablement choisi.

Si l'on suppose que tous les nombres $\{c_n\}_0^\infty$ sont réels et si au lieu de la condition $\Delta_n \neq 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ on pose la condition plus restrictive $\Delta_n > 0$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ on retrouve la théorème de W. Hahn.

A titre d'exemple on démontre dans le cas géneral que l'identité

$$R_{n-1}(y) = \mathfrak{S}\left\{\frac{P_n(y)-P_n(z)}{y-z}\right\} \equiv \frac{c_0}{n} P_n'(y) \quad (n=1, 2, 3, \ldots)$$

n'est possible que pour les polynômes de Tchebycheff.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 229—248 Série mathématique

С. М. ЛОЗИНСКИЙ

О ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ИНТЕРПОЛЯЦИИ

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

В работе рассматривается вопрос о тригонометрической интерполяции и, наряду с другими результатами, доказывается сильная сходимость любой положительной степени интерполяционного полинома к интерполируемой функции при условии, что эта последняя не имеет разрывов второго рода.

В настоящей работе я имею в виду несколько обобщить и дополнить некоторые результаты Марцинкевича о тригонометрической интерполяции [1].

§ 1. В указанной статье Марцинкевич доказал следующую теорему: *если $S(x)$ есть тригонометрический полином порядка $\leqslant n$, то*

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|S(x_k)|^p \leqslant A_p\int_0^{2\pi}|S(x)|^p\,dx, \tag{1}$$

где

$$x_k = x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad \text{и} \quad 1 \leqslant p < +\infty.$$

Константа A_p зависит только от p. Докажем более общее предложение.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть функция $\varphi(u)$ определена при $u \geqslant 0$, выпукла и не убывает, причем $\varphi(0)=0$. Тогда для любого тригонометрического полинома $S(x)$ порядка $\leqslant n$ имеет место неравенство*

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi\{|S(x_k)|\} \leqslant \int_0^{2\pi}\varphi\{4|S(x)|\}\,dx. \tag{2}$$

Здесь числа x_k определены, как выше.

Доказательство. Пусть

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{3}$$

Положим

$$\sigma(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)(a_k\cos kx + b_k\sin kx). \tag{4}$$

Очевидно, что $\sigma(x)$ есть среднее Фейера (Fejér) порядка n для ряда Фурье от полинома $S(x)$, и таким образом

$$\sigma(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} S(x+t)\,K_n(t)\,dt, \tag{5}$$

где $K_n(t)$ есть ядро Фейера. Если $\overline{S}(x)$ есть тригонометрический полином, сопряженный с $S(x)$, то, как легко доказать (²), имеем

$$S(x)=\frac{\overline{S}'(x)}{n+1}+\sigma(x). \tag{6}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi[|S(x)|]\leqslant\varphi\left[\left|\frac{\overline{S}'(x)}{n+1}\right|+|\sigma(x)|\right]\leqslant\frac{1}{2}\varphi\left[2\left|\frac{\overline{S}'(x)}{n+1}\right|\right]+\frac{1}{2}\varphi[2|\sigma(x)|], \tag{7}$$

и значит

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi[|S(x_k)|]\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi\left[2\left|\frac{\overline{S}'(x_k)}{n+1}\right|\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi[2|\sigma(x_k)|]. \tag{8}$$

Очевидно, что

$$\overline{S}'(x)=\sum_{k=1}^{n}k(a_k\cos kx+b_k\sin kx)=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S(x+t)\{\cos t+2\cos 2t+\;\ldots\;+n\cos nt\}\,dt.$$

Но так как порядок тригонометрического полинома S не более n, то можно написать

$$\overline{S}'(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}S(x+t)\{\cos t+2\cos 2t+\;\ldots\;+n\cos nt+$$
$$+(n-1)\cos(n+1)t+\;\ldots\;+\cos(2n-1)t\}\,dt=$$
$$=\frac{2n}{\pi}\int_0^{2\pi}S(x+t)\cos nt\cdot K_{n-1}(t)\,dt,$$

где $K_{n-1}(t)$ есть ядро Фейера порядка $n-1$. Отсюда следует

$$\left|\frac{\overline{S}'(x)}{n+1}\right|\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(x+t)\cos nt|\,K_{n-1}(t)\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(x+t)|\,K_{n-1}(t)\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi}|S(t)|\,K_{n-1}(t-x)\,dt.$$

В силу неравенства Иенсена (Iensen)

$$\varphi\left[2\left|\frac{\overline{S}'(x)}{n+1}\right|\right]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(t)|]\,K_{n-1}(t-x)\,dt.$$

Очевидно, что при любом целом ν, $0\leqslant\nu\leqslant n$,

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\pi}K_\nu(x-x_k)\equiv 1,$$

и следовательно

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi\left[2\left|\frac{\overline{S}'(x_k)}{n+1}\right|\right]\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(t)|]K_{n-1}(t-x_k)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(t)|]\left\{\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\pi}K_{n-1}(t-x_k)\right\}dt=\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(t)|]\,dt. \qquad (9)$$

Точно так же из (5) получим

$$\varphi[2|\sigma(x)|]\leqslant\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi[2|S(x+t)|]K_n(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi[2|S(t)|]K_n(t-x)\,dt,$$

откуда следует

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi[2|\sigma(x_k)|]\leqslant\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi[2|S(t)|]K_n(t-x_k)\,dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\varphi[2|S(t)|]\,dt\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(t)|]\,dt. \qquad (10)$$

Из (8), (9) и (10) следует

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi[|S(x_k)|]\leqslant\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(t)|]\,dt,$$

что и требовалось доказать.

§ 2. Замечание. Полагая в теореме 1 $\varphi(u)=u^p$ $(p\geqslant 1)$, получим

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|S(x_k)|^p\leqslant 4^p\int_0^{2\pi}|S(x)|^p\,dx,$$

т. е. неравенство (1) с константой $A_p=4^p$. В цитированной работе Марцинкевича получено $A_p=\pi p+1$. Заметим, что из доказательства теоремы 1 следует, что

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|S(x_k)|\leqslant 3\int_0^{2\pi}|S(x)|\,dx. \qquad (11)$$

В самом деле, из полученных в процессе доказательства оценок видно, что

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}\varphi[|S(x_k)|]\leqslant\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi[2|S(x)|]\,dx+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi[4|S(x)|]\,dx.$$

Чтобы получить (11), надо положить здесь $\varphi(u)=u$.

Марцинкевич доказал также неравенство

$$\int_0^{2\pi} |S(x)|^p\,dx \leqslant B_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |S(x_k)|^p, \tag{12}$$

верное при $1 < p < +\infty$. Константа B_p зависит только от p. Это неравенство нам потребуется ниже.

§ 3. Пусть функция $f(x)$ задана и конечна на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$. Образуем интерполяционный тригонометрический полином

$$U_n(f;\,x) = \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{(2n+1)\sin\frac{x-x_k}{2}}, \tag{13}$$

совпадающий с $f(x)$ в точках x_k $(k=1,\,2,\,\ldots,\,2n+1)$. Марцинкевич доказал, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и $f(0)=f(2\pi)$, то

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f;\,x)|^p\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty \tag{14}$$

для любого $p > 0$. Докажем более сильную теорему:

ТЕОРЕМА 2. *Если функция $f(x)$ определена на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и не имеет там разрывов второго рода, то* (14) *верно при любом $p > 0$.*

ЛЕММА. *Если функция $f(x)$ имеет на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ ограниченную вариацию, то* (14) *верно при любом $p > 0$.*

Доказательство леммы. Известно, что существует константа $M > 0$ такая, что при всех $n,\,i,\,j$, где $1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1$, $i,\,j$ — целые, имеем

$$\left| \sum_{k=i}^{k=j} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{(2n+1)\sin\frac{x-x_k}{2}} \right| \leqslant M \quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi). \tag{15}$$

Поэтому, применяя трансформацию Абеля, убедимся в том, что если функция $f(x)$ имеет на $[0,\,2\pi]$ ограниченную вариацию, то

$$|U_n(f;\,x)| \leqslant C \quad (n=0,\,1,\,2,\,\ldots;\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi),$$

где константа C зависит от функции f. Но известно также, что если f ограниченной вариации, то

$$\lim_{n\to\infty} U_n(f;\,x) = f(x) \tag{16}$$

в каждой точке x, $0 < x < 2\pi$, в которой $f(x)$ непрерывна. Так как функция ограниченной вариации имеет не более чем исчислимое множество разрывов, то (16) имеет место почти везде на $[0,\,2\pi]$. Но теперь соотношение (14) следует из известной теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла.

Доказательство теоремы 2. Будем говорить, что функция $F(x)$ кусочно-постоянна на $[0, 2\pi]$, если она всюду конечна, и можно указать такое разбиение

$$\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_N = 2\pi$$

этого интервала, что $F(x) = F_i = \text{const}$ при $\alpha_{i-1} < x < \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как $f(x)$ по предположению не имеет на $[0, 2\pi]$ разрывов второго рода, то она ограничена на $[0, 2\pi]$ и можно (³) построить кусочно-постоянную на $[0, 2\pi]$ функцию $F(x)$ так, что

$$|f(x) - F(x)| < \varepsilon \quad \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 2\pi.$$

Функция $F(x)$ имеет ограниченную вариацию, а потому, фиксировав $p > 1$, имеем

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |F(x) - U_n(F; x)|^p \, dx = 0.$$

Имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f; x)|^p \, dx \leqslant 3^p \int_0^{2\pi} |f(x) - F(x)|^p \, dx +$$

$$+ 3^p \int_0^{2\pi} |F(x) - U_n(F; x)|^p \, dx + 3^p \int_0^{2\pi} |U_n(F; x) - U_n(f; x)|^p \, dx \leqslant$$

$$\leqslant 3^p \, 2\pi\varepsilon^p + o(1) + 3^p \int_0^{2\pi} |U_n(F - f; x)|^p \, dx. \tag{17}$$

Применяя неравенство (12), получим

$$\int_0^{2\pi} |U_n(F - f, x)|^p \, dx \leqslant B_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |U_n(F - f, x_k)|^p =$$

$$= B_p \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |F(x_k) - f(x_k)|^p < B_p 2\pi\varepsilon^p. \tag{18}$$

Из (17) и (18) получаем

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f; x)|^p \, dx \leqslant 3^p \, 2\pi\varepsilon^p + o(1) + 3^p B_p 2\pi\varepsilon^p.$$

Так как $\varepsilon > 0$ здесь произвольно мало, то верно (14), что и требовалось доказать.

§ 4. Пусть функция $f(x)$ суммируема на $[0, 2\pi]$,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

есть ее ряд Фурье,

$$s_n(x) = s_n(f; x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

есть n-ая частная сумма этого ряда. В теории рядов Фурье доказывается, что для любой функции $g(x)$, имеющей на $[0, 2\pi]$ ограниченную вариацию, имеет место предельное равенство

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} s_n(f;\,x)\,g(x)\,dx. \qquad (19)$$

Аналогично для интерполяционных полиномов $U_n(f;\,x)$ имеет место

ТЕОРЕМА 3. *Если функция $f(x)$ интегрируема (R) (в собственном смысле) на интервале $[0, 2\pi]$, а функция $g(x)$ имеет на том же интервале ограниченную вариацию, то*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} U_n(f;\,x)\,g(x)\,dx. \qquad (20)$$

Доказательство. Имеем

$$\int_0^{2\pi} U_n(f;\,x)\,g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{(2n+1)\sin\frac{x-x_k}{2}}\,g(x)\,dx =$$

$$= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k) \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{2\sin\frac{x-x_k}{2}}\,dx = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,s_n(g;\,x_k) =$$

$$= \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,g(x_k) + \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,[s_n(g;\,x_k) - g(x_k)].$$

Так как $f(x)$ и $g(x)$ обе интегрируемы (R) на $[0, 2\pi]$, то и $f(x)\,g(x)$ интегрируема (R) на $[0, 2\pi]$, а потому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,g(x_k) = \int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx.$$

Нам достаточно поэтому доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,[s_n(g;\,x_k) - g(x_k)] = 0. \qquad (21)$$

Функция $g(x)$, которую можно считать неубывающей, представима в виде

$$g(x) = G(x) + H(x),$$

где $H(x)$ непрерывна и ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, а $G(x)$ есть функция скачков для функции $g(x)$. Чтобы доказать (21), достаточно поэтому доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,[s_n(G;\,x_k) - G(x_k)] = 0, \qquad (22)$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,[s_n(H;\,x_k) - H(x_k)] = 0. \qquad (23)$$

Докажем сначала (23). Так как $H(x)$ имеет на $[0, 2\pi]$ ограниченную вариацию, то частные суммы ее ряда Фурье равномерно ограничены, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$|s_n(H;\,x)| \leqslant M \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant x \leqslant 2\pi).$$

Можно считать M настолько большим, что $|H(x)| \leqslant M$ и $|f(x)| \leqslant M$ при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Пусть даны произвольно числа ε и δ, однако пусть $0 < \delta < \pi$, $\varepsilon > 0$. На интервале $[\delta, 2\pi - \delta]$ ряд Фурье функции $H(x)$, как известно, равномерно сходится к этой функции, а потому при всех $n \geqslant n_0$ и $\delta \leqslant x \leqslant \leqslant 2\pi - \delta$ имеем

$$|s_n(H; x) - H(x)| < \varepsilon.$$

Поэтому при $n \geqslant n_0$

$$\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\,[s_n(H; x_k) - H(x_k)]\right| \leqslant \left|\frac{1}{2n+1}\sum_{0 \leqslant x_k < \delta}\right| + \left|\frac{1}{2n+1}\sum_{\delta \leqslant x_k \leqslant 2\pi - \delta}\right| + \left|\frac{1}{2n+1}\sum_{2\pi - \delta < x_k \leqslant 2\pi}\right| \leqslant \frac{(2n+1)\,\delta}{2\pi(2n+1)}\,2M^2 + \frac{1}{2n+1}(2n+1)\,M\varepsilon + \frac{2M^2}{2n+1}\left(\frac{2n+1}{2\pi}\,\delta + 1\right) \leqslant M^2\delta + M\varepsilon + \frac{2M^2}{2n+1}. \quad (24)$$

Так как числа $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ произвольно малы, то соотношение (23) доказано.

Функция $g(x)$ имеет на интервале $[0, 2\pi]$ не более чем исчислимое множество точек разрыва. В случае, если таких точек вовсе нет, то $G(x) \equiv 0$ и соотношение (22) очевидно. Предполагая, что $g(x)$ имеет точки разрыва, представим их себе занумерованными в последовательность, и пусть $G_p(x)$ есть функция скачков, образованная при помощи тех скачков, которые соответствуют первым p точкам этой последовательности [если $g(x)$ имеет лишь конечное число точек разрыва, то при $p \geqslant p_0$ имеем $G_p(x) \equiv G(x)$]. Полагая

$$V_p = \operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} G_p(x), \qquad V = \operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} G(x),$$

имеем

$$V_p \leqslant V \quad (p = 1, 2, 3, \ldots); \quad |G_p(x)| \leqslant V_p \leqslant V; \quad (25)$$

$$V - V_p = \operatorname*{var}_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} [G(x) - G_p(x)] \to 0 \quad \text{при } p \to \infty. \quad (26)$$

Кроме того функция $G(x) - G_p(x)$ есть неубывающая функция от x и

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} [G(x) - G_p(x)] = G(2\pi) - G_p(2\pi) = V - V_p. \quad (27)$$

Наконец, при любом фиксированном p функция $G_p(x)$ кусочно-постоянна, и

$$|s_n(G_p; x)| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} G_p(t)\,\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\right| = \left|\frac{1}{\pi}\,G_p(2\pi)\int_{\xi_x}^{2\pi}\frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt\right| \leqslant KV_p \leqslant KV, \quad (28)$$

где

$$K = \sup_{n,\alpha,\beta}\left|\frac{1}{\pi}\int_\alpha^\beta \frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}}\,dt\right| \quad (29)$$

есть абсолютная константа. Если функция $G_p(x)$ постоянна на интервале $\alpha < x < \beta$, то на всяком интервале $\alpha' \leqslant x \leqslant \beta'$ таком, что $\alpha < \alpha' < \beta' < \beta$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} s_n(G_p; x) = G_p(x)$$

равномерно относительно x. Принимая во внимание (25) и (27), докажем без труда, что при любом фиксированном p

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[s_n(G_p;\,x_k)-G_p(x_k)\right]=0$$

[доказательство совершенно подобно доказательству соотношения (23)]. Имеем еще

$$|s_n(G-G_p,\,x)|=\left|\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[G(t)-G_p(t)]\,\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-t}{2}}{2\sin\dfrac{x-t}{2}}\,dt\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}[G(2\pi)-G_p(2\pi)]\int_{\xi_x}^{2\pi}\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-t}{2}}{2\sin\dfrac{x-t}{2}}\,dt\right|\leqslant K(V-V_p),$$

где K определено через (29). Пусть дано $\varepsilon>0$. Выберем целое число p настолько большим, что $V-V_p<\varepsilon$; затем выберем n_0 так, что при $n\geqslant n_0$

$$\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[s_n(G_p;\,x_k)-G_p(x_k)\right]\right|<\varepsilon.$$

Тогда при $n\geqslant n_0$

$$\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[s_n(G;\,x_k)-G(x_k)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[s_n(G;\,x_k)-s_n(G_p;\,x_k)\right]\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[s_n(G_p;\,x_k)-G_p(x_k)\right]\right|+$$

$$+\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[G_p(x_k)-G(x_k)\right]\right|\leqslant$$

$$\leqslant\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}f(x_k)\left[s_n(G-G_p;\,x_k)\right]\right|+\varepsilon+$$

$$+\ \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|f(x_k)|\,(V-V_p)\leqslant$$

$$\leqslant\ \frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|f(x_k)|\,K\varepsilon+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1}|f(x_k)|\leqslant KM\varepsilon+\varepsilon+M\varepsilon$$

и (22) доказано, ввиду произвольной малости $\varepsilon>0$.

§ 5. В § 3 было доказано, что если функция $f(x)$ не имеет на интервале $[0,\,2\pi]$ разрывов второго рода, то для любого $p>0$ верно соотношение (14). Применяя неравенство Хольдера (Hölder), убедимся в том, что для любой функции $f(x)$, не имеющей на $[0,\,2\pi]$ разрывов второго

рода, и любой функции $g(x)$ из пространства L^q, $q>1$, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} U_n(f;x)\,g(x)\,dx=\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx \tag{30}$$

и даже

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} |f(x)-U_n(f;x)|\,|g(x)|\,dx=0. \tag{31}$$

Если $g(x)$ предположена только суммируемой, то мы не имеем права заключить, что верно соотношение (30) и тем более, что верно соотношение (31). Действительно, ниже будет доказано (теорема 5), что соотношение (30) не всегда имеет место, если f непрерывна, а g суммируема. Однако имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Пусть* $f(x)$ *не имеет на* $[0, 2\pi]$ *разрывов второго рода, а* $g(x)$ *измерима и такова, что* $|g(x)|\log^+|g(x)|$ *суммируема на* $[0, 2\pi]$. *Тогда имеет место предельное равенство* (30).

Доказательство. Пусть функции f и g удовлетворяют условиям теоремы. Тогда существует константа $K>0$, зависящая только от функции $g(x)$, такая, что ([4])

$$\int_0^{2\pi} |s_n(g;x)|\,dx\leqslant K \quad (n=1, 2, 3, \ldots). \tag{32}$$

Пусть дано $\varepsilon>0$; выберем кусочно-постоянную функцию $F(x)$ так, что

$$|f(x)-F(x)|<\varepsilon \text{ при } 0\leqslant x\leqslant 2\pi. \tag{33}$$

Функция $F(x)$ ограниченной вариации на $[0, 2\pi]$, а потому (ср. § 3, доказательство леммы) существует константа C такая, что

$$|U_n(F;x)|\leqslant C \quad (n=1, 2, \ldots;\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi). \tag{34}$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty} U_n(F;x)=F(x) \tag{35}$$

в каждой точке интервала $[0, 2\pi]$, где F непрерывна, т. е. почти везде, то из (34) и (35) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} |F(x)-U_n(F;x)|\,G(x)\,dx=0$$

для любой суммируемой функции $G(x)$; в частности,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} |F(x)-U_n(F;x)|\,|g(x)|\,dx=0.$$

Имеем

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\,g(x)\,dx-\int_0^{2\pi} U_n(f;x)\,g(x)\,dx\right|\leqslant\left|\int_0^{2\pi} fg\,dx-\int_0^{2\pi} Fg\,dx\right|+$$

$$+\left|\int_0^{2\pi} Fg\,dx-\int_0^{2\pi} U_n[F]\,g\,dx\right|+\left|\int_0^{2\pi} U_n[F]\,g\,dx-\int_0^{2\pi} U_n[f]\,g\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon\int_0^{2\pi} |g|\,dx+o(1)+\left|\int_0^{2\pi} U_n(F-f;x)\,g(x)\,dx\right|.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} U_n(F-f; x)\, g(x)\, dx = \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} [F(x_k) - f(x_k)]\, s_n(g; x_k),$$

и следовательно

$$\left| \int_0^{2\pi} U_n(F-f; x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |F(x_k) - f(x_k)|\, |s_n(g; x_k)| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |s_n(g; x_k)| \leqslant \varepsilon A \int_0^{2\pi} |s_n(g; x)|\, dx < \varepsilon K A,$$

где мы применим теорему Марцинкевича из § 1. Итак, принимая во внимание, что в силу (32)

$$\int_0^{2\pi} |g(x)|\, dx \leqslant K,$$

имеем

$$\left| \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx - \int_0^{2\pi} U_n(f; x)\, g(x)\, dx \right| \leqslant \varepsilon K + o(1) + \varepsilon K A.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то теорема доказана.

ТЕОРЕМА 5. *Существуют непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π и суммируемая функция $g(x)$ такие, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} U_n(f; x)\, g(x)\, dx \right| = +\infty. \tag{36}$$

Замечание. Можно доказать ([5]), что существует непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π и суммируемая функция $g(x)$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} s_n(f; x)\, g(x)\, dx \right| = +\infty,$$

где $s_n(f; x)$ есть n-ая частная сумма ряда Фурье функции f.

Доказательство теоремы 5. Пусть

$$M_n = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} \sum_{k=1}^{2n+1} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{x - x_k}{2}}{(2n+1) \sin \frac{x - x_k}{2}} \right|.$$

Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} M_n = +\infty$. Пусть $x = \xi_n$, $0 \leqslant \xi_n \leqslant 2\pi$ есть такая точка, что

$$\sum_{k=1}^{2n+1} \left| \frac{\sin (2n+1) \frac{\xi_n - x_k}{2}}{(2n+1) \sin \frac{\xi_n - x_k}{2}} \right| = M_n.$$

Определим функцию $f_n(x)$ так:

$$f_n(x_k) = \operatorname{sign} \frac{\sin (2n+1) \frac{\xi_n - x_k}{2}}{(2n+1) \sin \frac{\xi_n - x_k}{2}} \quad (k = 1, 2, \ldots, 2n+1),$$

$$f_n(0) = f_n(2\pi).$$

В интервалах $0 \leqslant x \leqslant x_1$, $x_1 \leqslant x \leqslant x_2, \ldots, x_{2n} \leqslant x \leqslant x_{2n+1}$ определим $f_n(x)$ линейно. Тогда $f_n(x)$ непрерывна, и $|f(x)| \leqslant 1$. Имеем

$$\sum_{k=1}^{2n+1} f_n(x_k) \frac{\sin(2n+1)\frac{\xi_n - x_k}{2}}{(2n+1)\sin\frac{\xi_n - x_k}{2}} = M_n,$$

т. е. $U_n(f_n; \xi_n) = M_n > 0$.

Пусть E_n есть интервал, лежащий на $[0, 2\pi]$, содержащий точку ξ_n и такой, что

$$U_n(f_n; x) \geqslant \frac{1}{2} M_n \text{ при } x \in E_n.$$

Пусть $|E_n|$ есть длина интервала $[0, 2\pi]$. Положим

$$g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{|E_n|} & \text{при } x \in E_n, \\ 0 & \text{при } x \overline{\in} E_n. \end{cases}$$

Тогда имеем

$$\int_0^{2\pi} U_n(f_n; x)\, g_n(x)\, dx = \int_{E_n} U_n(f_n; x)\, g_n(x)\, dx \geqslant |E_n| \frac{1}{2} M_n \frac{1}{|E_n|} = \frac{M_n}{2},$$

и следовательно $\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} U_n(f_n; x)\, g_n(x)\, dx \right| = +\infty$.

Но очевидно, что

$$F_n(g) = \int_0^{2\pi} U_n(f_n; x)\, g(x)\, dx$$

есть линейный функционал в пространстве L суммируемых функций, и мы имеем последовательность $\{g_n\}$ элементов пространства L и последовательность линейных функционалов $\{F_n(g)\}$, определенных в этом пространстве, такую, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |F_n(g_n)| = +\infty, \quad \|g_n\|_L = 1.$$

По известной теореме функционального анализа ([6]) существует элемент g пространства L такой, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |F_n(g)| = +\infty,$$

т. е. существует суммируемая функция $g(x)$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} U_n(f_n; x)\, g(x)\, dx \right| = +\infty. \tag{37}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{C}$ всех функций, непрерывных на $[0, 2\pi]$ и удовлетворяющих условию $f(0) = f(2\pi)$. При обычном определении сложения функций и умножения функции на число это есть линейное пространство функций. Нормируем его так:

$$\|f\|_{\widetilde{C}} = \max_{0 \leqslant x \leqslant 2\pi} |f(x)|.$$

При таком определении нормы, $\widetilde{C}$ есть пространство типа (B). Ясно, что

$$\Phi_n(f) = \int_0^{2\pi} U_n(f; x)\, g(x)\, dx$$

есть линейный функционал в пространстве $\tilde{C}$. В силу (37) и определения функций $f_n(x)$ мы имеем последовательность элементов $\{f_n\}$ из пространства $\tilde{C}$ и последовательность линейных функционалов $\{\Phi_n(f)\}$, определенных в этом пространстве, такую, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_n(f_n)| = +\infty \quad \|f_n\|_{\tilde{C}} \leqslant 1.$$

В силу теоремы функционального анализа, примененной выше, существует элемент f пространства $\tilde{C}$ такой, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_n(f)| = +\infty,$$

т. е. существуют непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π и суммируемая функция $g(x)$ такие, что верно (36), что и требовалось доказать.

§ 6. Марцинкевич в указанной выше статье доказал следующую теорему: *если функция* $f(x)$ *абсолютно непрерывна на интервале* $[0, 2\pi]$, $f(0) = f(2\pi)$ *и* $f'(x) \in L^p$ $(p > 1)$, *то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |U'_n(f; x) - f'(x)|^p dx = 0, \tag{38}$$

где $$U'_n(f; x) = \frac{d}{dx} U_n(f; x).$$

По аналогии с рядами Фурье следует ожидать, что при $p = 1$ эта теорема неверна; однако доказательства этого, насколько я знаю, до сих пор в литературе нет. В настоящем параграфе будет дано такое доказательство. Именно, имеет место

ТЕОРЕМА 6. *Существуют функции* $f(x)$ *и* $g(x)$, *имеющие период* 2π, *из которых первая абсолютно непрерывна, а вторая непрерывна, такие, что*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} U'_n(f; x)\, g(x)\, dx \right| = +\infty. \tag{39}$$

Замечание. В частности, существует следовательно абсолютно непрерывная функция $f(x)$ с периодом 2π такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \int_0^{2\pi} |U'_n(f; x)|\, dx = +\infty, \tag{40}$$

и следовательно теорема Марцинкевича при $p = 1$ не верна.

Доказательство теоремы 6. Рассмотрим функцию

$$\frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}. \tag{41}$$

Легко доказать, что существует константа $\alpha > 0$ такая, что

$$\operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \geqslant \alpha(2n+1)\log n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{42}$$

(построить график этой функции). Следовательно при любом t

$$\operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x-t}{2}}{\sin\frac{x-t}{2}} = \operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \geqslant \alpha(2n+1)\log n.$$

При $n=1, 2, 3, \ldots$, определим функцию $f_n(x)$ так:

$$f_n(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x=0,\ x_2^{(n)}\leqslant x\leqslant 2\pi, \\ 1 & \text{при } x=x_1^{(n)}=\frac{2\pi}{2n+1}, \\ \text{линейна} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant x_1^{(n)} \text{ и } x_1^{(n)}\leqslant x\leqslant x_2^{(n)}. \end{cases}$$

Рассмотрим множество $\widetilde{A}$ всех функций $f(x)$, абсолютно непрерывных на интервале $[0, 2\pi]$, удовлетворяющих условию $f(0)=f(2\pi)$. При обычном определении сложения функций и умножения функции на число это есть линейное пространство функций. Нормируем его, введя норму

$$\|f\|_{\widetilde{A}}=|f(0)|+\operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} f(x).$$

При таком определении нормы, $\widetilde{A}$ есть пространство типа (B). Ясно, что определенные нами функции $f_n(x)$ $(n=1, 2, \ldots,)$ принадлежат пространству $\widetilde{A}$ и

$$\|f_n\|_{\widetilde{A}}=2. \tag{43}$$

Очевидно имеем

$$U_n(f_n; x)=\sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k)\frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_k}{2}}{(2n+1)\sin\frac{x-x_k}{2}}=\frac{\sin(2n+1)\frac{x-x_1^{(n)}}{2}}{(2n+1)\sin\frac{x-x_2^{(n)}}{2}}.$$

Ясно, что

$$\int_0^{2\pi}|U_n'(f_n; x)|\,dx=\operatorname*{var}_{0\leqslant x\leqslant 2\pi} U_n(f_n; x)\geqslant\frac{\alpha(2n+1)\log n}{2n+1}=\alpha\log n.$$

Очевидно, что при $n=1, 2, 3, \ldots$, можно найти функцию $g_n(x)$ из пространства $\widetilde{C}$ так, что

$$\int_0^{2\pi} U_n'(f_n; x)\, g_n(x)\,dx\geqslant\frac{\alpha}{2}\log n \quad \|g_n\|_{\widetilde{C}}\leqslant 1, \tag{44}$$

и значит

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^{2\pi} U_n'(f_n; x)\, g_n(x)\,dx\right|=+\infty. \tag{45}$$

Но очевидно, что

$$F_n(g)=\int_0^{2\pi} U_n'(f_n; x)\, g(x)\,dx$$

есть линейный функционал в пространстве $\widetilde{C}$ и из (44) следует, что существует последовательность $\{g_n\}$ элементов пространства $\widetilde{C}$ и после-

довательность линейных функционалов $F_n(g)$, определенных в этом пространстве, такие, что

$$\|g_n\|_{\widetilde{C}} \leqslant 1 \quad \lim_{n\to\infty} |F_n(g_n)| = +\infty.$$

Следовательно существует элемент $g \in \widetilde{C}$ такой, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} |F_n(g)| = +\infty,$$

т. е. существует функция $g(x)$, непрерывная с периодом 2π, такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} U'_n(f_n; x)\, g(x)\, dx \right| = +\infty. \tag{46}$$

Но ясно, что

$$\Phi_n(f) = \int_0^{2\pi} U'_n(f; x)\, g(x)\, dx$$

есть линейный функционал в пространстве $\widetilde{A}$, и из (43) и (46) следует, что существует последовательность элементов $f_n \in \widetilde{A}$ и последовательность линейных функционалов $\Phi_n(f)$, определенных в этом пространстве, такие, что

$$\|f_n\|_{\widetilde{A}} \leqslant 2, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}} |\Phi_n(f_n)| = +\infty.$$

Значит существует элемент $f \in \widetilde{A}$ такой, что $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |F_n(f)| = +\infty$, т. е. существует абсолютно непрерывная функция $f(x)$, имеющая период 2π, такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \int_0^{2\pi} U'_n(f; x)\, g(x)\, dx \right| = +\infty.$$

Теорема доказана.

§ 7. Пусть функция $f(x)$ определена и конечна на интервале $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ и интерполяционный полином $U_n(f; x)$ имеет вид

$$U_n(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{n} (a_\nu^{(n)} \cos \nu x + b_\nu^{(n)} \sin \nu x). \tag{47}$$

Образуем, следуя Марцинкевичу, полиномы*

$$U_{n,i}(f; x) = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{\nu=1}^{i} (a_\nu^{(n)} \cos \nu x + b_\nu^{(n)} \sin \nu x), \tag{48}$$

$$V_n(f; x) = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} U_{n,i}(f; x). \tag{49}$$

Полином $V_n(f; x)$ имеет вид

$$V_n(f; x) = \frac{1}{(n+1)(2n+1)} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k) \left[\frac{\sin (n+1) \frac{x - x_k}{2}}{\sin \frac{x - x_k}{2}} \right]^2 =$$

* Полиномы $V_n(f; x)$ ранее Марцинкевича рассматривал С. Н. Бернштейн.

$$= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k) K_n(x - x_k), \tag{50}$$

где $K_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left[\frac{\sin (n+1) \frac{u}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right]^2$ есть ядро Фейера.

Полиномы $V_n(f; x)$ сходятся к $f(x)$ гораздо лучше, чем полиномы $U_n(f; x)$. Поэтому неудивительно, что имеет место

ТЕОРЕМА 7. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на интервале $[0, 2\pi]$, удовлетворяет условию $f(0) = f(2\pi)$ и если $f'(x) \in L^p$ $(p > 1)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} | f'(x) - V'_n(f; x) |^p dx = 0. \tag{51}$$

Эта теорема представляет мало интереса, ибо при ее предположениях имеет место доказанное Марцинкевичем соотношение (38). Поэтому доказательства теоремы 7 я приводить не буду.

Представляется весьма интересным знать, верна ли теорема 7 при $p = 1$, т. е. верно ли, что для любой функции $f(x)$, абсолютно непрерывной на $[0, 2\pi]$ и удовлетворяющей условию $f(0) = f(2\pi)$, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} | f'(x) - V'_n(f; x) | dx = 0. \tag{52}$$

Этого вопроса мне решить не удалось. Однако верен несколько более слабый результат.

ТЕОРЕМА 8. *Если функция $f(x)$ на интервале $[0, 2\pi]$ абсолютно непрерывна, удовлетворяет условию $f(0) = f(2\pi)$ и если $| f'(x) | \log^+ | f'(x) |$ суммируема, то верно соотношение* (52).

Доказательство теоремы 8 весьма похоже на доказательство теоремы Марцинкевича, приведенной в начале § 6. Нам потребуются следующие четыре леммы (ср. работу Марцинкевича).

ЛЕММА 1. *Пусть функция $g(x)$ измерима на $[0, 2\pi]$ и $| g(x) | \log^+ | g(x) |$ суммируема; пусть*

$$\sigma[g] = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

есть ряд Фурье функции $g(x)$. Положим

$$S_{i,j}(g, x) = \sum_{\nu=i+1}^{j} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x),$$

$$\overline{S}_{i,j}(g, x) = \sum_{\nu=i+1}^{j} (-b_\nu \cos \nu x + a_\nu \sin \nu x).$$

Тогда

$$\int_0^{2\pi} |S_{i,j}(g; x)|\,dx \leqslant A\int_0^{2\pi} |g(x)|\log^+|g(x)|\,dx + B,$$

$$\int_0^{2\pi} |\overline{S}_{i,j}(g; x)|\,dx \leqslant A\int_0^{2\pi} |g(x)|\log^+|g(x)|\,dx + B,$$

где A и B суть абсолютные константы.

Доказательство леммы 1 следует без труда из некоторых неравенств в книге Зигмунда ([4]), гл. VII.

ЛЕММА 2. *Если $f(x)$ абсолютно непрерывна на интервале* $[0, 2\pi]$, $f(0)=f(2\pi)$ и $|f'(x)|\log^+|f'(x)|$ *суммируема, то*

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(f; x)|\,dx \leqslant \frac{1}{n}\left\{A\int_0^{2\pi} |f'|\log^+|f'|\,dx + B\right\}, \tag{53}$$

где A и B суть константы из леммы 1.

Доказательство. Легко доказать (см. работу Марцинкевича), что

$$f(x) - s_n(f; x) = \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{-\overline{S}_{n,\nu}(f'; x)}{\nu(\nu+1)}.$$

Отсюда

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(f; x)|\,dx \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \frac{1}{\nu(\nu+1)} \int_0^{2\pi} |\overline{S}_{n,\nu}(f'; x)|\,dx.$$

Теперь результат следует из леммы 1.

ЛЕММА 3 (Зигмунд). *Если $S_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка n, а $S'_n(x)$ — его производная, то*

$$\int_0^{2\pi} |S'_n(x)|\,dx \leqslant n\int_0^{2\pi} |S_n(x)|\,dx. \tag{54}$$

Доказательство см. в работе Зигмунда ([7]).

ЛЕММА 4 (Марцинкевич). *Если $h(t)$ абсолютно непрерывна на* $[0, 2\pi]$, $h(0)=h(2\pi)$, *то*

$$\frac{2\pi}{2n+1}\sum_{k=1}^{2n+1} |h(x_k)| \leqslant \int_0^{2\pi} |h(t)|\,dt + \frac{C}{n}\int_0^{2\pi} |h'(t)|\,dt. \tag{55}$$

Доказательство см. ([1]); C — абсолютная константа.

Доказательство теоремы 8. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем $N > 0$ так, что $\frac{B}{N} < \varepsilon$. Применяя неравенство (53) к функции $Nf(x)$, получим

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(f; x)|\,dx \leqslant \frac{1}{n}\left\{A\int_0^{2\pi} |f'(x)|\log^+ N|f'(x)|\,dx + \frac{B}{N}\right\} <$$

$$< \frac{1}{n}\left\{A\int_0^{2\pi} |f'(x)|\log^+ N|f'(x)|\,dx + \varepsilon\right\}. \tag{56}$$

Применяя леммы 3, 4 и неравенство (56), получим

$$\int_0^{2\pi} |V'_n(f - s_n[f];\ x)|\,dx \leqslant n \int_0^{2\pi} |V_n(f - s_n[f];\ x)|\,dx \leqslant$$

$$\leqslant n \int_0^{2\pi} \left\{\frac{2}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |f(x_k) - s_n(f;\ x_k)|\, K_n(x - x_k)\right\} dx =$$

$$= n\,\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |f(x_k) - s_n(f;\ x_k)| \leqslant n \int_0^{2\pi} |f(x) - s_n(f;\ x)|\,dx +$$

$$+ n\,\frac{C}{n} \int_0^{2\pi} |f'(t) - s'_n(f;\ t)|\,dt \leqslant A \int_0^{2\pi} |f'(t)| \log^+ N |f'(t)|\,dt + \varepsilon + o(1), \quad (57)$$

ибо $\int_0^{2\pi} |f'(t) - s'_n(f;\ t)|\,dt \to 0$ по известной теореме из теории рядов Фурье. Наконец, в силу неравенства $\log^+ ab \leqslant \log^+ a + \log^+ b$ $(a \geqslant 0, b \geqslant 0)$ следует

$$\int_0^{2\pi} |V'_n(f - s_n[f];\ x)|\,dx \leqslant A \log^+ N \int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx + A \int_0^{2\pi} |f'| \log^+ |f'|\,dx +$$

$$+ \varepsilon + o(1) \leqslant AN \int_0^{2\pi} |f'(x)|\,dx + A \int_0^{2\pi} |f'(x)| \log^+ |f'(x)|\,dx + \varepsilon + o(1). \quad (58)$$

Положим теперь $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где $f_1(x)$ есть тригонометрический полином, а функция $f_2(x)$ такова, что

$$\int_0^{2\pi} |f'_2(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{N}, \quad \int_0^{2\pi} |f'_2(x)| \log^+ |f'_2(x)|\,dx < \varepsilon$$

(как известно, это возможно). Неравенство (58) применимо к любой функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 8. Но функция $f_2(x)$ тоже очевидно удовлетворяет этим условиям, а потому

$$\int_0^{2\pi} |V'_n(f_2 - s_n[f_2];\ x)|\,dx \leqslant \varepsilon + 2A\varepsilon + o(1) = (2A + 1)\,\varepsilon + o(1). \quad (59)$$

Но очевидно, что, при всех достаточно больших n, $s_n[f_1] \equiv f_1$, а потому

$$\int_0^{2\pi} |V'_n(f_1 - s_n[f_1];\ x)|\,dx \to 0. \quad (60)$$

Из (59) и (60) следует

$$\int_0^{2\pi} |V'_n(f - s_n[f];\ x)|\,dx \leqslant (2A + 1)\,\varepsilon + o(1). \quad (61)$$

Наконец, ясно, что

$$V_n(s_n[f];\ x) = \frac{s_0(f;\ x) + s_1(f;\ x) + \ldots + s_n(f;\ x)}{n+1} = \sigma_n(f;\ x), \quad (62)$$

где $\sigma_n(f; x)$ есть среднее Фейера ряда Фурье функции $f(x)$. Известно, что при сделанных предположениях

$$\int_0^{2\pi} |\sigma'_n(f; x) - f'(x)|\, dx \to 0. \tag{63}$$

Из (61), (62) и (63) получаем

$$\int_0^{2\pi} |V'_n(f; x) - f'(x)|\, dx \leqslant \int_0^{2\pi} |V'_n(f - s_n[f]; x)|\, dx +$$

$$+ \int_0^{2\pi} |V'_n(s_n[f]; x) - f'(x)|\, dx \leqslant (2A+1)\varepsilon + o(1) + \int_0^{2\pi} |\sigma'_n(f; x) - f'(x)|\, dx =$$

$$= (2A+1)\varepsilon + o(1).$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно мало, то теорема доказана.

Примечание при корректуре. После того как настоящая работа была уже отправлена в издательство и поступила в набор, я убедился, что теоремы 2, 3 и 4 могут быть усилены. В частности, результат теоремы 2 верен в предположении, что $f(x)$ ограничена и интегрируема (R) на интервале $[0, 2\pi]$. Кроме того мне удалось доказать, что теорема 7 верна при $p=1$ (и теорема 8, таким образом, оказывается излишней). Этим решен вопрос, поставленный в настоящей работе.

Институт математики и механики
при Ленингр. гос. университете.

Поступило
20. I. 1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marcinkiewicz I., Sur l'interpolation, Studia Mathem., **6** (1936), 1—17, 67—81.
[2] Fejér L., Über konjugierte trigonometrische Reihen, Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., **144** (1914), 48—56.
[3] Hahn H., Über das Interpolationsproblem, Mathem. Zeitschr., **1** (1918), 115—142.
[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, пер. с англ., 1939.
[5] Лозинский С. М., О сингулярных интегралах, Матем. сборн., **7 (49)** : 2 (1940).
[6] Banach St., Théorie des opérations linéaires, 1932 (p. 80, théor. 5).
[7] Zygmund A., A remark on conjugate series, Proc. Lond. Mathem. Soc., **34** (1932), 392—400.

S. LOZINSKI. ÜBER TRIGONOMETRISCHE INTERPOLATION

ZUSAMMENFASSUNG

1. In der vorliegenden Arbeit werden die folgenden Sätze bewiesen.

SATZ 1. *Es sei die Funktion* $\varphi(u)$ *für* $u \geqslant 0$ *definiert, konvex und nicht abnehmend; dabei sei* $\varphi(0) = 0$. *Ferner sei*

$$x_k = x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots, 2n+1). \tag{1}$$

Dann gilt für jedes trigonometrische Polynom $S(x)$ *von der Ordnung* $\leqslant n$ *die Ungleichung*

$$\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} \varphi[|S(x_k)|] \leqslant \int_0^{2\pi} \varphi[4|S(x)|]\, dx. \tag{2}$$

Bemerkung. Setzt man hier $\varphi(u) = u^p$ $(p \geqslant 1)$, so erhält man

$$\frac{2\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{2n+1} |S(x_k)|^p \leqslant 4^p \int_0^{2\pi} |S(x)|^p\, dx. \tag{3}$$

Die Ungleichung (3) (mit $A_p = \pi p + 1$ statt 4^p auf der rechten Seite) wurde von Marcinkiewicz bewiesen (¹).

2. Es sei die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0, 2\pi]$ definiert und endlich. Bilden wir das trigonometrische Interpolationspolynom

$$U_n(f;\, x) = \sum_{k=1}^{2n+1} f(x_k) \frac{\sin (2n+1) \dfrac{x - x_k}{2}}{(2n+1) \sin \dfrac{x - x_k}{2}}, \tag{4}$$

welches mit $f(x)$ in den Punkten $x_k = x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1}$ zusammenfällt. Dann gilt der folgende

SATZ 2. *Wenn die Funktion* $f(x)$ *auf dem Intervall* $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ *endlich ist und daselbst keine Unstetigkeitsstellen zweiter Art besitzt, so gilt für jedes* $p > 0$ *die Limesgleichung*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} |f(x) - U_n(f;\, x)|^p \, dx = 0. \tag{5}$$

Bemerkung. Im Falle, wenn $f(x)$ auf $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ stetig ist und der Bedingung $f(0) = f(2\pi)$ genügt, wurde die Relation (5) von Marcinkiewicz (¹) bewiesen.

Der Beweis des Satzes 2 wird so geführt. Ist $f(x)$ auf $[0, 2\pi]$ von beschränkter Variation, so sind die $U_n(f;\, x)$ für alle n und x gleichmässig beschränkt. In jedem Stetigkeitspunkte $\bar{x}$ $(0 < \bar{x} < 2\pi)$ von $f(x)$ hat man aber bekanntlich $U_n(f;\, \bar{x}) \to f(\bar{x})$.

Daraus folgt unter Anwendung eines bekannten Satzes von Lebesgue die Relation (5). Im allgemeinen Falle kann man zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $F(x)$ von beschränkter Variation derart finden, so dass $|f(x) - F(x)| < \varepsilon$ für $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ gilt. Daraus folgt unter Anwendung einer bekannten Ungleichung von Marcinkiewicz (¹) die Relation (5) für $p > 1$.

SATZ 3. *Die Funktion* $f(x)$ *sei auf dem Intervall* $[0, 2\pi]$ (R)*-integrabel (im eigentlichen Sinne) und die Funktion* $g(x)$ *habe daselbst eine beschränkte Variation. Dann hat man*

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^{2\pi} U_n(f;\, x)\, g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, dx. \tag{6}$$

SATZ 4. *Die Funktion* $f(x)$ *sei auf* $[0, 2\pi]$ *endlich und habe daselbst keine Unstetigkeitsstellen zweiter Art. Die Funktion* $g(x)$ *sei auf* $[0, 2\pi]$ *messbar und* $|g(x)| \log^+ |g(x)|$ *sei summierbar. Dann gilt die Limesgleichung* (6).

SATZ 5. *Es existiert eine stetige,* 2π*-periodische Funktion* $f(x)$ *und eine summierbare Funktion* $g(x)$ *solcher Art, dass*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \int_0^{2\pi} U_n(f;\, x)\, g(x)\, dx = +\infty. \tag{7}$$

3. Marcinkiewicz bewies ([1]) den folgenden Satz: es sei die Funktion $f(x)$ auf dem Intervall $[0,2\pi]$ absolut stetig, $f(0)=f(2\pi)$ und es sei $|f'(x)|^p$ summierbar $(p>1)$; dann hat man

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|U_n'(f;\,x)-f'(x)|^p\,dx=0, \tag{8}$$

wo $U_n'(f;\,x)=\frac{d}{dx}U_n(f;\,x)$.

Wir beweisen, dass die Relation (8) nicht für $p=1$ zu gelten braucht. Es gilt nämlich der

SATZ 6. *Es existiert eine absolut stetige, 2π-periodische Funktion $f(x)$ und eine stetige, 2π-periodische Funktion $g(x)$, so dass*

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|\int_0^{2\pi}U_n'(f;\,x)\,g(x)\,dx\right|=+\infty.$$

4. Das oben definierte Interpolationspolynom $U_n(f;\,x)$ sei

$$U_n(f;\,x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x).$$

Setzen wir

$$U_{n,i}(f;\,x)=\frac{a_0^{(n)}}{2}+\sum_{\nu=1}^{i}(a_\nu^{(n)}\cos\nu x+b_\nu^{(n)}\sin\nu x)$$

und

$$V_n(f;\,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}U_{n,i}(f;\,x).$$

Dann gelten die Sätze:

SATZ 7. *Es sei $f(x)$ auf dem Intervall $[0,2\pi]$ absolut stetig, $f(0)=f(2\pi)$ und es sei $|f'(x)|^p$ summierbar $(p>1)$. Dann hat man*

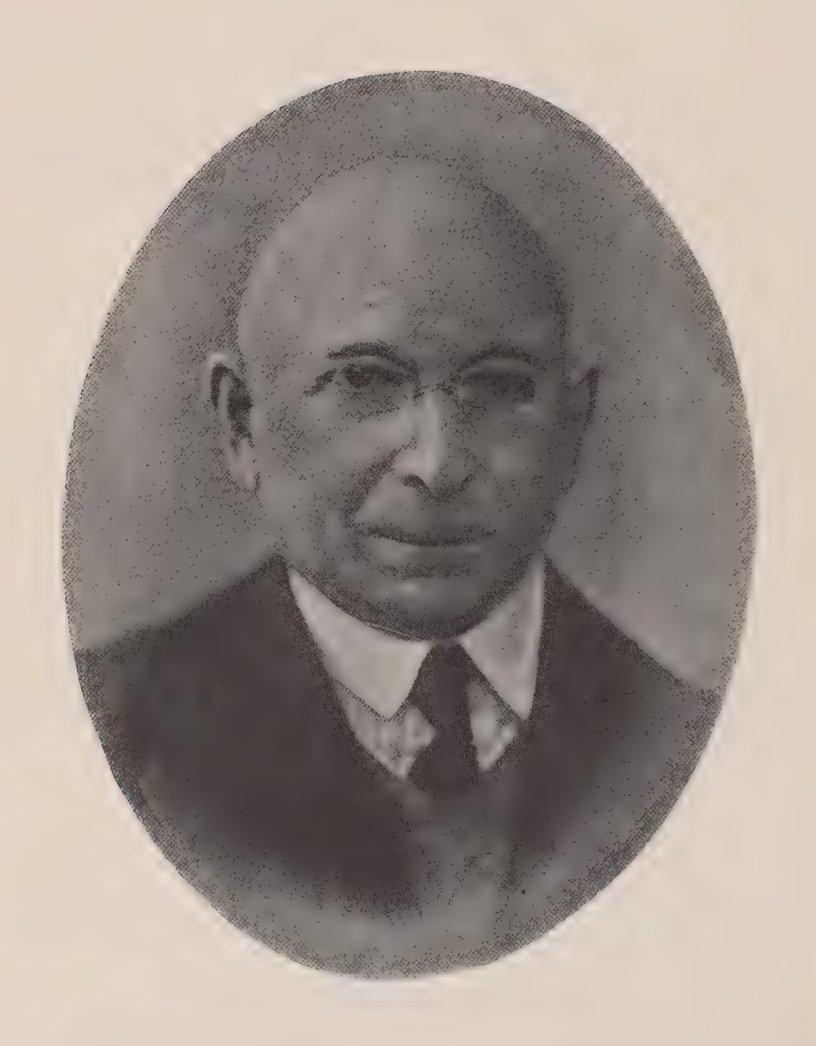
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|V_n'(f;\,x)-f'(x)|^p\,dx=0,$$

wo $V_n'(f;\,x)=\frac{d}{dx}V_n(f;\,x)$.

SATZ 8. *Es sei $f(x)$ auf dem Intervall $[0,2\pi]$ absolut stetig, $f(0)=f(2\pi)$ und es sei $|f_1'(x)|\log^+|f'(x)|$ summierbar. Dann hat man*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi}|V_n'(f;\,x)-f'(x)|\,dx=0.$$

Anmerkung bei der Korrektur. Als die vorliegende Arbeit sich schon im Druck befand, habe ich festgestellt, dass die Sätze 2, 3 und 4 verschärft sein können. Z. B. gilt die Behauptung von Satz 2 schon für jede beschränkte und (R)-integrable Funktion $f(x)$. Ausserdem habe ich bewiesen, dass der Satz 7 auch für $p=1$ richtig ist (der Satz 8 ist also unnötig). Damit wird die in der Arbeit gestellte Frage beantwortet.



ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 249—260 Série mathématique

В. Л. ГОНЧАРОВ и А. Н. КОЛМОГОРОВ

К ШЕСТИДЕСЯТИЛЕТИЮ СЕРГЕЯ НАТАНОВИЧА БЕРНШТЕЙНА

В марте этого года исполнилось шестьдесят лет со дня рождения одного из крупнейших советских ученых, академика Сергея Натановича Бернштейна.

Творчество Сергея Натановича можно рассматривать как продукт счастливого соединения широко воспринятого воздействия французской школы (Пикар, Адамар, Валле-Пуссен) с традициями знаменитых русских математиков—Чебышева, Маркова, Ляпунова. В основе его творчества лежит непоколебимое убеждение в том, что математический метод призван пронизать насквозь современное естествознание. «В наши дни все математики и физики согласны, что область применимости математики не имеет пределов, отличных от пределов самого знания»—такими словами начинается изложение первой, юношеской, работы Сергея Натановича (1903 г.), в которой дано решение одной из знаменитых «математических проблем», выдвинутых Д. Гильбертом на Парижском математическом конгрессе 1900 г., именно—доказательство аналитичности всех интегралов дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Уже в этой работе заметны характерные собственные концепции Сергея Натановича в отношении основных задач, стоящих перед анализом и теорией функций.

В теснейшем соответствии с детерминистическим принципом, руководящим нами при изучении явлений природы, стоит аналитическая функция; можно даже сказать, что она оказывается подлинным математическим выражением этого принципа. Поэтому понятие аналитической функции становится главнейшим объектом математического естествознания: интерес сосредоточивается на том, как отграничить функции, способные быть однозначно «продолжаемыми», от тех, которые этим свойством не обладают. Лишь первые действительно полезны; но исследователь должен изучить те и другие, чтобы исчерпать все их взаимоотношения. В классическую, хотя и неустойчивую, идею аналитической функции, естественно выступающую теперь на первый план, вносятся новые нюансы и коррективы: с помощью новых критериев аналитичности устанавливается возможность элиминировать, как несущественный атрибут, комплексную плоскость независимой переменной; вводятся новые «квази-аналитические» классы функций; рассматриваются такие типы дифференциальных уравнений, интегралы которых могут быть продолжаемы лишь однозначно. Общее понятие функ-

ции строится на широкой базе равномерного предельного перехода от простейших аналитических функций—рациональных полиномов. Теорема Вейерштрасса точно характеризует класс функций, которые могут быть получены подобным способом в действительной области: это—функции непрерывные.

Далее возникает единая классификационная схема, в основу которой положена быстрота сходимости последовательности приближающих полиномов, причем, как оказывается, возникающая классификация тесно связана с дифференциальными свойствами или аналитической природой изображаемой функции. Среди последовательностей полиномов, сходящихся к данной функции, существенно выбрать ту, которая сходится быстрее всех других: отсюда—естественный переход к «экстремальным» проблемам наилучшего приближения. Вслед за целыми рациональными функциями в качестве конструктивного элемента и объекта исследования вступают также и простейшие трансцендентные—целые функции конечных порядков. Вместе с тем, наряду с равномерной сходимостью, в общий круговорот идей вовлекаются и иные типы сходимости, какова, например, сходимость в среднем (квадратическая); отсюда—переход к «ортогональным полиномам» Чебышева и рядам, по ним расположенным.

Если в первые годы научной деятельности детерминистический принцип служит для Сергея Натановича путеводной нитью, то с тем большим вниманием он обращается позднее к учению о недетерминированных явлениях—теории вероятностей, причем впервые осуществляет попытку солидного аксиоматического обоснования этой теории. Здесь, как и в других случаях, Сергей Натанович остается противником праздной игры ума и, обращаясь к статистическим и биологическим приложениям, ищет выводов, которые свидетельствовали бы в пользу детерминистического тезиса: так возникают его капитальные работы, относящиеся к закону больших чисел и другим предельным предложениям теории вероятностей.

Необходимо отметить, что основные линии, по которым движется мысль Сергея Натановича—теория функций, дифференциальные уравнения эллиптического типа, теория вероятностей,—не только связаны между собою органически, но и развиваются в тесном взаимном проникновении: достаточно напомнить хотя бы о «многочленах Бернштейна» и о доказательстве теоремы Вейерштрасса, связанном с теорией вероятностей. Нельзя также не упомянуть об одной черте, характерной для всего творчества Сергея Натановича: это—предпочтение, отдаваемое конкретно поставленным проблемам высокой степени трудности перед близко лежащими и естественно возникающими обобщениями. Преодолевая препятствия, встречающиеся на избранном им пути наибольшего сопротивления, Сергей Натанович иной раз намного опережает своих современников и захватывает в своих исследованиях обширные области, планомерное освоение которых принадлежит будущему.

В дальнейшем мы остановимся на важнейших внешних этапах научной и общественной деятельности Сергея Натановича.

По окончании средней школы в 1898 г., в возрасте восемнадцати лет, Сергей Натанович уехал за границу, в Париж, уже успев установить свое призвание к научной работе в области математики. В 1903 г. он закончил свою первую блестящую работу, которую в следующем году защитил в качестве диссертации на степень docteur-ès-sciences и тогда же опубликовал в *Mathematische Annalen*; в ней разрешена в положительном смысле уже упоминавшаяся 19-я проблема Гильберта—«являются ли аналитическими решения регулярных задач * вариационного исчисления?». Как указывает Сергей Натанович в предисловии к этой работе, при выполнении ее он был «вдохновляем в равной степени Пикаром и Гильбертом: первым—в отношении средств, вторым—в отношении цели».

После непродолжительного пребывания в Геттингене Сергей Натанович возвратился в Россию, в 1906 г. закончил сдачу магистерских экзаменов в Петербурге и затем (в 1908 г.) переехал в Харьков, приняв приват-доцентуру в Харьковском университете. Последовали защиты двух диссертаций: в 1908 г. магистерской, в 1913 г.—докторской. Первая из них, посвященная уравнениям эллиптического типа, помимо ранее полученных результатов, содержала решение 20-й проблемы Гильберта, касающейся вопроса о существовании интеграла эллиптического уравнения при заданных граничных значениях на контуре области, т. е. обобщенной проблемы Дирихле. Вторая диссертация на тему «О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени» объединила различные результаты первостепенной важности, полученные Сергеем Натановичем на протяжении нескольких предшествующих лет; сюда относятся исследования о порядке наилучшего приближения, которые незадолго до того заслужили премию Бельгийской академии наук и затем были изложены Сергеем Натановичем на Международном конгрессе в Кембридже (1912 г.). В частности укажем на ряд основных предложений, устанавливающих зависимость между порядком наилучшего приближения $E_n f(x)$ и дифференциальной природой функции** (существование и непрерывность последовательных производных, условия Липшица различных порядков), или же—в случае аналитической функции—расположением и свойствами ее особенных точек. Кроме того, отметим очень тонкую оценку наилучшего приближения*** $|x|$ и важный результат, касающийся полноты системы степеней x на конечном промежутке (обобщение теоремы Вейерштрасса).

До революции Сергей Натанович был лишен возможности широко развернуть свою учебно-педагогическую деятельность (лишь в 1917 г. он был избран профессором в Харьковском университете); но научные заслуги

* Под регулярной задачей вариационного исчисления понимается нахождение минимума интеграла $\iint F(p, q, z, x, y)\, dx\, dy$, где F — аналитическая функция, $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$ и $F''_{pp}F''_{qq}-(F''_{pq})^2>0$. Уравнение Лагранжа в случае регулярной задачи — эллиптического типа.

** Эти результаты примерно в те же годы были дополнены Е. Джэксоном.

*** См. также относящиеся к обобщению этого вопроса недавние работы 1938 г.

его не могли не получить всеобщего признания, и в предвоенные годы его имя было уже широко известно и внушало исключительное уважение как в ученых кругах, так и среди студенчества.

Накануне войны 1914 г. в *Mathematische Annalen* появляется замечательный мемуар Сергея Натановича «Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle», в котором изложена его концепция аналитической функции и, между прочим, впервые вводятся квазианалитические классы в действительной области. В годы войны и в последовавший за ними революционный период интересы Сергея Натановича направляются преимущественно в сторону теории вероятностей. Его работы этого периода представляют собой блестящее завершение исследований Чебышева, Маркова и Ляпунова по предельным теоремам для сумм случайных величин. Доказательство основной предельной теоремы для случая независимых величин получает такую общность, что наложенные при этом ограничения оказываются по существу теми самыми, которые впоследствии были установлены (В. Феллером) в качестве не только необходимых, но и достаточных. Впервые дается строгое доказательство двумерной предельной теоремы, что позволяет обосновать применимость к ряду вопросов естествознания теории нормальной корреляции; сам Сергей Натанович, исходя отсюда, установил важный и неожиданный для биологов факт, что законы наследования количественных признаков Гальтона не противоречат гипотезе Менделя, а, наоборот, вытекают из нее при естественных предположениях. Устанавливаются также крайне широкие условия, при которых предельная теорема сохраняется для рядов зависимых величин. К этим фундаментальным результатам Сергей Натанович присоединяет остроумные и тонкие решения множества более частных проблем теории вероятностей и математической статистики.

В 1923 г., по приглашению Парижского университета, Сергей Натанович прочел курс лекций в Сорбонне, посвященный экстремальным свойствам и наилучшему приближению аналитических функций. Этот курс был опубликован в 1926 г. в виде монографии в коллекции Бореля и заслужил премию Парижской Академии наук*; новым существенным вкладом, в нем содержащимся, является исследование приближения функций действительного переменного на бесконечном промежутке и исследование наилучшего приближения аналитических функций, имеющих существенную особенность.

Среди научных работ Сергея Натановича, написанных им в последующие годы, нужно указать на выдающийся по новизне идей мемуар об абсолютно-монотонных функциях (*Acta Mathematica*, 1928), ряд статей и доклад на Болонском конгрессе 1928 г. о регулярно-монотонных функциях и цикл лекций по ортогональным полиномам, прочитанный в 1929 г. в Институте Пуанкаре в Париже и в Политехнической школе в Цюрихе (воспроизведен в *Journal de Mathématiques*).

---

* В 1928 г. Сергей Натанович был избран членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Усиленная научная деятельность Сергея Натановича не помешала ему одновременно принимать энергичное участие во всех делах, касающихся высшей школы на Украине и, в частности, Харьковского университета. В 1928 г. он становится во главе вновь огранизованного (в значительной степени по его инициативе) Украинского института математики и закладывает основу для развития этого исследовательского центра. В 1929 г. происходит избрание Сергея Натановича действительным членом Академии Наук СССР. В 1930 г., в качестве председателя организационного комитета, он проводит энергичную работу по созыву 1-го Всесоюзного съезда математиков, на котором выступает с обзорным докладом о современном состоянии и проблемах теории приближения функций. С 1933 г. Сергей Натанович живет в Ленинграде и принимает активное участие в работе Академии Наук. Педагогическая деятельность его протекает в Ленинградском государственном университете и в Ленинградском индустриальном институте.

В последнее десятилетие Сергей Натанович направляет свое внимание главным образом в сторону изучения различных вопросов интерполяции и механических квадратур; следует упомянуть, например, об окончательном выяснении пределов применимости так называемой квадратурной формулы Чебышева. С другой стороны, возвратившись к теории вероятностей, Сергей Натанович не только пополняет свои прежние исследования, но и публикует фундаментальные работы по новому методу «стохастических дифференциальных уравнений», который позволяет получать совершенно новые типы предельных теорем.

Источник математического творчества Сергея Натановича неиссякаем, и мы верим, что еще долгие годы его неутомимая мысль будет приносить зрелые плоды.

СПИСОК ТРУДОВ С. Н. БЕРНШТЕЙНА*

1903

1. Sur la nature analytique des solutions de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre (*Comptes rendus*, Paris, t. 137, p. 778—781).

1904

2. Sur certaines équations différentielles ordinaires du second ordre (*Comptes rendus*, Paris, t. 138, p. 950—951).
3. Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre (*Comptes rendus*, Paris, t. 139, p. 627—628).
4. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre. (Leipzig, Teubner, 61 p.) Thèse fac. sci., Paris.
5. Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre (*Math. Annalen*, Bd. 59, S. 20—76).

1905

6. Sur les équations du type parabolique (*Comptes rendus*, Paris, t. 140, p. 137—139).
7. Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique (*Comptes rendus*, Paris, t. 140, p. 1440—1442).

* Список составлен зав. библиотекой Математического института имени В. А. Стеклова Академии Наук СССР Н. И. Акинфиевой.

8. Sur les surfaces minima (*Comptes rendus*, Paris, t. 141, p. 558—559).
9. Sur l'interpolation (*Bull. Soc. math. de France*, v. 33, p. 33—36).
10. Sur la déformation des surfaces (*Math. Annalen*, Bd. 60, S. 434—436).

1906

11. Sur les singularités des solutions des équations aux dérivées partielles du type elliptique (*Comptes rendus*, Paris, t. 142, p. 564—565).
12. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Première partie (*Math. Annalen*, Bd. 62, S. 253—271).

1907

13. Méthode générale pour la résolution du problème de Dirichlet (*Comptes rendus*, Paris, t. 144, p. 1025—1027).

1908

14. Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 11, стр. 1—96).
15. Проект учебного плана по математике для мужских гимназий, предлагаемый Киевским физико-математическим обществом (*Педагогич. сборник*, сент., стр. 241—248).

1909

16. Исследование и интегрирование дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка эллиптического типа (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 11, стр. 97—164, окончание). То же, отд. отт. (Харьков, 1908, стр. 164).
17. Sur le principe de Dirichlet et le développement des fonctions harmoniques en séries de polynomes (*Comptes rendus*, Paris, t. 148, p. 1306—1308).
18. Начатки математики. Соч. Лэзана. Перев. с франц. (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 323—325, рецензия).
19. К вопросу об изменении программы по математике в средней школе (*Педагогич. сборник*, ноябрь, стр, 371—388).

1910

20. Conditions nécessaires et suffisantes pour la possibilité du problème de Dirichlet (*Comptes rendus*, Paris, t. 150, p. 514—515).
21. Sur les équations de la mécanique et du calcul des variations (*Comptes rendus*, Paris, t. 151, p. 48—50).
22. Sur les équations du calcul des variations (*Comptes rendus*, Paris, t. 151, p. 195—198).
23. Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard (*Comptes rendus*, Paris, t. 151, p. 636—639).
24. Sur les surfaces définies au moyen de leur courbure moyenne ou totale (*Annales scient. École normale*, t. 27, p. 233—256).
25. Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Deuxième partie (*Math. Annalen*, Bd. 69, S. 82—136).
26. Тригонометрия. Эмиль Борель. Перев. под ред. Н. Салтыкова, изд. Сытина (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 355—357, рецензия).
27. Прямолинейная тригонометрия. Вера Шиф. Изд.. 2-е М. Вольфа (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 357, рецензия).
28. Курс прямолинейной тригонометрии. В. Шидловский. СПб. (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 358, рецензия).
29. К. Б. Пенионжкевич. Основания анализа бесконечно малых. Курс 7 кл. реальн. уч., Белая церковь (*Педагогич. сборник*, декабрь, стр. 622, рецензия).
30. И. Гейберг. Новое сочинение Архимеда. Послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики. Перев., Матезис (*Педагогич. сборник*, декабрь, стр. 619—620, рецензия).
31. Физико-математическое приложение к циркуляру по управлению Кавказским учебным округом, 1909, № 1 (*Педагогич. сборник*, декабрь, стр, 622, рецензия).

1911

32. Sur le calcul approché des probabilités par la formule de Laplace (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 12, стр. 106—110).
33. Sur l'approximation des fonctions continues par des polynomes (*Comptes rendus*, Paris, t. 152, p. 502—504).

34. Теория вероятностей (Харьков, 254 стр., литограф.).
35. Weber und Wellstein. Энциклопедия элементарной геометрии, кн. I. Перев. под ред. В. Кагана, Матезис (*Педагогич. сборник*, февраль, стр. 378—380, рецензия).
36. Ф. Кэджори. История элементарной математики. Перев. под ред. И. Тимченко, Матезис (*Педагогич. сборник*, март, стр. 393—394, рецензия).
37. Август Адлер. Теория геометрических построений. Перев. под ред. С. Шатуновского, Матезис (*Педагогич. сборник*, август, стр. 174—176, рецензия).
38. А. Марков. Исчисление конечных разностей. Изд. 2-е, Матезис (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 388, рецензия).
39. Эмиль Борель. Арифметика. Перев. под ред. Д. Волковского, изд. Сытина (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 388—389, рецензия).

1912

40. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation de $|x|$ (*Comptes rendus*, Paris, t. 154, p. 184—186).
41. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 155, p. 1062—1065).
42. Démonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 13, стр. 1—2).
43. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов данной степени (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 13, стр. 49—194).
44. Суммирование везде расходящихся строк Тэйлора (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 13, стр. 195—199).
45. Исторический обзор развития понятия о функции (*Вестн. оп. физ. и элем. мат.* № 559, сем. 47, стр. 177—184).
46. Sur l'ordre de meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degré donné (*Mémoires publiés par la classe des sc. Acad. de Belgique*, sér. 2, t. 4, p. 1—103).
47. Sur les équations du calcul des variations (*Annales scient. École normale*, t. 29, p. 431—485).
48. Русская математическая библиография. Под ред. проф. Д. М. Синцова. Вып. 1—2 за 1908—1909 гг., Одесса, Mathesis, 1910—1912 (*Педагогич. сборник*, май, рецензия).
49. Проф. Г. Ковалевский. Введение в исчисление бесконечно малых. Перев. под ред. С. Шатуновского, Матезис (*Педагогич. сборник*, февраль, стр. 301—302, рецензия).
50. Б. Больцано. Парадоксы бесконечного. Перев. под ред. И. Слешинского, Матезис (*Педагогич. сборник*, июнь, стр. 705, рецензия).
51. К. Б. Пенионжкевич. Основания аналитической геометрии. Курс дополн. кл. реальн. уч. Изд. Думнова (*Педагогич. сборник*, июль, стр. 69—70, рецензия).
52. Борель-Штеккель. Элементарная математика. Часть I. Арифметика и алгебра. Перев. под ред. В. Кагана, Матезис (*Педагогич. сборник*, сентябрь, стр. 326—327, рецензия).

1913

53. Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes (*Proc. 5 Intern. math. congr.*, t. I, p. 256—266).
54. Sur les série normales (В книге D'Adhémar, Leçons sur les principes de l'analyse, t. 2, Paris, p. 259—283).
55. Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques, admettant des singularités données (*Bull. de la classe des sc.*, *Acad. de Belgique*, № 2, p. 76—90).
56. Sur quelques propriétés asymptotiques des polynomes (*Comptes rendus*, Paris, t. 157, p. 1055—1057).
57. Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 13, стр. 263—273).
58. Sur une propriété des polynomes (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, стр. 1—6).
59. Remarques sur l'inégalité de Wladimir Markoff (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, стр. 81—87).
60. Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés (*Acta math.*, t. 37, p. 1—57).
61. Феликс Клейн. Вопросы элементарной и высшей математики (*Педагогич. сборник*, ноябрь, рецензия).
62. Исчисление конечных разностей. Курс, чит. в 1913 г. (Харьков, 89 стр., литограф.).
63. Дж. В. А. Юнг. Как преподавать математику? Перев. А. Кулишера, изд. «Общественная польза» (*Педагогич. сборник*, март, стр. 384—387, рецензия).

1914

64. О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов. Речь, произнесенная при публичной защите докторской диссертации 19 мая 1913 г. (*Зап. Харьковского унив.*, кн. 4. Летопись Харьк. унив., стр. 1—8).
65. Sur la meilleure approximation des fonctions analytiques possédant des singularités complexes (*Comptes rendus*, Paris, t. 158, p. 467—469).
66. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques (*Comptes rendus*, Paris, t. 158, p. 1661—1663).
67. Sur la définition et les propriétés des fonctions analytiques d'une variable réelle (*Math. Annalen*, Bd. 75, S. 449—468).
68. Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, стр. 139—144).
69. Sur certaines fonctions périodiques qui s'écartent le moins possible de zéro (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, стр. 145—152).
70. Понятие функции в средней школе. Сообщение, прочитанное на 2-м съезде преподавателей математики 30 декабря 1913 г. (*Матем. образование*, т. 3, стр. 169—175).
71. Л. Кутюра. Философские принципы математики. Перев. под ред. П. Юшкевича, изд. Карбасникова (*Педагогич. сборник*, октябрь, стр. 306—307, рецензия).

1915

72. Добавление к статье «Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов» (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, стр. 200—201).
73. Sur la représentation des polynomes positifs (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 14, стр. 227—228).
74. Sur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées partielles du type elliptique (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 15, стр. 38—45).
75. Заметка по поводу статьи М. Малиева «Задача о четырех красках», помещенной в № 621 «Вестника» (*Вестн. оп. физ. и элем. мат.*, № 625, сер. 2, сем. 3, стр. 18).
76. Задача о четырех и пяти красках (*Вест. оп. физ. и элем. мат.*, № 628/629, сер. 2, сем. 3, стр. 107—111).
77. Н. Каменьщиков. Таблицы логарифмов с четырьмя десятичными знаками. Изд. «Просвещение», Пгр., 1914 (*Вестн. оп. физ. и элем. мат.*, № 628/629, сер. 2, сем. 3, стр. 115, рецензия).

1916

78. Quelques remarques sur l'interpolation (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 15, стр. 49—61).
79. Жюль Таннери. Основные понятия математики. Пгр. 1914 (*Педагогич. сборник*, янв., стр. 110—112, рецензия).
80. Н. Г. Лексин. Лабораторный метод изучения геометрии, Казань, 1914 (*Педагогич. сборник*, февр., стр. 257—258, рецензия).
81. А. Р. Кулишер. Учебник геометрии, часть I, СПб., 1914. (*Педагогич. сборник*, апрель, стр. 656, рецензия).
82. Д. Синцов. Сборник программ и инструкций по преподаванию математики в Западной Европе. Вып. 1, М. 1914 (*Педагогич. сборник*, май, стр. 736—737, рецензия).

1917

83. Опыт аксиоматического обоснования теории вероятностей (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 15, стр. 209—274).

1918

84. О законе больших чисел (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 2, т. 16, стр. 82—87).
85. Quelques remarques sur l'interpolation (*Math. Annalen*, Bd. 79, S. 1—12).

1921

86. О взаимоотношении между балловой оценкой и фактическим весом урожая по Харьковской губернии за 1913—1918 гг. (*Статист. бюлл. ЦСУ Укр.*, № 4, стр. 2—5).

1922

87. О приложении математики к биологии (*Наука на Украине*, т. I, стр. 14—19).
88. Sur le théorème limite du calcul des probabilités (*Math. Annalen*, Bd. 85, S. 237—241).

89. Sur le développement asymptotique de la meilleure approximation par des polynomes de degrés infiniment croissants des fonctions rationnelles (*Comptes rendus*, Paris, t. 175, p. 804—806).
90. Журнал чистого и прикладного знания (*Наука на Украине*, № 4, стр. 407—408, рецензия).
91. Festschrift für David Hilbert, Berlin, 1922 (*Наука на Украине*, № 4, стр. 408—409, рецензия).

1923

92. Sur une propriété des fonctions entières (*Comptes rendus*, Paris, t. 176, p. 1603—1605).
93. Sur les propriétés extrémales des polynomes et des fonctions entières sur l'axe réc (*Comptes rendus*, Paris, t. 176, p. 1782—1785).
94. Sur la meilleure approximation des fonctions possédant un point singulier essentiel (*Comptes rendus*, Paris, t. 177, p. 99—101).
95. Démonstration mathématique de la loi d'hérédité de Mendel (*Comptes rendus*, Paris, t. 177, p. 528—531).
96. Principe de stationarité et généralisations de la loi de Mendel (*Comptes rendus*, Paris, t. 177, стр. 581—584).
97. Sur les fonctions quasi analytiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 177, p. 937—939).

1924

98. Об одном видоизменении неравенства Чебышева и о погрешности формулы Лапласа (*Ученые зап. н.-и. кафедр Украины*, Отд . матем., вып. 1, стр. 38—49).
99. Решение одной математической проблемы, связанной с теорией наследственности (*Ученые зап. н.-и. кафедр Украины*, Отд. матем., вып. 1, стр. 83—115).
100. Извлечение из отчета о заграничной командировке проф. С. Н. Бернштейна, сделанного Научному комитету (*Ученые зап. н.-и. кафедр Украины*, Отд. матем., вып. 1, стр. 147—148).
101. Sur les fonctions quasianalytiques de M. Carleman (*Comptes rendus*, Paris, t. 179, p. 743—745).
102. Le problème de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe réel et l'une de ses applications (*Bull. Soc. math. de France*, t. 52, p. 399—410).
103. Введение к кн.: Теоретические основания выборочного метода. Выдержки из 4-го англ. изд. «Elements of statistics», A. Bowley, под ред. С. Н. Бернштейна (*ЦСУ УССР*, Харьков, стр. 5—9).

1925

104. Sur les courbes de distribution des probabilités (*Math. Zeitschrift*, Bd. 24, S. 199—211).

1926

105. Sur l'integration des équations aux dérivées partielles du type elliptique, I note Réponse à une critique (*Math. Annalen*, Bd. 95, S. 585—594).
106. Sur la nature analytique des solutions des équations différentielles aux dérivées partielles du type elliptique (*Math. Zeitschrift*, Bd. 25, S. 505—513).
107. Sur les sommes de quantités dépendantes (*Известия Ак. Наук СССР*, т. 20, стр. 1459—1478).
108. Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une varible réelle (Paris, Gauthier-Villars, X, 207 p. Collection de monogr. sur la théorie des fonctions, publ. par E. Borel).
109. О применении одного геометрического принципа к теории корреляций (Сборник памяти Лобачевского, Казань, т. 2, стр. 137—150).
110. Sur une propriété des fonctions entiéres de genre 0 (*Наукові зап. н.-д. мат. катедр України*, в. 2, стр. 9).
111. Sur l'extension du théorème limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendantes (*Math. Annalen*, Bd. 97, S. 1—59).

1927

112. Sur l'intégration des équations aux dérivées pertielles du type elliptique, II note (*Math. Annalen*, Bd. 96, p. 633—647).
113. Sur les polynomes multiplement monotones, qui s'écartent le moins de zéro (*Comptes rendus*, Paris, t. 185, p. 247—249).
114. Sur un problème relatif aux fonctions absolument monotones (*Comptes rendus*, Paris, t. 185, p. 495—496).
115. Démonstration nouvelle d'une inégalité relative aux polynomes trigonométriques (*Rendiconti Accad. d. Lincei Roma*, ser. 6, vol. 5, p. 558—561).
116. Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus (*Math. Zeitschrift*, Bd. 26, p. 551—558).

117. Sur une propriété des polynomes de Tchébycheff (*Доклады Ак. Наук СССР*, A, стр. 405—407).
118. Sur les polynomes multiplement monotones (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 4, т. I, стр. 1—11).
119. Fondements géométriques de la théorie des corrélations (*Metron*, t. 7, № 2, p. 3—27).
120. Теория вероятностей (М.—Л., Гос. изд., VIII + 363 стр.).

1928

121. Addition á l'article «Sur les sommes de quantités dépendantes» (*Доклады Ак. Наук СССР*, A, стр. 55—60).
122. Современное состояние теории вероятностей и ее приложений (Труды Всеросс. съезда матем. в Москве 27 апр.—4 мая 1927 г., М.—Л., Гос. изд., стр. 50—63).
123. О некоторых свойствах регулярно-монотонных функций (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 4, т. 2, стр. 1—11).
124. Sur un théorème de M. Gontcharoff (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, сер. 4, т. 2. стр. 73—74).
125. Sur une proptiété de la fonction exponentielle (*Наукові зап. н.-д. мат. катедр України*, т. 3, стр. 65—71).
126. Sur les fonctions multiplement monotones (*Зап. физ-мат. відділу, ВУАН, Київ*, т. 3, вып. 2, стр. 40—47).
127. Sur quelques propriétés asymptotiques de la meilleure approximation (*Comptes rendus*, Paris, t. 186, p. 840—842).
128. Sur les polynomes de Jacobi (*Comptes rendus*, Paris, t. 186, p. 1090—1093); 1456).
129. Sur les fonctions régulièrement monotones (*Comptes rendus*, Paris, t. 186, p. 1266—1269).
130. Sur la croissance des polynomes (*Comptes rendus*, Paris, t. 187, p. 558—559).
131. Sur les fonctions absolument monotones (*Acta math.*, t. 52, p. 1—66).
132. Démonstration du théorème de M. Hilbert sur la nature analytique des solutions des équations du type elliptique sans l'emploi des séries normales (*Math. Zeitschrift*, Bd. 28, S. 330—348).
133. Поняття кореляції між статистичними величинами (*Вістник статистики України*, Харків, I, стр. 111—113).

1929

134. Про монотонні функції (*Зап. Харківського мат. тов.*, сер. 4, т. 3, стр. 11—18).
135. Sur la variation minimale du polynome $P_n(x)$ monotone dans l'intervalle $(-1, +1)$ dont les dérivées $P_n'(1) = a^2 = a$, $P_n''(1) = b$ sont données. Про найменшу вариіяцію монотонного полінома $P_n'(x)$ в інтервалі $(-1, +1)$, похідні якого $P_n'(1) = a^2 = a$, $P_n''(1) = b$ (*Зап. Харківського мат. тов.*, сер. 4, т. 3, стр. 19—23). Совместно с W. Břečka и B. Rymarenko.
136. Sur les polynomes orthogonaux (*Comptes rendus*, Paris, t. 188, p. 361—364).
137. Sur la distribution des zéros des polynomes tendant vers une fonction continue positive sur un segment donné (*Journ. de math. pures et appl.*, t. 8, p. 327—337).
138. Zusatz zum vorangehenden Artikel der Herren W. Břečka und J. Geronimus über monotone polynome minimaler Abweichung (*Math. Annalen*, Bd. 102, S. 517—519).
139. Григорій Олексійович Грузинцев (некролог). Григорий Алексеевич Грузинцев (*Зап. Харківського мат. тов.*, сер. 4, т. 3, стр. 5—10).

1930

140. Sur une classe de polynomes orthogonaux (*Зап. Харківського мат. тов.*, сер. 4, т. 4, стр. 79—93).
141. Применение графостатики к решению систем линейных уравнений (*Труды Московск. инст. инженеров транспорта*, т. 15, стр. 9—14).
142. Несколько замечаний о полиномах наименьшего уклонения с целыми коэффициентами (*Доклады Ак. Наук СССР*, A, стр. 411—418).
143. Sur l'application de la méthode de Tchébycheff à une classe de problèmes de M. Fejér (*Известия Ак. Наук СССР*, ОФМН, № 5, стр. 381—398).
144. Sur les fonctions régulièrement monotones (*Atti Congresso Inst. Mat.*, Bologna, t. 2, p. 267—275).
145. Sur une classe de polynomes d'écart minimum (*Comptes rendus*, Paris, t. 190, p. 237—240).
146. Sur la limitation des dérivées des polynomes (*Comptes rendus*, Paris, t. 190, p. 338—341).
147. Sur une formule d'interpolation (*Comptes rendus*, Paris, t. 191, p. 635—637).
148. Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques (*Comptes rendus*, Paris, t. 191, p. 976—979).
149. Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini, I (*Journ. de math. pures et appl.*, v. 9, p. 127—177).

1931

150. Exemple d'une fonction continue pour laquelle la formule d'interpolation trigonométrique de Lagrange diverge (*Доклады Ак. Наук СССР*, A, стр. 365—366).
151. Sur la limitation des valeurs d'un polynome $P_n(x)$ de degré n sur tout un segment par ses valeurs en $(n+1)$ points du segment (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, № 8, стр. 1025—1050).
152. Sur une classe de formules d'interpolation (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, № 9, стр. 1151—1161).
153. Sur le maximum absolu d'une somme trigonométrique (*Comptes rendus*, Paris, t. 193, p. 433—436).
154. Sur les polynomes orthogonaux relatifs à un segment fini, II (*Journ. de math. pures et appl.*, vol. 10, p. 219—286).

1932

155. Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires. (*Verhandlungen math. kongr.*, Zürich, 1932, т. I, p. 288—309). То же на русск. яз. в кн.: Современное состояние теории вероятностей (М.—Л., 1933, стр. 5—20).
156. Complément à l'article de E. Voronovskaya «Détermination de la forme asymptotique de l'approximation des fonctions par les polynomes de M. Bernstein» (*Доклады Ак. Наук СССР*, A, № 4, стр. 86—92).
157. О формуле приближенного интегрирования Чебышева (*Известия Ак. Наук СССР*, ОМЕН, № 9, стр. 1219—1227).
158. Сучасный стан та проблеми теорії найкращого наближення функції дійсної змінної через поліноми (*Зап. Харківського мат. тов.*, т. 5, стр. 21—35).
159. Sur une modification de la formule d'interpolation de Lagrange (*Зап. Харківського матем. тов.*, т. 5, стр. 49—57).
160. Complément à l'article «Sur une classe de polynomes orthogonaux» (*Зап. Харківського матем. тов.*, т. 5, стр. 59—60).
161. Sur une formule d'interpolation de M. de la Vallée Poussin (*Зап. Харківського матем. тов.*, т. 5, стр. 61—64).
162. Sur une propriété élémentaire du coefficient de corrélation (*Зап. Харківського матем. тов.*, т. 5, стр. 65—66).

1933

163. Sur l'équation différentielle de Fokker-Planck (*Comptes rendus*, Paris, t. 196, p. 1062—1064).
164. Remarque à propos d'une note de M. R. Salem (*Comptes rendus*, Paris, t. 197, p. 213—214).
165. О зависимости между случайными величинами (*Труды ноябрьск. юбил. сессии Ак. Наук СССР* 1932 г., Л., стр. 38—62).

1934

166. О линейных квазинепрерывных цепях Маркова, I. (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. I, стр. 1—9). То же, II (Там же, стр. 361—365).
167. О рассеянии с поглощением (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 1, стр. 230—234).
168. О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 4, стр. 1—8).
169. Principes de la théorie des équations différentielles stochastiques. I-re partie (*Труды Физ.-мат. ин-та им. Стеклова*, отд. матем., т. 5, стр. 95—124).
170. Sur la convergence absolue des séries trigonométriques (*Comptes rendus*, Paris, t. 199, p. 397—400).
171. Теория вероятностей (изд. 2-е и 3-е доп., М.-Л., ГТТИ, 412 стр.).

1935

172. О математических работах П. Л. Чебышева (1821—1894) (*Природа*, № 2, стр. 1—6).
173. Sur quelques propriétés extrémales des intégrales successives (*Comptes rendus*, Paris, t. 200, p. 1900—1902).
174. Sur un théorème de M. Szegö (*Prace mat.-fiz.*, t. 44, p. 9—14).
175. О математическом ожидании простоя рабочих единиц при сложном производственном процессе (*Уголь*, № 117, стр. 109—111, Харьков).

1936

176. Etat actuel et problèmes de la théorie des polynomes d'approximation des fonctions d'une variable réelle. Современное состояние и проблемы теории приближения функций действительного переменного посредством полиномов, *Труды 1 Всес. съезда математиков в Харькове* 1930 г., М.—Л., стр. 58—96).
177. Détermination d'une limite intérieure de la dispersion des sommes de grandeurs liées en chaine singulière (*Матем. сборник*, т. I (43): 1, стр. 29—37).

178. О периодических функциях, для которых наилучше сходящимся рядом является ряд Фурье (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, № 10, разд. физ.-матем. наук, вып. 3, стр. 1—8).
179. Sur le domaine de convergence des polynomes $B_n f(x) = \sum_0^m f(m/n) C_n^m x^m (1-x)^{n-m}$ (*Comptes rendus*, Paris, t. 202, p. 1356—1358).
180. Sur quelques propriétés extrémales des intégrales successives (Correction) (*Comptes rendus*, Paris, т. 203, p. 147).
181. Sur la formule de quadrature approchée de Tchebycheff (*Comptes rendus*, Paris, t. 203, p. 1305—1306).
182. Sur la convergence de certaines suites de polynomes (*Journ. de math. pures et appl.*, t. 15, p. 345—358).

1937

183. О формулах квадратур Котеса и Чебышева (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 14, стр 323—327).
184. О некоторых видоизменениях неравенства Чебышева. (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 17, стр. 275—277).
185. О формулах квадратур с положительными коэффициентами (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. мат., № 4, стр. 479—503).
186. Примеры формул квадратур с положительными коэффициентами и рациональными абсциссами (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, № 4, разд. физ.-матем. наук, вып. 2, стр. 19—21).
187. Постановка преподавания математики во втузах (*Высшая школа*, № 2, стр. 69—73).
188. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной, ч. I (Л.—М., 203 стр.).
189. О многочленах ортогональных в конечном интервале (Харьков, 128 стр., Харьк. матем. б-ка, кн. 2).
190. Sur les formules de quadrature à coefficients non négatifs et abscisses équidistantes (*Comptes rendus*, Paris, t. 204, p. 1294—1296).
191. Modifications de la formule de quadrature de Tchebycheff (*Comptes rendus*, Paris, t. 204, p. 1526—1529).
192. Sur la meilleure approximation des fonctions non regulières (*Comptes rendus*, Paris, t. 205, p. 825—827).

1938

193. О наилучшем приближении $|x-c|^p$ (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 18, стр. 379—384).
194. Ограничение модулей последовательных производных решений уравнений параболического типа (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 18, стр. 385—388).
195. О наилучшем приближении $|x|^p$ при помощи многочленов весьма высокой степени. (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., № 2, стр. 169—190).
196. О базе системы Чебышева (*Известия Ак. Наук СССР*, сер. матем., № 5—6, стр. 499—504).
197. Деякі застосування параметричного методу до вивчення квадратурних формул. Quelques applications de la méthode paramétrique à l'étude des formules de quadrature (*Зап. н.-д. інст. матем. й мех.*, Харків, сер. 4, т. 15, вип. 1, стр. 1—29).
198. Примеры формул квадратур, аналогичных формуле Чебышева (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, № 5, раздел физ.-матем. наук, вып. 1, стр. 3—7).
199 О теореме В. А. Маркова (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, № 5, раздел физ.-матем. наук, вып. 1, стр. 8—13).
200. Конструктивная теория функций вещественной переменной (Математика и естествознание в СССР, М.—Л., изд. Ак. Н. СССР, стр. 36—41).
201. Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues (*Comptes rendus*, Paris, t. 206, стр. 1520—1523).
202. Sur un système d'équations indéterminées (*Journ. de math. pures et appl.*, t. 17, p. 179—186).
203. Equations différentielles stochastiques. Paris, Hermann, 31 p. (*Act. Sci. ind.*, 738, Confér. internat. Sci. math. Univ. Genève. Théorie des probabilités, V. Les fonctions aléatoires).

1939

204. Определение ряда функций по экстремумам его последовательных остатков (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 22, стр. 3—6).
205. Несколько замечаний по поводу предельной теоремы Ляпунова (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 24, стр. 3—7).
206. Исправление одного доказательства (*Доклады Ак. Наук СССР*, т. 25, стр. 705—707).
207. Петербургская школа теории вероятностей (*Природа*, № 8, стр. 17—22).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 261—276 Série mathématique

И. И. ПРИВАЛОВ

ОБ ИНТЕГРАЛЕ ТИПА КОШИ — СТИЛЬТЬЕСА

Предметом исследования в настоящей статье является интеграл типа Коши—Стильтьеса. С одной стороны, изучается вопрос о предельных значениях интеграла этого типа, с другой стороны—рассматривается случай, когда он равен нулю вне контура интегрирования.

§ 1. Будем называть интегралом типа Коши — Стильтьеса выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^l \frac{e^{i\varphi(s)}\,dF(s)}{x(s)-z}, \tag{1}$$

где L — произвольная замкнутая спрямляемая кривая Жордана длины l, φ — угол между положительными направлениями оси абсцисс и касательной, а $F(s)$ — комплексная функция дуги s, заданная на сегменте $[0, l]$ с ограниченным изменением. Пусть x_0 есть какая-нибудь точка линии L, определенная значением s_0 ее дуги.

Обозначим через L_ε часть линии, оставшуюся после удаления из L маленькой дуги, концами которой служат точки $x(s_0-\varepsilon)$ и $x(s_0+\varepsilon)$. Особым интегралом назовем конечный предел, если он существует, выражения

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}$$

при ε, стремящемся к нулю, полагая в этом случае

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}.$$

Выбирая точку z на некоторой прямой zx_0, наклоненной к нормали под углом ψ_0, на расстоянии ε от x_0, $z=x_0\pm\varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, рассмотрим разность

$$\mathfrak{F}(\varepsilon, x_0, \psi_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}-\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}\right]; \tag{I}$$

эта разность будет определена во всех точках x_0 линии L, в которых существуют определенные касательные к линии L. Докажем следующее предложение:

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Выражение* $\mathfrak{F}(\varepsilon, x_0, \psi_0)$ *стремится к пределу** $\pm\frac{1}{2}F'(s_0)$, *когда* ε *стремится к нулю, для всех точек* x_0 *линии* L, *кроме, быть может, точек множества меры нуль, не зависящего от* ψ_0, *равномерно относительно* ψ_0, $|\psi_0| \leqslant \frac{\pi}{2}\theta$, $\theta < 1$.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $F(s)$ — абсолютно непрерывная функция на $[0, l]$. В этом случае предложение было ранее мною доказано ([1]). Приводимый вывод значительно проще первоначального. Полагая $F'(s) = f(s)$, заменим выражение (I) формулой

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_L \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i\varphi}\,ds}{x-z} - \int\limits_{L_\varepsilon} \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i\varphi}\,ds}{x-x_0}\right], \tag{I'}$$

которая может быть записана в виде

$$\mathfrak{F}(\varepsilon, x_0, \psi_0) \mp \frac{1}{2}f(s_0) + o(1).$$

Очевидно наше предложение будет доказано, если мы покажем стремление к нулю выражения (I′). Для этого заметим, что

$$x - x_0 = x(s) - x(s_0) = (s - s_0)\left[e^{i\varphi_0} + k\right],$$
$$x - z = x(s) - x(s_0) - \varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)} = (s - s_0)\left[e^{i\varphi_0} + k\right] - \varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)},$$

где $|k| < \eta$, сколь угодно малого положительного числа, если $|s - s_0| < h = h(\eta)$. После этого легко получим

$$\left.\begin{aligned}
\int\limits_L \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i\varphi}\,ds}{x-z} &= \int\limits_L \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i(\varphi-\varphi_0)}\,ds}{(s-s_0)\,(1+ke^{-i\varphi_0}) - \varepsilon i e^{i\psi_0}}, \\
\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i\varphi}\,ds}{x-x_0} &= \int\limits_{L_\varepsilon} \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i(\varphi-\varphi_0)}\,ds}{(s-s_0)\,(1+ke^{-i\varphi_0})}.
\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Полагая далее $s - s_0 = \sigma$ и обозначая для сокращения $ke^{-i\varphi_0} = m$, причем $|m| = |k| < \eta$ для $|\sigma| < h$, выражения (2) перепишем таким образом:

$$\left.\begin{aligned}
\int\limits_L \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i\varphi}\,ds}{x-z} &= \int\limits_L \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(1+m)\,\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}}, \\
\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{[f(s)-f(s_0)]\,e^{i\varphi}\,ds}{x-x_0} &= \int\limits_{L_\varepsilon} \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(1+m)\,\sigma},
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где $\Phi(\sigma) = e^{i(\varphi-\varphi_0)}[f(s) - f(s_0)]$.

Путем вычитания равенств (3) представим выражение (I′) после отбрасывания множителя $\frac{1}{2\pi i}$ в виде

$$\int\limits_{L_\varepsilon} \frac{\varepsilon i e^{i\psi_0}\,\Phi(\sigma)\,d\sigma}{[(1+m)\,\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}]\,(1+m)\,\sigma} + \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(1+m)\,\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}}. \tag{4}$$

---

* $+\frac{1}{2}F'(s_0)$ в случае, если z находится внутри L, $-\frac{1}{2}F'(s_0)$, если вне L. Второй случай немедленно приводится к первому путем изменения направления пути интегрирования.

Предположим, что при $s=s_0$ выражение $|f(s)-f(s_0)|$ есть производная своего неопределенного интеграла, т. е. $\int\limits_0^\sigma |\Phi(\sigma)|\,d\sigma$ имеет производную при $\sigma=0$ равную нулю. По теореме Лебега это обстоятельство имеет место почти всюду на $[0, l]$. Докажем сначала, что предел второго слагаемого формулы (4) при $\varepsilon \to 0$ равен нулю. С этой целью заметим, что

$$|(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}| > \sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2+2\varepsilon\sigma\sin\psi_0} - |m|\,|\sigma| >$$
$$> \sqrt{1-q}\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}|\sigma|\right), \tag{5}$$

считая $|\sin\psi_0| \leqslant q < 1$, $\eta < \frac{1}{2}\sqrt{1-q}$, и значит

$$\left|\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}}\right| < \frac{2}{\sqrt{1-q}\,\varepsilon}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |\Phi(\sigma)|\,d\sigma \to 0.$$

Теперь мы имеем в виду доказать, что предел при $\varepsilon \to 0$ первого слагаемого формулы (4) равен нулю. Разбивая интервал интеграции в исследуемом интеграле на части $(-h, -\varepsilon)$, (ε, h), L_h, мы видим, что наш интеграл, взятый по L_h, стремится к нулю вместе с ε. Вопрос приводится к исследованию

$$\int\limits_{\varepsilon}^{h} \frac{\varepsilon i e^{i\psi_0}\Phi(\sigma)\,d\sigma}{[(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}](1+m)\sigma} + \int\limits_{-h}^{-\varepsilon} \frac{\varepsilon i e^{i\psi_0}\Phi(\sigma)\,d\sigma}{[(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}](1+m)\sigma}. \tag{6}$$

Замечая, что в силу (5)

$$\left|\int\limits_{\varepsilon}^{h} \frac{\varepsilon i e^{i\psi_0}\Phi(\sigma)\,d\sigma}{[(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}](1+m)\sigma}\right| <$$
$$< \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int\limits_{\varepsilon}^{h} \frac{|\Phi(\sigma)|\,d\sigma}{\sigma\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)}, \tag{7}$$

так как $|m| < \eta < \frac{1}{2}\sqrt{1-q}$, положим

$$\mathfrak{F}(\sigma) = \int\limits_0^\sigma |\Phi(\sigma)|\,d\sigma$$

и перепишем правую часть неравенства (7), после интегрирования по частям, в виде

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int\limits_{\varepsilon}^{h} \frac{d\mathfrak{F}(\sigma)}{\sigma\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)} =$$
$$= \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\left[\frac{\mathfrak{F}(\sigma)}{\sigma\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)}\right]_{\varepsilon}^{h} +$$
$$+ \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int\limits_{\varepsilon}^{h} \mathfrak{F}(\sigma)\,\frac{\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)^2 + \frac{3}{4}\sigma^2}{\sigma^2\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)^2\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2}}\,d\sigma.$$

Обинтегрированный член стремится к нулю вместе с ε. Последний же интеграл представим так:

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int_{\varepsilon}^{h}\mathfrak{F}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma^2\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2}}+$$
$$+\frac{3\varepsilon}{2\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{\mathfrak{F}(\sigma)\,d\sigma}{\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{2}\sigma\right)^2\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2}}. \qquad (8)$$

Полагая здесь $\mathfrak{F}(\sigma)=r(\sigma)\sigma$ и заменяя $\frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2}}$ через 1, убеждаемся, что выражение (8) меньше, чем

$$\frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{r(\sigma)\,d\sigma}{\sigma^2}+\frac{3\varepsilon}{2\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\int_{\varepsilon}^{h}\frac{r(\sigma)\,d\sigma}{\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2}-\frac{1}{2}\sigma\right)^2}$$

и значит подавно меньше, чем

$$\frac{8\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}\sup_{0\leqslant\sigma\leqslant h}r(\sigma)\int_{\varepsilon}^{h}\frac{d\sigma}{\sigma^2}<\frac{8\sup\limits_{0\leqslant\sigma\leqslant h}r(\sigma)}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})}.$$

Так как $\sup\limits_{0\leqslant\sigma\leqslant h}r(\sigma)$ можно считать сколь угодно малым вместе с η, то последнее выражение сколь угодно мало вместе с η. Так же покажем, что и второе слагаемое формулы (8) по модулю сколь угодно мало вместе с η.

Таким образом наше предложение доказано для случая абсолютно непрерывной функции $F(s)$.

Обратимся теперь к исследованию выражения (I) в общем случае, когда $F(s)$ — функция с ограниченным изменением на $[0, l]$.

Обозначая через $\Omega(s)$ разность $\Omega(s)=F(s)-\int^{s}F'(s)\,ds$, мы можем, в силу разобранного случая, свести доказательство нашего предложения к доказательству его при условии, что функция $\Omega(s)$, стоящая под знаком дифференциала, имеет производную, равную почти всюду нулю. Разбивая, наконец, комплексную функцию $\Omega(s)$ на действительную и мнимую части и представляя эти последние как разности ограниченных возрастающих функций с производными, равными нулю почти всюду, мы сведем задачу к исследованию выражения (I) при гипотезе, что $F(s)$ есть ограниченная возрастающая функция с производной, равной нулю почти всюду на $[0, l]$.

Докажем, что во всякой точке, в которой производная $F'(s)$ равна нулю, выражение (I) стремится к нулю. Полагая $F(s)=F(s_0+\sigma)=\mathfrak{F}(\sigma)$, мы произведем исследование выражения

$$\int_{L}\frac{e^{i\varphi}\,d\mathfrak{F}(\sigma)}{x-z}-\int_{l_\varepsilon}\frac{e^{i\varphi}\,d\mathfrak{F}(\sigma)}{x-x_0},$$

при гипотезе, что $\mathfrak{F}'(0)=0$ и $\mathfrak{F}(\sigma)$—возрастающая ограниченная функция. Повторяя те же выкладки, мы получим вместо (4)

$$\int_{L_\varepsilon} \frac{\varepsilon i e^{i\psi_0} e^{i(\varphi-\varphi_0)} d\mathfrak{F}(\sigma)}{\left[(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}\right](1+m)\sigma} + \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)} d\mathfrak{F}(\sigma)}{(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}}. \tag{4'}$$

Докажем сначала, что предел второго слагаемого (4′) равен нулю при $\varepsilon \to 0$. Действительно, аналогично предыдущему

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{e^{i(\varphi-\varphi_0)} d\mathfrak{F}(\sigma)}{(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}} \right| < \frac{2}{\sqrt{1-q}\,\varepsilon} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} d\mathfrak{F}(\sigma) \to 0.$$

Далее, поступая аналогично предыдущему, вместо (7) мы будем иметь

$$\left| \int_{\varepsilon}^{h} \frac{\varepsilon i e^{i\psi_0} e^{i(\varphi-\varphi_0)} d\mathfrak{F}(\sigma)}{\left[(1+m)\sigma - \varepsilon i e^{i\psi_0}\right](1+m)\sigma} \right| <$$

$$< \frac{2\varepsilon}{\sqrt{1-q}\,(2-\sqrt{1-q})} \int_{\varepsilon}^{h} \frac{d\mathfrak{F}(\sigma)}{\sigma\left(\sqrt{\sigma^2+\varepsilon^2} - \frac{1}{2}\sigma\right)}. \tag{7'}$$

Дальнейшие выкладки повторяются, и мы получим полное доказательство нашего предложения.

Из доказанной леммы вытекают с л е д с т в и я:

a) Если особый интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-x_0}$ существует почти всюду на L, то интеграл типа Коши — Стильтьеса $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-z}$ имеет определенный конечный предел почти всюду на L, когда z приближается к точкам L по любым некасательным путям, равный

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-x_0} \pm \frac{1}{2} F'(s_0). \tag{II}$$

Обратно, если $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-z}$ стремится почти всюду на L к конечному пределу (изнутри или извне L), тогда существует особый интеграл $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-x_0}$ почти всюду на L, и предельные значения интеграла типа Коши — Стильтьеса выражаются формулой (II).

b) Разность значений интеграла типа Коши — Стильтьеса изнутри и извне L

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-z_1} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi} dF(s)}{x-z_2},$$

где $z_1 = x_0 + \varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, $z_2 = x_0 - \varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, стремится к пределу $F'(s_0)$, когда ε стремится к нулю, для всех точек x_0 линии L, кроме, быть

может, точек множества меры нуль, не зависящего от ψ_0, равномерно относительно ψ_0, $|\psi_0| \leqslant \frac{\pi}{2}\theta$, $\theta < 1$.

§ 2. Чтобы доказать существование предельных значений интеграла типа Коши — Стильтьеса (1) по всем некасательным путям почти всюду на L (изнутри L и извне L), примем за спрямляемый контур L кусочно-гладкий контур Γ с конечным числом точек перегиба. Обозначим через γ гладкую дугу контура Γ, не имеющую внутри точек перегиба, и положим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(\gamma)}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}.$$

Очевидно, второе слагаемое правой части последнего равенства во всякой внутренней точке дуги γ имеет конечный предел, когда z любым образом приближается к этой точке. Отсюда мы докажем существование конечных предельных значений почти всюду на γ (изнутри и извне Γ) по всем некасательным путям для интеграла типа Коши — Стильтьеса

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z},$$

если покажем это относительно интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}.$$

Заметив, с другой стороны, что контур Γ состоит из конечного числа дуг, мы видим, что тем самым будет доказано существование конечных предельных значений почти всюду на Γ (изнутри и извне Γ) по всем некасательным путям для интеграла типа Коши - Стильтьеса

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}.$$

Чтобы исследовать функцию, изображаемую посредством интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}$, положим $x-z=re^{i\chi}$, считая z внутри Γ, а дугу γ обращенной вогнутостью в сторону области, ограниченной контуром Γ. Доказав существование предельных значений по всем некасательным путям почти всюду на γ в этих условиях, мы тем самым докажем это положение для случая внешней точки z (в силу следствия b леммы), а также и для случая, когда дуга γ обращена вогнутостью в противоположную сторону (это приводится к рассматриваемому случаю путем изменения направления пути интегрирования). Будем иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{e^{i(\varphi-\chi)}\,dF(s)}{r}.$$

В последнем выражении отделим действительную часть от мнимой, подставляя $F_1(s)+iF_2(s)$ вместо $F(s)$, $\frac{\pi}{2}-\psi$ вместо $\varphi-\chi$, обозначая через ψ угол с надлежащим знаком, между внутренней нормалью в точке x и вектором $\bar{r}$, идущим из точки x к точке z. Получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{i\varphi}dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\sin\psi}{r}dF_1(s)+\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\cos\psi}{r}dF_1(s)+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{\sin\psi}{r}dF_2(s)-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\cos\psi}{r}dF_2(s),$$

или

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{e^{i\varphi}dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi}[P_1(z)-iQ_1(z)]-\frac{1}{2\pi i}[P_2(z)-iQ_2(z)], \tag{9}$$

где положено

$$P_1(z)=\int_\gamma \frac{\cos\psi}{r}dF_1(s),\qquad Q_1(z)=\int_\gamma \frac{\sin\psi}{r}dF_1(s) \tag{10}$$

и аналогично $P_2(z)$ и $Q_2(z)$ с заменой $F_1(s)$ на $F_2(s)$.

В разложение (9) входят потенциалы двойного слоя P_1 и P_2 и им сопряженные гармонические функции $-Q_1$ и $-Q_2$. Покажем, что потенциал двойного слоя возможно представить в виде разности двух положительных гармонических функций, если z находится внутри Γ и вблизи дуги γ. В самом деле, полагая $F_1(s)=\Phi_1(s)-\Phi_2(s)$, где $\Phi_1(s)$ и $\Phi_2(s)$ — возрастающие ограниченные функции, мы представим $P_1(z)$ в виде

$$P_1(z)=\int_\gamma \frac{\cos\psi}{r}d\,\Phi_1(s)-\int_\gamma \frac{\cos\psi}{r}d\,\Phi_2(s),$$

откуда и усматриваем справедливость нашего заключения, так как вблизи γ имеем $\frac{\cos\psi}{r}>0$.

Воспользовавшись соотношением (9), в котором по только что доказанному функции $P_1(z)$ и $P_2(z)$ внутри контура Γ, вблизи дуги γ, суть разности положительных гармонических функций, мы докажем существование конечных предельных значений по всем некасательным путям почти всюду на γ для интеграла типа Коши—Стильтьеса (9), если обнаружим это для голоморфной функции с положительной действительной частью. Последнее же очевидно имеет место, потому что такая функция линейным преобразованием приводится к ограниченной функции, предельные значения которой почти всюду существуют по теореме Фату и, вследствие теоремы единственности, отличны от нуля. Итак, мы доказали существование к о н е ч н ы х предельных значений по всем некасательным путям почти всюду на Γ (изнутри Γ и извне Γ) для интеграла типа Коши—Стильтьеса. Это предложение было мною ранее доказано для интеграла типа Коши—Лебега ([1]).

Сопоставляя установленный результат этого параграфа с леммой § 1 (следствие а), мы приходим к теореме: *почти всюду на контуре* Γ *по всем некасательным путям имеет место формула*

$$\lim_{z\to x_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}\pm\frac{1}{2}F'(s_0); \qquad \text{(III)}$$

интеграл правой части определен как особый.

Считая в последней формуле $F(s)=F_1(s)$ вещественной функцией, путем сравнения действительной и мнимой частей мы получим, вследствие (9) и (10), результат: почти всюду на контуре Γ по всем некасательным путям имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned}&\int\limits_{\Gamma}\frac{\cos\psi}{r}\,dF_1(s)\to\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\cos\psi}{r}\right)_0 dF_1(s)\pm\pi F_1'(s_0),\\&\int\limits_{\Gamma}\frac{\sin\psi}{r}\,dF_1(s)\to\int\limits_{\Gamma}\left(\frac{\sin\psi}{r}\right)_0 dF_1(s).\end{aligned}\right\}. \qquad \text{(III')}$$

§ 3. Естественно назвать выражение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}$$

интегралом Коши — Стильтьеса, распространенным по произвольной спрямляемой кривой L, если его предельные значения изнутри L по всем некасательным путям совпадают с производной $F'(s)$ почти всюду на контуре L. В силу основной леммы § 1 (следствие b) интеграл типа Коши — Стильтьеса обращается в интеграл Коши — Стильтьеса тогда и только тогда, когда предельные его значения извне почти всюду равны нулю или, что то же, когда интеграл типа Коши — Стильтьеса вне L тождественно равен нулю (по теореме единственности).

Заметив это, легко установим предложение: *условия*

$$\int\limits_{L}e^{i\varphi}x^n\,dF(s)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots)$$

необходимы и достаточны для того, чтобы интеграл типа Коши — Стильтьеса обращался в интеграл Коши — Стильтьеса.

В самом деле, в окрестности бесконечно удаленной точки имеем разложение

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i z^{n+1}}\int\limits_{L}e^{i\varphi}x^n\,dF(s),$$

откуда и следует наше утверждение.

Покажем теперь, что из условий

$$\int\limits_{L}e^{i\varphi}x^n\,dF(s)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots) \qquad (11)$$

вытекает абсолютная непрерывность функции $F(s)$ на сегменте $[0,\ l]$, и следовательно обращение инте-

грала Коши—Стильтьеса с функцией распределения $F(s)$ в интеграл Коши—Лебега с функцией плотности $F'(s)$. Другими словами, мы докажем, что классы функций, представимых интегралами Коши—Стильтьеса и Коши—Лебега, совпадают, а также что интегралом Коши—Стильтьеса функция может быть представлена единственным образом.

С этой целью положим

$$\Phi(s)=\int_0^s e^{i\varphi(s)}\,dF(s) \tag{12}$$

и перепишем равенства (11) в виде

$$\int_L x^n\,d\Phi(s)=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots), \tag{13}$$

где $\Phi(s)$ — функция с ограниченным изменением на сегменте $[0, l]$, как это следует из (12). Покажем, что из условий (13) вытекает абсолютная непрерывность функции $\Phi(s)$ на контуре L. В самом деле, условия (13) после интегрирования по частям примут вид

$$\int_L \Phi(s)\,x^n\,dx=0 \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Эти же условия позволяют нам заключить, что выражение $\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(s)dx}{x-z}$ есть интеграл Коши. Абсолютная непрерывность функции $\Phi(s)$ на контуре L будет следовать из рассматриваемой ниже теоремы, которая является обобщением известного предложения Рисса, данного для окружности, на случай произвольного спрямляемого контура.

ТЕОРЕМА. *Если голоморфная функция $f(z)$ внутри спрямляемого контура L представима интегралом Коши*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(x)\,dx}{x-z},$$

причем граничная функция $f(x)=f(x(s))=\Phi(s)$ с ограниченным изменением относительно дуги s, то эта последняя функция необходимо должна быть абсолютно непрерывной на L; кроме того, в этом случае $f(z)$ необходимо будет непрерывной вплоть до контура.

Доказательство. Заметим, что граничные значения $f(x)$ удовлетворяют условиям $\int_L f(x)\,x^n\,dx=0$ $(n=0,1,2,\ldots)$. Пусть $z=\varphi(w)$ — функция, реализующая конформное отображение круга $|w|<1$ на область, ограниченную контуром L, а x и ξ — соответствующие точки на границах. Полагая $x=\varphi(\xi)$, перепишем наши условия в виде

$$\int_{|\xi|=1} f[\varphi(\xi)]\,[\varphi(\xi)]^n\,d\varphi(\xi)=0.$$

Заметив, что $f[\varphi(\xi)]=f[\varphi(e^{i\theta})]$ совпадают со значениями $f[x(s(\theta))]=$ $=\Phi(s(\theta))=\omega(\theta)$, последним равенствам придадим вид

$$\int\limits_{|\xi|=1} \omega(\theta)\,[\varphi(\xi)]^n\, d\varphi(\xi) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{14}$$

причем $\omega(\theta)$ с ограниченным изменением на сегменте $[0, 2\pi]$ и

$$\int\limits_0^{2\pi} d\omega(\theta) = 0. \tag{15}$$

Теорема будет доказана, если мы обнаружим абсолютную непрерывность функции $\omega(\theta)$. Интегрированием по частям найдем из (14):

$$\int\limits_{|\xi|=1} [\varphi(\xi)]^{n+1}\, d\omega(\theta) = 0,$$

или, принимая во внимание (15),

$$\int\limits_{|\xi|=1} [\varphi(\xi)]^n\, d\omega(\theta) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16}$$

Покажем, что из соотношений (16) вытекают равенства

$$\int\limits_{|\xi|=1} \xi^m\, d\omega(\theta) = 0 \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots). \tag{17}$$

В самом деле, если $z = \varphi(w)$, а $w = \psi(z)$, то $w^m = [\psi(z)]^m$ будет голоморфной функцией внутри L, непрерывной вплоть до контура, а потому представимой рядом полиномов относительно $z = \varphi(w)$, равномерно сходящимся на L. Другими словами, w^m разлагается в ряд полиномов относительно $\varphi(w)$, равномерно сходящийся на окружности $|w| = 1$. Таким образом, из (16) следуют (17). В силу соотношений (17) интеграл типа Коши — Стильтьеса

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi\, d\omega(\theta)}{\xi - w} \tag{18}$$

обращается в нуль всюду вне единичного круга, а потому его предельные значения изнутри круга, почти всюду равные $\omega'(\theta)$, образуют суммируемую функцию. Как показал В. И. Смирнов ([2]), интеграл типа Коши — Стильтьеса (18) есть функция класса H_δ, где $\delta < 1$, а в случае суммируемых предельных значений по теореме того же автора функция класса H_δ принадлежит классу H_1. Итак, наш интеграл типа Коши — Стильтьеса (18) изображает функцию класса H_1. По теореме Рисса эта функция представима интегралом Коши $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi\, d\int\limits_0^\theta \omega'(\theta)\, d\theta}{\xi - w}$, а значит выражение $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi\, d\left[\omega(\theta) - \int\limits_0^\theta \omega'(\theta)\, d\theta\right]}{\xi - w} = 0$ тождественно внутри и вне единичного круга. Полагая $\alpha(\theta) = \omega(\theta) - \int\limits_0^\theta \omega'(\theta)\, d\theta$, из условия

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\xi|=1} \frac{\xi\, d\alpha(\theta)}{\xi - w} \equiv 0 \tag{19}$$

получим $\alpha(\theta) \equiv \text{const}$, т. е. абсолютную непрерывность функции $\omega(\theta)$.

Действительно, из (19) следует

$$\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\, d\alpha(\theta) = 0 \qquad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

т. е. $\alpha(\theta) \equiv \text{const}$.

Чтобы доказать вторую часть теоремы, перепишем условия (17), после интегрирования по частям, в виде

$$\int_{|\xi|=1} \omega(\theta)\, \xi^n\, d\xi = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{20}$$

Рассмотрим выражение $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1} \frac{\omega(\theta)\, d\xi}{\xi - w}$, которое вследствие (20) представляет интеграл Коши; обозначим функцию, им представляемую внутри единичного круга, через $\Phi(w)$, т. е. положим $\Phi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\xi|=1} \frac{\omega(\theta)\, d\xi}{\xi - w}$.
Функция $\Phi(w)$ будет непрерывной в круге $|w| \leqslant 1$, как функция, представимая интегралом Коши, а следовательно интегралом Пуассона от непрерывной функции $\omega(\theta)$. Вспомнив, что в силу конформного отображения $\omega(\theta) = F(s) = f(x(s))$ и значит $\Phi(w) = f(z)$, мы заключаем, то $f(z)$ непрерывна вплоть до контура L.

Возвращаясь к соотношению (12), покажем, что из абсолютной непрерывности $\Phi(s)$ будет вытекать абсолютная непрерывность функции $F(s)$ на сегменте $[0, l]$. Действительно, так как $\Phi(s)$ — абсолютно непрерывная функция на контуре L, то

$$\Phi(s) = \int_0^s \Phi'(s)\, ds = \int_0^s e^{i\varphi}\, d\int_0^s \Phi'(s)\, e^{-i\varphi}\, ds.$$

Вычитая из (12) последнее равенство, получим

$$0 = \int_0^s e^{i\varphi(s)}\, d\Big[F(s) - \int_0^s \Phi'(s)\, e^{-i\varphi(s)}\, ds\Big],$$

откуда $F(s) - \int\limits_0^s \Phi'(s)\, e^{-i\varphi(s)}\, ds \equiv \text{const}$, т. е. $F(s)$ — функция, абсолютно непрерывная на $[0, l]$.

§ 4. Всякий интеграл типа Коши — Стильтьеса (1) может быть представлен в форме $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\Phi(s)}{x - z}$, а именно:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi}\, dF(s)}{x - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\Phi(s)}{x - z},$$

где $\Phi(s) = \int\limits_0^s e^{i\varphi(s)}\, dF(s)$, а $F(s) = \int\limits_0^s e^{-i\varphi(s)}\, d\,\Phi(s)$ (с точностью до придаточного постоянного).

Это замечание позволяет нам предельные свойства интеграла типа

Коши — Стильтьеса вида (1), разобранные в §§ 1 и 2, непосредственно перенести на интегралы вида* $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{d\Phi(s)}{x-z}$.

§ 5. Теореме § 3, представляющей собою распространение известного предложения Рисса на случай произвольного замкнутого спрямляемого контура, можно придать вместо указанной интегральной формы другую, более общую локальную формулировку, а именно:

Если голоморфная функция $f(z)$ внутри спрямляемого контура L представима интегралом Коши

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{x-z},$$

причем граничная функция $f(x)=f(x(s))=\Phi(s)$ с ограниченным изменением относительно дуги s на некоторой дуге $[\alpha, \beta]$ контура L, то эта последняя функция необходимо должна быть абсолютно непрерывной на всякой дуге $[\alpha_1, \beta_1]$, принадлежащей открытой дуге (α, β); кроме того в этом случае $f(z)$ необходимо будет непрерывной вплоть до дуги (α, β).

В силу основной леммы § 1 (см. § 4), мы знаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\left[\int\limits_\alpha^\beta \frac{d\Phi(s)}{x-z_1}-\int\limits_\alpha^\beta \frac{d\Phi(s)}{x-z_2}\right]=f'(x_0) \tag{21}$$

для всех точек x_0 дуги (α, β) за исключением точек x_0 множества меры нуль, не зависящего от ψ_0, равномерно относительно ψ_0, $|\psi_0|\leqslant \frac{\pi}{2}\theta$, $\theta<1$, где положено

$$z_1=x_0+\varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}, \quad z_2=x_0-\varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}.$$

Пусть $[\alpha_1, \beta_1]$ — произвольная дуга, принадлежащая открытой дуге (α, β). Выберем дугу $[\alpha', \beta']$, принадлежащую (α, β), так, чтобы дуга (α', β') содержала внутри себя $[\alpha_1, \beta_1]$, причем в ее концах $x_0'=x(\alpha')$ и $x_0''=x(\beta')$ предполагается выполненным предельное соотношение (21). Рассмотрим замкнутый спрямляемый контур K, состоящий из дуги $[\alpha', \beta']$ и линии P, целиком лежащей внутри L, с концами в точках x_0' и x_0'', некасательной в этих точках к контуру L. Покажем, что производная $f'(z_1)$ стремится к пределу $f'(x_0')$ [соответственно $f'(x_0'')$], когда точка z_1 приближается к точке x_0' (соответственно x_0''), оставаясь на P. Действительно,

$$f'(z_1)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(x)\,dx}{(x-z_1)^2}=\frac{}{2\pi i}\int\limits_{L-[\alpha,\beta]} \frac{f(x)\,dx}{(x-z_1)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\Phi(\alpha)}{x(\alpha)-z_1}-\frac{\Phi(\beta)}{x(\beta)-z_1}\right]+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\alpha^\beta \frac{d\Phi(s)}{x-z_1}. \tag{22}$$

---

* Это указание было сделано А. И. Плеснером после моего доклада на заседании Московского математического общества 22 февраля 1940 г.

Обозначая через z_2 соответствующую z_1 внешнюю точку, получим вместо (22)

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(x)\,dx}{(x-z_2)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-[\alpha,\beta]}\frac{f(x)\,dx}{(x-z_2)^2}+$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\left[\frac{\Phi(\alpha)}{x(\alpha)-z_2}-\frac{\Phi(\beta)}{x(\beta)-z_2}\right]+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d\Phi(s)}{x-z_2}. \tag{22'}$$

Вычитая (22′) из (22) и переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, мы получим вследствие (21)

$$\lim_{z_1\to x_0'} f'(z_1)=f'(x_0').$$

Таким образом, в частности, производная $f'(z)$ будет ограниченной на линии P, а значит $f(z)$ — функция с ограниченным изменением относительно дуги на линии P. Заметив это, обозначая через z любую точку внутри контура K, очевидно, имеем

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{K}\frac{f(x)\,dx}{x-z},$$

причем $f(x)$ будет с ограниченным изменением относительно дуги на всем контуре K.

Вследствие теоремы § 3 мы отсюда заключаем, что $f(x(s))$ абсолютно непрерывна на дуге $[\alpha_1, \beta_1]$ и $f(z)$ непрерывна вплоть до этой дуги, что и требовалось доказать.

Примечание. При доказательстве мы вместе с тем обнаружили справедливость следующего предложения: *при условиях теоремы производная $f'(z)$ почти всюду на дуге $[\alpha, \beta]$ по всем некасательным путям стремится к определенным конечным предельным значениям, равным $f'(x)$*. Это предложение является обобщением нашей прежней теоремы ([1]).

§ 6. Как известно ([1]), необходимыми и достаточными условиями представимости голоморфной функции $f(z)$ внутри спрямляемого контура L интегралом Коши — Лебега являются равенства

$$\int\limits_{L} x^n f(x)\,dx=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{23}$$

Считая, в частности, $f(x)=f(x(s))=\mu(s)$ вещественной суммируемой функцией и принимая за контур L окружность с центром в начале координат радиуса единицы, мы видим, что равенства (23) равносильны утверждению, что $\mu(s)\equiv\text{const}$ почти всюду на окружности.

В связи с этим легко обнаружить справедливость следующего предложения:

Если имеют место равенства $\int\limits_{L} x^n\mu(s)\,dx=0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, где L — любой спрямляемый контур, а $\mu(s)$ — вещественная непрерывная функция дуги s, то $\mu(s)\equiv\text{const}$.

Для доказательства перепишем наши условия в виде

$$\int\limits_{|\xi|=1} \mu[s(\theta)][\varphi(\xi)]^n d\varphi(\xi)=0 \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $z=\varphi(w)$ — функция, реализующая конформное отображение единичного круга $|w|<1$ на область, ограниченную контуром L, а $x(s)$ и $\xi=e^{i\theta}$ — соответствующие точки на границах. Представим последние соотношения в форме

$$\int\limits_{|\xi|=1} \mu[s(\theta)]\,d[\varphi(\xi)]^{n+1}=0, \tag{24}$$

понимая эти интегралы в смысле Стильтьеса. Так как $w^m=[\psi(z)]^m$, $m=1,\ 2,\ \ldots$, где $w=\psi(z)$ — обратная функция для $z=\varphi(w)$, голоморфная внутри L и непрерывная вплоть до контура, то она может быть представлена рядом полиномов относительно $z=\varphi(w)$, равномерно сходящимся на L, т. е. w^m представляется равномерно сходящимся рядом полиномов относительно $\varphi(w)$ на окружности $|w|=1$. Вследствие этого из соотношений (24) вытекают равенства

$$\int\limits_{|\xi|=1} \mu[s(\theta)]\,d\xi^m=0 \quad (m=1,\ 2,\ \ldots) \ \text{ или } \int\limits_{|\xi|=1} \mu[s(\theta)]\,\xi^{m-1}d\xi=0,$$

откуда, в силу сделанного выше замечания, $\mu[s(\theta)]\equiv\text{const}$.

Аналогично, если имеют место равенства

$$\int\limits_{L} \mu(s)\,\frac{dx}{x^n}=0 \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots),$$

где L — любой спрямляемый контур, а $\mu(s)$ — вещественная непрерывная функция, заданная на L, то

$$\mu(s)\equiv\text{const}.$$

Этот случай немедленно сводится к рассмотренному, если положить $x=\frac{1}{x_1}$; тогда $\int\limits_{L_1} \mu_1(\sigma)\,x_1^{n-2}\,dx_1=0$, где $\mu_1(\sigma)=\mu(s)$ в соответственных точках кривых L_1 и L. По доказанному $\mu_1(\sigma)\equiv\text{const}$ на L_1, значит $\mu(s)\equiv\text{const}$ на L.

С л е д с т в и е. Если $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu(s)\,dx}{x-z}=0$ вне L, где $\mu(s)$ — вещественная непрерывная функция, заданная на спрямляемом контуре L, то $\mu(s)\equiv\text{const}$, так как в этом случае $\int\limits_{L}\mu(s)\,x^n\,dx=0$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Если же $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu(s)\,dx}{x-z}=0$ внутри L, то $\mu(s)\equiv 0$, так как в этом случае $\int\limits_{L}\frac{\mu(s)}{x^n}\,dx=0$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ (считая начало координат внутри L, что не уменьшает общности доказательства) и значит $\mu(s)\equiv\text{const}=c$. Далее

$$0=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu(s)\,dx}{x-z}=c\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{dx}{x-z}=c,$$

так как z внутри L. Следовательно $\mu(s)\equiv 0$.

Математический институт
при Московском гос. университете.

Поступило
2. II. 1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Привалов И. И., Интеграл Cauchy, Изв. Сарат. ун-та, 1918.
[2] Смирнов В. И., Sur les formules de Cauchy et de Green, Изв. Ак. Наук СССР (1932), 341.

I. PRIVALOFF. SUR L'INTÉGRALE DU TYPE DE CAUCHY—STIELTJES

RÉSUMÉ

1. Nous appellerons intégrale du type de Cauchy—Stieltjes l'expression

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_0^l \frac{e^{i\varphi(s)}\,dF(s)}{x(s)-z} \qquad (1)$$

où L est une courbe rectifiable de Jordan fermée de longueur l et d'ailleurs arbitraire, φ est l'angle entre la tangente et la direction positive de l'axe des abscisses et $F(s)$ est une fonction complexe de l'arc s, définie sur le segment $[0, l]$ et à variation bornée. Soit x_0 un point quelconque de la ligne L, définie par la valeur s_0 de son arc.

Désignons par L_ε la partie de la ligne L qui est conservée, quand on a enlevé de L un petit arc ayant pour extrémités les points $x(s_0-\varepsilon)$ et $x(s_0+\varepsilon)$. Nous appellerons intégrale singulière la limite finie de l'expression $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}$ pour ε tendant vers zéro, si cette limite existe, et nous poserons dans ce cas

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}.$$

En choisissant le point z sur une certaine droite zx_0 faisant avec la normale un angle ψ_0, $z=x_0\pm\varepsilon i e^{i(\varphi_0+\psi_0)}$, considérons la différence

$$F(\varepsilon, x_0, \psi_0)=\frac{1}{2\pi i}\left[\int_L \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-z}-\int_{L_\varepsilon} \frac{e^{i\varphi}\,dF(s)}{x-x_0}\right];$$

cette différence sera déterminée en tous les points x_0 de la ligne L où il existe des tangentes déterminées à la ligne L.

Lemme fondamental. *L'expression* $\mathfrak{F}(\varepsilon, x_0, \psi_0)$ *tend vers la limite* $\pm\frac{1}{2}F'(s_0)$, *quand* $\varepsilon\to 0$, *pour tous les points* x_0 *de la ligne* L, *sauf peut être les points d'un ensemble de mesure nulle, indépendant de* ψ_0, *et cela uniformément par rapport à* ψ_0, $|\psi_0|\leqslant\frac{\pi}{2}\theta$, $\theta<1$.

J'ai démontré cette proposition antérieurement pour le cas où $F(s)$ est une fonction absolument continue sur $[0, l]$ ([1]).

2. En tenant compte du lemme cité, on peut démontrer le théorème suivant: *presque partout sur le contour* Γ *suivant chaque chemin non tangent, on a la formule*

$$\lim_{z \to x_0} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{i\varphi}\, dF(s)}{x - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{e^{i\varphi}\, dF(s)}{x - x_0} \pm \frac{1}{2} F(s_0) \qquad \text{(I)}$$

où l'intégrale du second membre est définie comme une intégrale singulière.

Dans cette formule Γ est un certain contour partiellement uni (stückweise glatt) ayant un nombre fini de points d'inflexion. La formule (I) a été déja etablie par moi précédement dans le cas où $F(s)$ est une fonction absolument continue sur $[0, l]$ [1].

3. Il est naturel de nommer l'expression

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{i\varphi}\, dF(s)}{x - z}$$

une intégrale de Cauchy—Stieltjes suivant une courbe arbitraire rectifiable L, si ses valeurs limites, obtenues en suivant des chemins situés à l'intérieur de L et non tangents à L coïncident avec la dérivée $F'(s)$ presque partout sur le contour. En vertu du lemme fondamental du § 1, l'intégrale du type de Cauchy — Stieltjes devient une intégrale de Cauchy — Stieltjes dans le cas et dans ce cas seulement où ses valeurs limites prises de l'extérieur de L sont presque partout nulles ou, ce qui est le même, quand l'intégrale du type de Cauchy — Stieltjes à l'extérieur de L est identiquement nulle (en vertu du théorème d'unicité). Il en résulte que les conditions

$$\int_L e^{i\varphi} x^n\, dF(s) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sont nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale du type de Cauchy — Stieltjes devienne une intégrale de Cauchy — Stieltjes.

Nous avons démontré, que *si* $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{e^{i\varphi}\, dF(s)}{x - z} = 0$ *à l'extérieur de* L, *alors la fonction* $F(s)$ *est une fonction absolument continue.*

4. On démontre ensuite le théorème: *pour que l'expression* $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(s)dx}{x - z}$, *où la fonction* $F(s)$ *est à variation bornée sur l'arc* $[\alpha, \beta]$ *de* L, *soit une intégrale de Cauchy, il est nécessaire que* $F(s)$ *soit absolument continue sur chaque arc* $[\alpha_1, \beta_1] \subset [\alpha, \beta]$; *d'ailleurs dans ce cas la fonction représentée par l'intégrale de Cauchy est nécessairement continue partout, l'arc* (α, β) *y compris.*

Ce dernier théorème a été démontré par Riesz dans le cas où L est une circonférence et $F(s)$ est à variation bornée sur cette circonférence.

5. En concluant, signalons une proposition qui est importante pour les applications de l'intégrale du type de Cauchy: *si* $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(s)\, dx}{x - z} = 0$ *à l'extérieur d'un contour rectifiable* L, *où* $\mu(s)$ *est une fonction réelle continue et définie sur* L, *on a* $\mu(s) \equiv \text{const}$, *et si* $\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(s)\, dx}{x - z} = 0$ *à l'intérieur de* L, *on a* $\mu(s) \equiv 0$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 277–318 Série mathématique

М. А. НАЙМАРК

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ СИММЕТРИЧЕСКОГО ОПЕРАТОРА

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дано описание всех спектральных функций симметрического оператора.

В своих исследованиях, посвященных квадратичным формам с бесконечным числом переменных, Гильберт [3] показал, что всякий ограниченный самосопряженный оператор H в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ допускает спектральное представление вида

$$H = \int_a^b \lambda \, dE(\Delta_\lambda),$$

где $E(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$ — проекционный оператор и $E(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to -\infty$, $E(\lambda) \to 1$ при $\lambda \to +\infty$, $E(\lambda_1) \leqslant E(\lambda_2)$ при $\lambda_1 < \lambda_2$. Возник вопрос, в какой мере этот результат можно перенести на неограниченные операторы. Этот вопрос в основном был решен Карлеманом [2], который показал, что для всякого симметрического оператора* H в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существует семейство ограниченных самосопряженных операторов $E(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1° $(E(\lambda) f, f)$ не убывает при возрастании λ,

2° $E(\lambda) f$ — непрерывная слева** функция λ,

3° $E(\lambda) f \to 0$ при $\lambda \to -\infty$, $E(\lambda) f \to f$ при $\lambda \to +\infty$,

4° для любого конечного интервала Δ и любого $f \in \mathfrak{H}$ элемент $E(\Delta) f$ принадлежит области определения H^* и

$$H^* E(\Delta) f = \int_\Delta \lambda \, dE(\lambda) f.$$

Всякое такое семейство будем называть спектральной функцией H; однако в этом случае $E(\lambda)$, вообще говоря, не является проекционным оператором; кроме того данный симметрический оператор имеет, вообще говоря, не одно, а бесчисленное множество таких

---

* По поводу терминологии см. [6]; там же имеется изложение результатов Карлемана в абстрактной форме.

** Если не оговорено особо, то предел всегда рассматривается в смысле сходимости по норме элемента (т. е. сильной сходимости).

спектральных функций. Оператор H имеет лишь одну такую функцию в том случае, когда H — максимальный оператор* и $E(\lambda)$ — проекционный оператор лишь в том случае, когда H — самосопряженный (гипермаксимальный) оператор. В последнем случае спектральную функцию $E(\lambda)$ мы будем называть ортогональной.

Доказательство Карлемана основано на аппроксимировании H последовательностью ограниченных самосопряженных операторов $H^{(n)}$; оказывается, что можно из $H^{(n)}$ выбрать такую подпоследовательность $H^{(k_n)}$, что спектральные функции $E^{(k_n)}(\lambda)$ этих операторов слабо сходятся к некоторой спектральной функции $E(\lambda)$ оператора H. Это доказательство не дает поэтому полного описания всех спектральных функций оператора H.

Возникает вопрос, каким образом можно охарактеризовать все спектральные функции данного симметрического оператора; этому вопросу и посвящена настоящая работа.

В § 1 я показываю, что всякую функцию $E_1(\lambda)$ в пространстве $\mathfrak{H}_1$, удовлетворяющую условиям $1^\circ - 3^\circ$, можно представить в виде проекции некоторой ортогональной спектральной функции $E(\lambda)$ в более широком пространстве $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{H} \supset \mathfrak{H}_1$) по формуле

$$E_1(\lambda) f = E_1 \cdot E(\lambda) f, \quad f \in \mathfrak{H}_1, \tag{I}$$

где E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$.

§ 2 посвящен описанию всех самосопряженных операторов H в пространстве $\mathfrak{H}$, которые на области определения H_1 совпадают с H_1; такие операторы H я называю расширениями** оператора H_1.

§ 3 посвящен основной задаче. Оказывается, что если H — какое-нибудь самосопряженное расширение H_1, а $E(\lambda)$ — спектральная функция H, то функция $E_1(\lambda)$, полученная из $E(\lambda)$ по формуле (I), является спектральной функцией H_1, причем таким образом получаются все спектральные функции оператора H_1. Кроме того оказывается, что всякую спектральную функцию оператора H_1 можно получить указанным выше приемом Карлемана.

В § 4 разобран вопрос о том, когда разные расширения оператора H_1 определяют разные спектральные функции H_1.

Отмечу еще, что все рассматриваемые в этой работе гильбертовы пространства не обязательно сепарабельны.

§ 1. Вспомогательные предложения

ЛЕММА 1. *Пусть A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$, удовлетворяющий условию*

$$0 \leqslant (Af, f) \leqslant (f, f), \quad f \in \mathfrak{H}_1;$$

---

* См., например, ([5]), теорема 15; в дальнейшем я буду придерживаться обозначений и терминологии этой работы.

** Частный случай расширения рассмотрен мною в работе ([5]); там же (см. ([5]), § 6) доказано существование спектральных функций симметрического оператора и в случае несепарабельного пространства.

пусть, далее, $\mathfrak{H}$ — произвольное гильбертово пространство, содержащее $\mathfrak{H}_1$ и такое, что

$$\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1),$$

а E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$. Тогда существует в $\mathfrak{H}$ проекционный оператор E такой, что для всех $f \in \mathfrak{H}_1$

$$Af = E_1 E f. \tag{1}$$

Общим видом всех таких операторов E является $E \sim \| E_{j,k} \|_{j,k=1,2}$, где*

$$\left. \begin{array}{l} E_{11} = A, \quad E_{12} = E_{21}^* = \sqrt{A - A^2}\, U, \quad PE_{22} = E_{22}P = U^*(1 - A) U, \\ E_{22}(1 - P) f = P_2 (1 - P) f, \quad f \in \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1, \end{array} \right\} \tag{2}$$

*U — частично изометрический оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с произвольной начальной областью $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{H}_2$ и конечной** $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{R}(A - A^2)} \subset \mathfrak{H}_1$, $P = U^*U = P_{\mathfrak{M}_2}$ и P_1 — произвольный оператор проектирования в $(1 - P)\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2$.*

Доказательство. Пусть $E \sim \| E_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — проекционный оператор в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий (1). Так как E — самосопряженный оператор, то $E_{jk}^* = E_{kj}$; так как $E^2 = E$, то

$$E_{11}E_{11} + E_{12}E_{21} = E_{11}, \tag{3}$$
$$E_{11}E_{12} + E_{12}E_{22} = E_{12}, \tag{4}$$
$$E_{21}E_{11} + E_{22}E_{21} = E_{21}, \tag{5}$$
$$E_{21}E_{12} + E_{22}E_{22} = E_{22}. \tag{6}$$

В силу (1), $E_{11} = A$; поэтому из (3) получаем, что $E_{12}E_{12}^* = A - A^2$, следовательно $E_{12} = \sqrt{A - A^2}\, U$, где U — частично изометрический оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с конечной областью $\mathfrak{M}_1$. Подставляя выражение для E_{12} в (4), получаем

$$A \sqrt{A - A^2}\, U + \sqrt{A - A^2}\, U E_{22} = \sqrt{A - A^2}\, U,$$

откуда

$$\sqrt{A - A^2}\,(AU + UE_{22} - U) = 0.$$

Так как нулевые подпространства U^* и $\sqrt{A - A^2}$ совпадают, то отсюда следует, что

$$U^*(AU + UE_{22} - U) = 0, \quad U^*AU + U^*UE_{22} - U^*U = 0,$$

т. е.

$$PE_{22} = U^*(1 - A) U.$$

Беря $*$ в обеих частях последнего равенства, получаем

$$PE_{22} = E_{22}P = U^*(1 - A) U.$$

Равенство (5) получается, если применить $*$ к обеим частям (4). Умножая (6) справа на $(1 - P)$, получаем, в силу $E_{12}(1 - P) = 0$,

$$E_{22}^2 (1 - P) = E_{22}(1 - P),$$

* E_{jk} — оператор из $\mathfrak{H}_k$ в $\mathfrak{H}_j$; $E \sim \| E_{jk} \|_{j,k=1,2}$ обозначает, что $E_{jk} f_k = E_j E f_k$, $f_k \in \mathfrak{H}_k$, где E_j — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_j$; $j, k = 1, 2$. Подробнее см. [5], § 4.

** $\mathfrak{R}(A)$ обозначает область изменения оператора A, $\overline{\mathfrak{M}}$ — замыкание $\mathfrak{M}$.

т. е. оператор P_1 в $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2$, определенный равенством

$$P_1 f = E_{22} f, \quad f \in \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2,$$

является проекционным.

Таким образом $E \sim \|E_{jk}\|_{j,k=1,2}$ удовлетворяет (2). Обратно, из (2) непосредственно следуют (3)—(5) и самосопряженность E. Кроме того для $f \in \mathfrak{M}_2$ имеем $f = Pf$, следовательно

$$E_{21}E_{12}f + E_{22}E_{22}f = U^* \sqrt{A - A^2} \sqrt{A - A^2}\, Uf + E_{22}^2 Pf = \\ = U^*(A - A^2)Uf + U^*(1 - A)UU^*(1 - A)Uf. \tag{7}$$

Но UU^* есть оператор проектирования в $\mathfrak{H}_1$ на $\overline{\mathfrak{R}(A - A^2)} = \mathfrak{M}_1$; поэтому $1 - UU^*$ есть оператор проектирования в $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1 = \mathfrak{E}_1 \oplus \mathfrak{E}_2$, где $\mathfrak{E}_0$ и $\mathfrak{E}_1$ — собственные подпространства A для собственных значений $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$. Поэтому $P_{\mathfrak{E}_0}$ и $P_{\mathfrak{E}_1}$, а значит и $UU^* = 1 - P_{\mathfrak{E}_0} - P_{\mathfrak{E}_1}$ перестановочны с A. Кроме того $U^*UU^* = U^*$, следовательно

$$U^*(1 - A)UU^*(1 - A)Uf = U^*UU^*(1 - A)^2 Uf = U^*(1 - A)^2 Uf,$$

и (7) перепишется в виде

$$E_{21}E_{12}f + E_{22}E_{22}f = U^*(A - A^2)Uf + U^*(1 - A)^2 Uf = \\ = U^*(1 - A)Uf = E_{22}Pf = E_{22}f,$$

т. е. (6) имеет место в $\mathfrak{M}_2$. Далее, для $f \in \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2$ имеем $E_{12}f = 0$, следовательно

$$E_{21}E_{12}f + E_{22}E_{22}f = E_{22}^2 f = P_1^2 f = P_1 f = E_{22}f,$$

так что (6) имеет место и в $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2$.

Итак, из (2) следуют (3)—(6), т. е. $E^2 = E$, так что E — проекционный оператор, удовлетворяющий (1).

Определение 1. Оператор E будем называть регулярным, если $\dim(1 - P_1)(\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2) = \dim P_1(\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2) = \dim \mathfrak{H}_2$ и $\dim \mathfrak{H}_2$ — бесконечное кардинальное число.

Очевидно, можно всегда построить регулярный оператор E, удовлетворяющий (1), если только $\dim \mathfrak{H}_2$ — бесконечное кардинальное число, не меньшее $\mathfrak{H}_1$.

Следствие 1. *Пусть A — произвольный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ бесконечной размерности, удовлетворяющий условию*

$$0 \leqslant (Af, f) \leqslant (f, f), \quad f \in \mathfrak{H}.$$

Тогда существует в $\mathfrak{H}$ последовательность проекционных операторов $E^{(n)}$ такая, что для произвольных $f, g \in \mathfrak{H}$

$$(E^{(n)}f, g) \to (Af, g) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$; разобьем $\{\varphi_\alpha\}$ на счетную совокупность систем $\{\varphi_\alpha\}^{(n)}$ так, чтобы мощность каждой из них совпадала с $\dim \mathfrak{H}$, т. е. с мощностью $\{\varphi_\alpha\}$,

и обозначим через $\mathfrak{H}_1^{(n)}$ подпространство, построенное на всех векторах первых n систем $\{\varphi_\alpha\}^{(1)}, \ldots, \{\varphi_\alpha\}^{(n)}$, а через $E_1^{(n)}$ — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1^{(n)}$. Тогда для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$E_1^{(n)} f \to f, \quad n \to \infty; \tag{8}$$

кроме того $\dim \mathfrak{H}_1^{(n)} = \dim \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1^{(n)} = \dim \mathfrak{H}$. Положим для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$A^{(n)} f = E_1^{(n)} A f;$$

$A^{(n)}$ является оператором в $\mathfrak{H}_1^{(n)}$ и для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$(A^{(n)} f, f) = (E_1^{(n)} A f, f) = (Af, E_1^{(n)} f) = (Af, f),$$

следовательно

$$0 \leqslant (A^{(n)} f, f) \leqslant (f, f).$$

Согласно лемме 1 существует поэтому проекционный оператор $E^{(n)}$ в $\mathfrak{H}$ такой, что для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$E_1^{(n)} E^{(n)} f = A^{(n)} f = E_1^{(n)} A f. \tag{9}$$

Пусть теперь $\mathfrak{S}$ — совокупность всех конечных линейных комбинаций $\{\varphi_\alpha\}$. Если $f \in \mathfrak{S}$, то при n достаточно большом $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$, следовательно, при любом $g \in \mathfrak{H}$,

$$\begin{aligned}(E^{(n)} f, g) &= (E^{(n)} f, E_1^{(n)} g) + (E^{(n)} f, (1 - E_1^{(n)}) g) = \\ &= (E_1^{(n)} A f, g) + (E^{(n)} f, (1 - E_1^{(n)}) g).\end{aligned}$$

Но в силу (8)

$$(E_1^{(n)} A f, g) \to (Af, g) \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и

$$\begin{aligned}|(E^{(n)} f, (1 - E_1^{(n)}) g)| &\leqslant |E^{(n)} f| \, |(1 - E_1^{(n)}) g| \leqslant \\ &\leqslant |f| \, |(1 - E_1^{(n)}) g| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,\end{aligned}$$

следовательно

$$(E^{(n)} f, g) \to (Af, g) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{10}$$

Так как $\mathfrak{S}$ плотно в $\mathfrak{H}$ и последовательность $E^{(n)}$ равномерно ограничена по норме, то (10) имеет место для всех $f \in \mathfrak{H}$.

ЛЕММА 2. *Пусть A, B — ограниченные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$, такие, что для любого $f \in \mathfrak{H}_1$*

$$(Af, f) \geqslant 0, \quad (Bf, f) \geqslant 0, \; ((A + B) f, f) \leqslant (f, f). \tag{11}$$

Тогда

$$\mathfrak{R}(BA) \subset \mathfrak{R}(\sqrt{B - B^2}) \tag{12}$$

и для $f \in \mathfrak{R}(\sqrt{A - A^2})$

$$|(B - B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A - A^2)^{-\frac{1}{2}} f| \leqslant |f|, \tag{13}$$

причем $(B - B^2)^{-\frac{1}{2}}$ *и* $(A - A^2)^{-\frac{1}{2}}$ *следует рассматривать как операторы в* $\mathfrak{N}_1 = \overline{\mathfrak{R}(B - B^2)}$ *и* $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{R}(A - A^2)}$.

Доказательство. Для любого $f \in \mathfrak{H}_1$ имеем

$$|A^{\frac{1}{2}}f|^2 = (Af, f) \leqslant ((1-B)f, f) = |(1-B)^{\frac{1}{2}}f|^2 \tag{14}$$

Положим

$$T(1-B)^{\frac{1}{2}}f = A^{\frac{1}{2}}f; \tag{15}$$

в силу (14) это равенство определяет T однозначно на $\mathfrak{R}((1-B)^{\frac{1}{2}})$, причем для $\varphi \in \mathfrak{R}((1-B)^{\frac{1}{2}})$

$$|T\varphi| \leqslant |\varphi|. \tag{16}$$

Поэтому можно доопределить T по непрерывности и на $\overline{\mathfrak{R}((1-B)^{\frac{1}{2}})}$ с сохранением (16). В $\mathfrak{H}_1 \ominus \overline{\mathfrak{R}((1-B)^{\frac{1}{2}})}$ положим $T=0$; тогда T определен во всем $\mathfrak{H}_1$ и удовлетворяет там (16). Но тогда T^* также определен во всем $\mathfrak{H}_1$ и

$$|T^*\varphi| \leqslant |\varphi|. \tag{17}$$

Для любых $f, g \in \mathfrak{H}_1$

$$(f, A^{\frac{1}{2}}g) = (A^{\frac{1}{2}}f, g) = (T(1-B)^{\frac{1}{2}}f, g) = (f, (1-B)^{\frac{1}{2}}T^*g),$$

следовательно

$$A^{\frac{1}{2}}g = (1-B)^{\frac{1}{2}}T^*g. \tag{18}$$

Отсюда

$$BAf = BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}f = B(1-B)^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f = (B-B^2)^{\frac{1}{2}}B^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f,$$

следовательно

$$\mathfrak{R}(BA) \subset \mathfrak{R}((B-B^2)^{\frac{1}{2}}),$$

и соотношение (12) доказано.

Далее в силу (18)

$$\begin{aligned} |(BAf, g)| &= |(BA^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}f, g)| = |(B(1-B)^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f, g)| = \\ &= |(B^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f, (B-B^2)^{\frac{1}{2}}g)| \leqslant |B^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f|\,|(B-B^2)^{\frac{1}{2}}g|; \end{aligned} \tag{19}$$

кроме того, в силу (18) и (17)

$$\begin{gathered} |B^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f|^2 = (BT^*A^{\frac{1}{2}}f, T^*A^{\frac{1}{2}}f) = (T^*A^{\frac{1}{2}}f, T^*A^{\frac{1}{2}}f) - \\ - ((1-B)^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f, (1-B)^{\frac{1}{2}}T^*A^{\frac{1}{2}}f) \leqslant (A^{\frac{1}{2}}f, A^{\frac{1}{2}}f) - \\ - (Af, Af) = ((A-A^2)f, f) = |(A-A^2)^{\frac{1}{2}}f|^2, \end{gathered}$$

поэтому из (19) следует, что

$$|(BAf, g)| \leqslant |(A-A^2)^{\frac{1}{2}}f|\,|(B-B^2)^{\frac{1}{2}}g|. \tag{20}$$

Положим теперь в (20)

$$f = (A - A^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi, \quad \varphi \in \Re((A - A^2)^{\frac{1}{2}}),$$
$$g = (B - B^2)^{-\frac{1}{2}} \psi, \quad \psi \in \Re((B - B^2)^{\frac{1}{2}});$$

тогда

$$\varphi = (A - A^2)^{\frac{1}{2}} f, \quad \psi = (B - B^2)^{\frac{1}{2}} g,$$

и (20) перепишется в виде

$$|(BA(A - A^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi, \ (B - B^2)^{-\frac{1}{2}} \psi)| \leqslant |\varphi| |\psi|. \tag{21}$$

Следовательно в силу (12)

$$|((B - B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A - A^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi, \psi)| \leqslant |\varphi| |\psi|. \tag{22}$$

По непрерывности последнее неравенство имеет место и для всех $\psi \in \overline{\Re((B - B^2)^{\frac{1}{2}})} = \mathfrak{N}_1$. Положим, в частности, $\psi = (B - B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A - - A^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi$; тогда $\psi \in \mathfrak{N}_1$, так что в силу (22)

$$|(B - B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A - A^2)^{-\frac{1}{2}} \varphi| \leqslant |\varphi|,$$

и (13) также доказано.

ЛЕММА 3. *Пусть A, B, $\mathfrak{H}_1$ — те же, что и в лемме 2, а $\mathfrak{H}$ — гильбертово пространство, содержащее $\mathfrak{H}_1$ и такое, что*

$$\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$$

и $\dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ — бесконечное кардинальное число. Тогда существуют в $\mathfrak{H}$ регулярные взаимно-ортогональные проекционные операторы E и F такие, что для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$Af = E_1 E f, \quad Bf = E_1 F f \tag{23}$$

и такие, что $E + F$ также регулярен.

Доказательство. Возьмем в качестве E произвольный регулярный оператор, удовлетворяющий (23). Обозначим, далее, через R замыкание оператора $(B - B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A - A^2)^{-\frac{1}{2}}$. В силу (12) и (13) R определен в $\mathfrak{M}_1$ и его область изменения находится в $\mathfrak{N}_1$, причем

$$|Rf| \leqslant |f|, \quad f \in \mathfrak{M}_1.$$

Поэтому оператор

$$R_1 f = RUf, \quad f \in \mathfrak{M}_2$$

отображает $\mathfrak{M}_2$ в $\mathfrak{N}_1$ и

$$|R_1 f| \leqslant |f|. \tag{24}$$

Положим

$$\mathfrak{E} = P_1 (\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2), \quad \mathfrak{F} = (1 - P_1)(\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2); \tag{25}$$

тогда

$$\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}, \ \mathfrak{E} \perp \mathfrak{F}, \ \dim \mathfrak{E} = \dim \mathfrak{F} = \dim \mathfrak{H}_2 \tag{26}$$

и

$$E_{22}=1 \text{ на } \mathfrak{E}, E_{22}=0 \text{ на } \mathfrak{F}. \quad (27)$$

Разложим, далее, $\mathfrak{F}$ на три взаимно-ортогональных подпространства

$$\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_3,$$

таких, что

$$\dim \mathfrak{F}_1 = \dim \overline{(1-R_1R_1^*)\mathfrak{N}_1}, \quad (28)$$

$$\dim \mathfrak{F}_2 = \dim \mathfrak{F}_3 = \dim \mathfrak{H}_2, \quad (29)$$

и положим

$$\left.\begin{aligned} Vf &= -R_1 f && \text{для } f\in\mathfrak{M}_2, \\ Vf &= (1-R_1R_1^*)^{\frac{1}{2}}V_1 f && \text{для } f\in\mathfrak{F}_1, \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

где V_1 — произвольное изометрическое отображение $\mathfrak{F}_1$ на $\overline{(1-R_1R_1^*)\mathfrak{N}_1}$.

Докажем, что V^* изометрически отображает $\mathfrak{N}_1$ в $\mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{F}_1$. В самом деле, для $\varphi \in \mathfrak{N}_1$

$$V^*\varphi = -R_1^*\varphi + V_1^*(1-R_1R_1^*)^{\frac{1}{2}}\varphi,$$

а так как

$$R_1^*\varphi \in \mathfrak{M}_2, \quad V_1^*(1-R_1R_1^*)^{\frac{1}{2}}\varphi \in \mathfrak{F}_1 \perp \mathfrak{M}_2,$$

то

$$|V^*\varphi|^2 = |R_1^*\varphi|^2 + |V_1^*(1-R_1R_1)^{\frac{1}{2}}\varphi|^2 = (R_1^*\varphi, R_1^*\varphi) +$$

$$+|(1-R_1R_1^*)^{\frac{1}{2}}\varphi|^2 = (R_1R_1^*\varphi,\varphi) + ((1-R_1R_1^*)\varphi,\varphi) = (\varphi,\varphi) = |\varphi|^2.$$

Будем теперь рассматривать V как оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$, полагая $V=0$ на $\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{F}_2\oplus\mathfrak{F}_3$; тогда V — частично изометрический оператор с некоторой начальной областью $\mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{F}_1$ и конечной $\mathfrak{N}_1$. В силу $\mathfrak{F}_2 \perp \mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2$, имеем $\mathfrak{F}_2 \perp \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{N}_2$, $\mathfrak{F}_2 \perp \mathfrak{N}_2$.

Положим

$$\left.\begin{aligned} & F \sim \|F_{jk}\|_{j,k=1,2}, \quad F_{11}=B, \quad F_{12}=F_{21}^*=\sqrt{B-B^2}V, \\ & F_{22}f = V^*(1-B)Vf \quad \text{для } f\in\mathfrak{N}_2, \\ & F_{22}f = f \quad \text{для } f\in\mathfrak{F}_2, \\ & F_{22}f = 0 \quad \text{для } f\in\mathfrak{H}_2\ominus[\mathfrak{N}_2\oplus\mathfrak{F}_2]. \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Согласно лемме 1, F — проекционный оператор и удовлетворяет условию (23). Кроме того в силу

$$F_{22}=1 \text{ на } \mathfrak{F}_2, \ \dim\mathfrak{F}_2=\dim\mathfrak{H}_2,$$

$$F_{22}=0 \text{ на } \mathfrak{H}_2\ominus(\mathfrak{N}_2\oplus\mathfrak{F}_2)\supset\mathfrak{H}_2\ominus(\mathfrak{M}_2\oplus\mathfrak{E}\oplus\mathfrak{F}_1\oplus\mathfrak{F}_2)=\mathfrak{F}_3,$$
$$\dim\mathfrak{F}_3=\dim\mathfrak{H}_2,$$

F регулярен. Далее, так как $\mathfrak{F}_3 \subset \mathfrak{F}$, то $E_{22}=0$ на $\mathfrak{F}_3$, следовательно

$$E_{22}+F_{22}=0 \text{ на } \mathfrak{F}_3, \quad (32)$$

а так как $E_{22}=0$ и на $\mathfrak{F}_2 (\subset \mathfrak{F})$, то

$$E_{22}+F_{22}=1 \text{ на } \mathfrak{F}_2. \quad (33)$$

Докажем теперь, что $EF=0$. Положим для этого в (30) $f=U^*\sqrt{A-A^2}\,g$, $g\in\mathfrak{M}_1$. Очевидно, $f\in\mathfrak{M}_2$, следовательно

$$VU^*\sqrt{A-A^2}\,g=-R_1U^*\sqrt{A-A^2}\,g=-RUU^*\sqrt{A-A^2}\,g=$$
$$=-R\sqrt{A-A^2}\,g=-(B-B^2)^{-\frac{1}{2}}BAg. \tag{34}$$

Отсюда

$$BAg+(B-B^2)^{\frac{1}{2}}VU^*(A-A^2)^{\frac{1}{2}}g=0,$$

т. е.

$$(F_{11}E_{11}+F_{12}E_{21})\,g=0 \text{ для } g\in\mathfrak{M}_1.$$

Для $g\in\mathfrak{H}_1\ominus\mathfrak{M}_1$ имеем $E_{21}g=0$ и

$$|F_{11}E_{11}g|=|BAg|\leqslant|B^{\frac{1}{2}}Ag|\leqslant|(1-A)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}g|=0,$$

поэтому во всем $\mathfrak{H}_1$

$$F_{11}E_{11}+F_{12}E_{21}=0. \tag{35}$$

Далее, применяя к обеим частям (34) $V^*(1-B)$, получаем

$$V^*(1-B)\,VU^*(A-A^2)^{\frac{1}{2}}g=-V^*(1-B)(B-B^2)^{-\frac{1}{2}}BAg=$$
$$=-V^*(B-B^2)^{\frac{1}{2}}Ag.$$

Отсюда

$$V^*(B-B^2)^{\frac{1}{2}}Ag+V^*(1-B)\,VU^*(A-A^2)^{\frac{1}{2}}g=0,$$

т. е.

$$(F_{21}E_{11}+QF_{22}E_{21})\,g=0, \text{ где } g\in\mathfrak{M}_1,\ Q=V^*V=P_{\mathfrak{N}_2}.$$

Для $g\in\mathfrak{H}_1\ominus\mathfrak{M}_1$ имеем $E_{21}g=0$ и

$$|F_{21}E_{11}g|^2=|V^*(B-B^2)^{\frac{1}{2}}Ag|^2=|(B-B^2)^{\frac{1}{2}}Ag|^2=$$
$$=((1-B)\,B^{\frac{1}{2}}Ag,\ B^{\frac{1}{2}}Ag)\leqslant(B^{\frac{1}{2}}Ag,\ B^{\frac{1}{2}}Ag)=$$
$$=(BAg,\ Ag)\leqslant((1-A)Ag,\ g)=0,$$

следовательно

$$F_{21}E_{11}+QF_{22}E_{21}=0 \text{ во всем } \mathfrak{H}_1. \tag{36}$$

Рассмотрим теперь оператор $E_{12}F_{22}(1-Q)$. Для любого $f\in\mathfrak{H}_2$

$$F_{22}(1-Q)f\subset\mathfrak{F}_2\subset\mathfrak{H}_2\ominus\mathfrak{M}_2,$$

следовательно $E_{12}F_{22}(1-Q)=0$. Поэтому и

$$(1-Q)\,F_{22}E_{21}=(E_{12}F_{22}(1-Q))^*=0. \tag{37}$$

Складывая (36) и (37), получаем, что

$$F_{21}E_{11}+F_{22}E_{21}=0. \tag{38}$$

Положим теперь в (30) $f=U^*(1-A)\varphi$, $\varphi\in\mathfrak{R}(A-A^2)$, так что $f\in\mathfrak{M}_2$; мы получим

$$VU^*(1-A)\varphi = -RUU^*(1-A)\varphi = -R(1-A)UU^*\varphi = -R(1-A)\varphi =$$
$$= -(B-B^2)^{-\frac{1}{2}}BA(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}(1-A)\varphi =$$
$$= -(B-B^2)^{-\frac{1}{2}}B(A-A^2)^{\frac{1}{2}}\varphi; \tag{39}$$

отсюда

$$(B-B^2)^{\frac{1}{2}}VU^*(1-A)\varphi + B(A-A^2)^{\frac{1}{2}}\varphi = 0.$$

Так как $\mathfrak{R}(A-A^2)$ плотно в $\mathfrak{M}_1$, то по непрерывности последнее равенство имеет место для всех $\varphi \in \mathfrak{M}_1$. В частности для $\varphi = Uf$, $f \in \mathfrak{H}_2$ имеем $\varphi \in \mathfrak{M}_1$, следовательно

$$(B-B^2)^{\frac{1}{2}}VU^*(1-A)Uf + B(A-A^2)^{\frac{1}{2}}Uf = 0,$$

т. е.

$$F_{11}E_{12} + F_{12}E_{22}P = 0. \tag{40}$$

Рассмотрим теперь оператор $F_{12}E_{22}(1-P)$. Для любого $f \in \mathfrak{H}_2$

$$E_{22}(1-P)f \in \mathfrak{E} = \mathfrak{H}_2 \ominus (\mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_3) \subset \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{N}_2,$$

а так как $F_{12} = 0$ в $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{N}_2$, то

$$F_{12}E_{22}(1-P) = 0. \tag{41}$$

Складывая (40) и (41), получаем, что

$$F_{11}E_{12} + F_{12}E_{22} = 0. \tag{42}$$

Применяя к обеим частям (39) оператор $V^*(1-B)$, получим

$$V^*(1-B)VU^*(1-A)\varphi = -V^*(1-B)(B-B^2)^{-\frac{1}{2}}B(A-A^2)^{\frac{1}{2}}\varphi =$$
$$= -V^*(B-B^2)^{\frac{1}{2}}(A-A^2)^{\frac{1}{2}}\varphi.$$

Снова по непрерывности последнее равенство имеет место для всех $\varphi \in \mathfrak{M}_1$. Полагая $\varphi = Uf$, $f \in \mathfrak{H}_2$, придем к равенству

$$V^*(1-B)VU^*(1-A)Uf + V^*(B-B^2)^{\frac{1}{2}}(A-A^2)^{\frac{1}{2}}Uf = 0,$$

т. е.

$$F_{21}E_{12} + QF_{22}E_{22}P = 0. \tag{43}$$

С другой стороны, для любого $f \in \mathfrak{H}_2$

$$F_{22}(1-Q)f \in \mathfrak{F}_2 \subset \mathfrak{F},$$

а так как $E_{22} = 0$ в $\mathfrak{F}$, то

$$E_{22}F_{22}(1-Q) = 0.$$

Поэтому и

$$(1-Q)F_{22}E_{22} = (E_{22}F_{22}(1-Q))^* = 0. \tag{44}$$

Наконец, в силу

$$E_{22}(1-P)f \in \mathfrak{E} = \mathfrak{H}_2 \ominus (\mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_3) \subset \mathfrak{H}_2 \ominus (\mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{F}_2)$$

и (31)

$$F_{22}E_{22}(1-P)f = 0,$$

так что и

$$Q F_{22} E_{22} (1 - P) = 0. \tag{45}$$

Складывая (43), (44) и (45), получаем

$$F_{21} E_{12} + F_{22} E_{22} = 0. \tag{46}$$

Но равенства (35), (38), (42) и (46) эквивалентны $FE = 0$, следовательно F и E взаимно ортогональны. Поэтому $E + F$ — также проекционный оператор в $\mathfrak{H}$. В силу (32) и (33) он также регулярен, и лемма полностью доказана.

ЛЕММА 4. *Пусть A, B, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}$, E_1 — те же, что и в лемме 3, а G' — регулярный проекционный оператор в $\mathfrak{H}$ такой, что для всех $f \in \mathfrak{H}_1$*

$$E_1 G' f = (A + B) f. \tag{47}$$

Тогда существуют в $\mathfrak{H}$ регулярные проекционные операторы E', F' такие, что

$$E'F' = 0, \quad E' + F' = G', \tag{48}$$

и для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1 E' f = Af, \quad E_1 E' f = Bf. \tag{49}$$

Доказательство. Пусть E и F операторы, построенные в лемме 3. Положим

$$G = E + F, \quad C = A + B; \tag{50}$$

тогда G — регулярный проекционный оператор в $\mathfrak{H}$ и для $f \subset \mathfrak{H}_1$

$$E_1 G f = E_1 E f + E_1 F f = Af + Bf = Cf. \tag{51}$$

Согласно лемме 1 отсюда следует, что $G \sim \|G_{jk}\|_{j,k=1,2}$, где

$$G_{11} = C, \quad G_{12} = G_{21}^* = \sqrt{C - C^2}\, W, \quad G_{22} W^* W = W^* (1 - C) W, \tag{52}$$

а W — частично изометрический оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с некоторой начальной областью $\mathfrak{P}_2 \subset \mathfrak{H}_2$ и конечной $\mathfrak{P}_1 = \overline{\mathfrak{R}(C - C^2)} \subset \mathfrak{H}_1$. Аналогично, в силу (47) $G' \sim \|G'_{jk}\|_{j,k=1,2}$, где

$$G'_{11} = C, \quad G'_{12} = G'^*_{21} = \sqrt{C - C^2}\, W', \quad G'_{22} W'^* W' = W'^* (1 - C) W', \tag{53}$$

а W' — частично изометрический оператор из $\mathfrak{H}_2$ в $\mathfrak{H}_1$ с некоторой начальной областью $\mathfrak{P}'_2 \subset \mathfrak{H}_2$ и конечной $\mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{P}_1 = \overline{\mathfrak{R}(C - C^2)} \subset \mathfrak{H}_1$. Положим для $f \in \mathfrak{P}'_2$

$$T_1 f = W^* W' f; \tag{54}$$

тогда T_1 изометрически отображает $\mathfrak{P}'_2$ на $\mathfrak{P}_2$. Пусть далее

$$\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{P}_2 = \mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B},$$
$$\mathfrak{H}'_2 \ominus \mathfrak{P}'_2 = \mathfrak{A}' \oplus \mathfrak{B}'$$

— разложения $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{P}_2$ и $\mathfrak{H}'_2 \ominus \mathfrak{P}'_2$ на нулевые подпространства G_{22}, $1 - G_{22}$ и G'_{22}, $1 - G'_{22}$ соответственно. В силу регулярности G и G'

$$\dim \mathfrak{A} = \dim \mathfrak{B} = \dim \mathfrak{A}' = \dim \mathfrak{B}' = \dim \mathfrak{H}_2;$$

поэтому существует изометрическое отображение T_2 пространства $\mathfrak{H}'_2 \ominus \mathfrak{P}'_2$ на $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{P}_2$, которое $\mathfrak{A}'$ отображает на $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}'$ на $\mathfrak{B}$. Положим

$$T = T_1 \text{ на } \mathfrak{P}'_2,$$
$$T = T_2 \text{ на } \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{P}'_2;$$

тогда T — унитарный оператор в $\mathfrak{H}_2$. Положим, далее,

$$E'_{11} = E_{11}, \quad E'_{12} = E_{12}T, \quad E'_{21} = T^*E_{21}, \quad E'_{22} = T^*E_{22}T,$$
$$F'_{11} = F_{11}, \quad F'_{12} = F_{12}T, \quad F'_{21} = T^*F_{21}, \quad F'_{22} = T^*F_{22}T.$$

Так как оператор $E \sim \| E_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — проекционный, то

$$E'_{11}E'_{11} + E'_{12}E'_{21} = E_{11}E_{11} + E_{12}TT^*E_{21} = E_{11} = E'_{11},$$
$$E'_{11}E'_{12} + E'_{12}E'_{22} = E_{11}E_{12}T + E_{12}TT^*E_{22}T = E_{12}T = E'_{12},$$
$$E'_{21}E'_{12} + E'_{22}E'_{22} = T^*E_{21}E_{12}T + T^*E_{22}TT^*E_{22}T = T^*E_{22}T = E'_{22},$$

следовательно $E' \sim \| E'_{jk} \|_{j,k-1,2}$ — также проекционный оператор в $\mathfrak{H}$. Нулевые подпространства E'_{22} и $1 - E'_{22}$ являются T^*-образами нулевых подпространств E_{22} и $1 - E_{22}$, следовательно E регулярен. Аналогично, $F \sim \| F_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — регулярный проекционный оператор. Далее,

$$E' + F' \sim \begin{Vmatrix} G_{11} & G_{12}T \\ T^*G_{21} & T^*G_{22}T \end{Vmatrix} \text{ и } G_{11} = G'_{11} = C. \qquad (55)$$

С другой стороны, для $f \in \mathfrak{P}'_2$ имеем $W'f \in \mathfrak{P}_1$, следовательно

$$WTf = WW^*W'f = W'f;$$

для $f \in \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{P}'_2$ имеем $Tf \in \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{P}_2$, следовательно

$$WTf = 0, \quad W'f = 0.$$

Поэтому $W' = WT$ и

$$G_{12}T = \sqrt{C - C^2}\, WT = \sqrt{C - C^2}\, W' = G'_{12}, \quad G'_{21} = T^*G_{21}. \qquad (56)$$

Кроме того для $f \in \mathfrak{P}'_2$ имеем $Tf \in \mathfrak{P}_2$, следовательно

$$G'_{22}f = W'^* (1 - C)\, W'f = T^*W^* (1 - C)\, WTf = T^*G_{22}Tf;$$

далее, если $f \in \mathfrak{A}'$, то $Tf \in \mathfrak{A}$, так что

$$G'_{22}f = 0, \quad T^*G_{22}Tf = T^*0 = 0;$$

если же $f \in \mathfrak{B}'$, то $Tf \in \mathfrak{B}$, следовательно

$$G'_{22}f = f, \quad T^*G_{22}Tf = T^*Tf = f.$$

Таким образом во всем $\mathfrak{H}_2$

$$G'_{22} = T^*G_{22}T. \qquad (57)$$

В силу (55), (56) и (57) $E' + F' = G'$, а так как G'—проекционный оператор, то $E'F' = 0$.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $E_1(\lambda)$ $(-\infty < \lambda < +\infty)$—семейство ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$, удовлетворяющее следующим условиям:*

1° $(E_1(\lambda) f, f)$ *не убывает при возрастании* λ;

2° $E_1(\lambda) f$ *— непрерывная слева функция* λ;

3° $E_1(\lambda) f \to 0$ *при* $\lambda \to -\infty$ *и* $E_1(\lambda) f \to f$ *при* $\lambda \to +\infty$.

Пусть, далее, $\mathfrak{H}$ *— гильбертово пространство, содержащее* $\mathfrak{H}_1$ *и такое, что* $\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ *и* $\dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ *— бесконечно кардинальное число, а* E_1 *— оператор проектирования в* $\mathfrak{H}$ *на* $\mathfrak{H}_1$. *Тогда существует в* $\mathfrak{H}$ *ортогональная * спектральная функция* $E(\lambda)$ *такая, что для* $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1(\lambda) f = E_1 E(\lambda) f. \tag{58}$$

Доказательство. Обозначим через Δ^- и Δ^+ интервалы $(-\infty, 0)$ и $[0, \infty)$, а через $E_1(\Delta^-)$ и $E_1(\Delta^+)$ — соответствующие приращения $E_1(\lambda)$. Тогда в силу 3°

$$E_1(\Delta^-) + E_1(\Delta^+) = 1;$$

кроме того, в силу 1° и 3°,

$$0 \leqslant (E_1(\Delta^-) f, f) \leqslant (f, f), \quad 0 \leqslant (E_1(\Delta^+) f, f) \leqslant (f, f).$$

Положим $A = E_1(\Delta^-)$; согласно лемме 1 существует в $\mathfrak{H}$ регулярный проекционный оператор $F(\Delta^-)$ такой, что для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1(\Delta^-) f = E_1 F(\Delta^-) f. \tag{59}$$

Положим, далее,

$$F(\Delta^+) = 1 - F(\Delta^-);$$

тогда $F(\Delta^+)$ также регулярен, $F(\Delta^-) \cdot F(\Delta^+) = 0$ и для $f \in \mathfrak{H}_2$

$$E_1 F(\Delta^+) f = E_1 (1 - F(\Delta^-)) f = (1 - E_1(\Delta^-)) f = E_1(\Delta^+) f. \tag{60}$$

Положим, наконец,

$$\left.\begin{array}{c} \Delta_n = [n, n+1), \quad \Delta_n^- = (-\infty, n), \quad \Delta_n^+ = [n+1, +\infty), \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{array}\right\} \tag{61}$$

Мы имеем $\Delta^+ = \Delta_0 + \Delta_0^+$, следовательно $E_1(\Delta^+) = E_1(\Delta_0) + E_1(\Delta_0^+)$; согласно лемме 3 можно поэтому построить в $\mathfrak{H}$ регулярные $F(\Delta_0)$ и $F(\Delta_0^+)$ такие, что

$$F(\Delta_0) \cdot F(\Delta_0^+) = 0, \quad F(\Delta_0) + F(\Delta_0^+) = F(\Delta^+)$$

и для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1(\Delta_0) f = E_1 F(\Delta_0) f, \quad E_1(\Delta_0^+) f = E_1 F(\Delta_0^+) f. \tag{62}$$

Очевидно $F(\Delta_0)$ и $F(\Delta_0^+)$ будут также ортогональны к $F(\Delta^-)$. Аналогично, исходя из равенства $\Delta_0^+ = \Delta_1 + \Delta_1^+$, мы построим $F(\Delta_1)$ и $F(\Delta_1^+)$ и т. д. Повторяя этот прием и применяя его также и к $F(\Delta^-)$, получим совокупность регулярных проекционных операторов $F(\Delta_n)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, которые все взаимно ортогональны, причем для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1(\Delta_n) f = E_1 \cdot F(\Delta_n) f.$$

* См. стр. 278.

Каждый из интервалов $\Delta_n = [n, n+1)$ разобьем на интервалы

$$\Delta_n^0 = \left[n, n+\frac{1}{2}\right), \quad \Delta_n^1 = \left[n+\frac{1}{2}, n+1\right)$$

и построим два регулярных проекционных оператора $F(\Delta_n^0)$ и $F(\Delta_n^1)$ такие, что

$$F(\Delta_n^0)\cdot F(\Delta_n^1) = 0, \quad F(\Delta_n^0) + F(\Delta_n^1) = F(\Delta_n)$$

и для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1 F(\Delta_n^0) f = E_1(\Delta_n^0) f, \quad E_1 F(\Delta_n^1) f = E_1(\Delta_n^1) f. \tag{63}$$

Каждый из интервалов Δ_n^p, $p = 0, 1$, мы снова делим пополам на замкнутые слева интервалы Δ_n^{p0}, Δ_n^{p1} и строим соответствующие регулярные операторы $F(\Delta_n^{p0})$, $F(\Delta_n^{p1})$ и т. д. Мы получим, таким образом, совокупность S интервалов Δ вида Δ_n^-, Δ_n^+, Δ_n, $\Delta_n^{p_1 p_2 \ldots p_k}$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $p_1, p_2, \ldots, p_k = 0, 1$; $k = 1, 2, 3, \ldots$ и совокупность соответствующих им регулярных проекционных операторов $F(\Delta)$ такие, что выполняются следующие условия:

1* если $\Delta, \Delta' \in S$, $\Delta\Delta' = 0$, то $F(\Delta)\cdot F(\Delta') = 0$;

2* если $\Delta = \Delta^1 + \ldots + \Delta^k$, $\Delta^1, \ldots, \Delta^k, \Delta \in S$, $\Delta^p \Delta^q = 0$ при $p \neq q$, то
$$F(\Delta) = F(\Delta^1) + \ldots + F(\Delta^k);$$

3* если $\Delta \in S$, то для $f \in \mathfrak{H}_1$
$$E_1 F(\Delta) f = E_1(\Delta) f.$$

Пусть теперь S' — совокупность всех интервалов, представимых в виде

$$\Delta = \Delta^1 + \ldots + \Delta^k, \quad \Delta^1, \ldots, \Delta^k \in S, \quad \Delta^p \Delta^q = 0 \qquad \text{при } p \neq q.$$

Интервалу Δ мы поставим в соответствие проекционный (см. 1*) оператор

$$F(\Delta) = F(\Delta^1) + \ldots + F(\Delta^k).$$

В силу 2* $F(\Delta)$ не зависит от способа представления Δ; кроме того для S' также выполнены условия 1*—3*. Обозначим через $\mathfrak{S}'$ совокупность всех чисел λ, представимых в виде

$$\lambda = n + \frac{p_1}{2} + \frac{p_2}{2^2} + \ldots + \frac{p_k}{2^k}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad p_1, p_2, \ldots, p_k = 0, 1;$$

если $\lambda \in \mathfrak{S}'$, то $\Delta_\lambda = (-\infty, \lambda) \in S'$, так что $F(\Delta_\lambda)$ имеет смысл. Положим для $\lambda \in S'$

$$F(\lambda) = F(\Delta_\lambda); \tag{64}$$

в силу 1* и 2*, при $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathfrak{S}'$

$$F(\lambda_1) \leqslant F(\lambda_2). \tag{65}$$ *

Поэтому для любого действительного λ существует предел

$$G(\lambda) f = \lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu < \lambda,\ \mu \in \mathfrak{S}'}} F(\mu) f; \quad f \in \mathfrak{H}. \tag{66}$$

* Если E и F—два проекционных оператора в $\mathfrak{H}$, то $E \leqslant F$ обозначает, как известно, что $E\mathfrak{H} \subset F\mathfrak{H}$.

Очевидно $G(\lambda)$ — также проекционный оператор, $G(\lambda) \leqslant F(\lambda)$ при $\lambda \in \mathfrak{S}'$ и

$$G(\lambda_1) \leqslant G(\lambda_2) \quad \text{при } \lambda_1 \leqslant \lambda_2, \tag{67}$$

$$F(\lambda_1) \leqslant G(\lambda_2) \quad \text{при } \lambda_1 < \lambda_2, \quad \lambda_1 \in \mathfrak{S}'. \tag{68}$$

По определению $G(\lambda) f$ — непрерывная слева функция λ; кроме того в силу (67) существуют пределы

$$G(-\infty) f = \lim_{\lambda \to -\infty} G(\lambda) f, \quad G(+\infty) f = \lim_{\lambda \to +\infty} G(\lambda) f, \quad f \in \mathfrak{H}.$$

В силу 3* и (64) для $f \in \mathfrak{H}_1$, $\lambda \in \mathfrak{S}'$

$$E_1 F(\lambda) f = E_1 F(\Delta_\lambda) f = E_1(\Delta_\lambda) f = E_1(\lambda) f;$$

поэтому в силу (66) и непрерывности слева $E_1(\lambda) f$

$$E_1 G(\lambda) f = \lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu < \lambda,\, \mu \in \mathfrak{S}'}} E_1 F(\mu) f = \lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu < \lambda,\, \mu \in \mathfrak{S}'}} E_1(\mu) f = E_1(\lambda) f. \tag{69}$$

Отсюда в силу 3* для $f \in \mathfrak{H}_1$

$$G_{11}(-\infty) f = E_1 G(-\infty) f = \lim_{\lambda \to -\infty} E_1 G(\lambda) f = \lim_{\lambda \to -\infty} E_1(\lambda) f = 0,$$

$$(1 - G_{11}(+\infty)) f = E_1 [1 - G(+\infty)] f = \lim_{\lambda \to +\infty} E_1 [1 - G(\lambda)] f =$$
$$= \lim_{\lambda \to +\infty} [f - E_1(\lambda) f] = 0.$$

Но тогда для любого $\varphi = f + g$, $f \in \mathfrak{H}_1$, $g \in \mathfrak{H}_2$

$$E_1 G(-\infty) \varphi = E_1 G(-\infty) f + E_1 G(-\infty) g =$$
$$= G_{11}(-\infty) f + \sqrt{G_{11}(-\infty) - G_{11}^2(-\infty)}\, U g = 0,$$

и аналогично $E_1(1 - G_{11}(+\infty)) \varphi = 0$, $\varphi \in \mathfrak{H}$, так что подпространства

$$\mathfrak{M} = G(-\infty) \mathfrak{H}, \quad \mathfrak{N} = [1 - G(+\infty)] \mathfrak{H}$$

ортогональны к $\mathfrak{H}_1$. Положим

$$E(\lambda) f = G(\lambda) f \quad \text{для } f \in \mathfrak{H} \ominus [\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}],$$
$$E(\lambda) f = G_0(\lambda) f \quad \text{для } f \in \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N},$$

где $G_0(\lambda)$ — произвольная ортогональная спектральная функция в $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$. Очевидно $E(\lambda_1) \leqslant E(\lambda_2)$ при $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$ и $E(\lambda) f$ непрерывная слева функция λ. Кроме того для $f \in \mathfrak{H} \ominus [\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}]$ имеем $f = [G(+\infty) - G(-\infty)] f$, следовательно

$$\lim_{\lambda \to -\infty} E(\lambda) f = G(-\infty) [G(+\infty) - G(-\infty)] f = 0,$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} E(\lambda) f = G(+\infty) [G(+\infty) - G(-\infty)] f = [G(+\infty) - G(-\infty)] f = f.$$

Так как по определению аналогичные равенства имеют место и для $f \in \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, то для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$E(\lambda) f \to 0 \text{ при } \lambda \to -\infty, \quad E(\lambda) f \to f \text{ при } \lambda \to +\infty,$$

так что $E(\lambda)$ — ортогональная спектральная функция в $\mathfrak{H}$. Далее, для $f \in \mathfrak{H}_1$, в силу $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H} \ominus [\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}]$, имеем

$$E_1 E(\lambda) f = E_1 G(\lambda) f = E_1(\lambda) f,$$

и теорема полностью доказана.

Следствие 2. *Пусть $E(\lambda)$ — произвольное семейство ограниченных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ бесконечной размерности, удовлетворяющее условиям 1°—3° теоремы 1. Тогда существует в $\mathfrak{H}$ последовательность ортогональных спектральных функций $E^{(n)}(\lambda)$ такая, что для любого действительного λ и любых $f, g \in \mathfrak{H}$*

$$(E(\lambda) f, g) = \lim_{n \to \infty} (E^{(n)}(\lambda) f, g).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{H}_1^{(n)}$, $\mathfrak{H}_2^{(n)}$, $E_1^{(n)}$ — те же, что и в доказательстве следствия 1. Положим для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$E_1^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)} E(\lambda) f;$$

тогда $E_1^{(n)}(\lambda)$ образует семейство ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}_1^{(n)}$, также удовлетворяющее условиям 1°—3° теоремы 1. Согласно теореме 1 существует поэтому в $\mathfrak{H}$ ортогональная спектральная функция $E^{(n)}(\lambda)$ такая, что для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$E_1^{(n)} E^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)} E(\lambda) f.$$

Повторяя рассуждение, приведенное в доказательстве следствия 1, получим отсюда, что для любых $f, g \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{n \to \infty} (E^{(n)}(\lambda) f, g) = (E(\lambda) f, g).$$

Следствие 3. *Пусть $E_1(\lambda)$ — то же, что и в теореме 1, а $\varphi(\lambda)$ — произвольная непрерывная функция λ; тогда для любого конечного интервала Δ интеграл*

$$\int_\Delta \varphi(\lambda)\, dE_1(\Delta_\lambda) f$$

сходится сильно.

Это утверждение непосредственно следует из равенства

$$\int_\Delta \varphi(\lambda)\, dE_1(\Delta_\lambda) f = E_1 \int_\Delta \varphi(\lambda)\, dE(\Delta_\lambda) f$$

и сильной сходимости $\int_\Delta \varphi(\lambda)\, dE(\Delta_\lambda) f$.

§ 2. Самосопряженные расширения симметрического оператора

Определение 2. Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ — гильбертовы пространства и $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$; пусть, далее, A, A_1 — замкнутые операторы в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$ с областями определения $\mathfrak{D}(A)$, $\mathfrak{D}(A_1)$, плотными в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$. Оператор A назовем рас-

ширением * оператора A_1, если $\mathfrak{D}(A_1) \subset \mathfrak{D}(A)$ и для $f \in \mathfrak{D}(A_1)$

$$Af = A_1 f.$$

ТЕОРЕМА 2. *Пусть A, A_1 — те же, что и в определении 2. Пусть, далее, E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$ и B_1 — оператор в $\mathfrak{H}_1$, определенный в $E_1\mathfrak{D}(A^*)$ равенством*

$$B_1 E_1 f = E_1 A^* f. \tag{1}$$

Тогда

$$A_1^* \supset B_1. \tag{2}$$

Доказательство. Для $\varphi \in E_1\mathfrak{D}(A^*)$, $\varphi = E_1 f$, $f \in \mathfrak{D}(A^*)$ и $g \in \mathfrak{D}(A_1)$ имеем

$$(\varphi, A_1 g) = (E_1 f, A_1 g) = (f, E_1 A_1 g) = (f, A_1 g) = (f, Ag) =$$
$$= (A^* f, g) = (A^* f, E_1 g) = (E_1 A^* f, g); \tag{3}$$

отсюда при $\varphi = 0$ имеем $(E_1 A^* f, g) = 0$, а так как $\mathfrak{D}(A_1)$ плотно в $\mathfrak{H}_1$, то $E_1 A^* f = 0$.

Таким образом (1) определяет B_1 однозначно. Кроме того из (3) и (1) получаем

$$(\varphi, A_1 g) = (B_1 \varphi, g),$$

следовательно $\varphi \in \mathfrak{D}(A_1^*)$ и $A_1^* \varphi = B_1 \varphi$, так что

$$B_1 \subset A_1^*, \quad \tilde{B}_1 \subset A_1^*. \tag{4}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать самосопряженные расширения симметрического оператора. В следующей теореме дается доказательство существования таких расширений, а также полное описание всех их.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$; тогда можно дополнить $\mathfrak{H}_1$ до некоторого пространства $\mathfrak{H}$ и построить в нем самосопряженный оператор H, который является расширением H_1. Обозначим через H_2 оператор с областью определения $\mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{D}(H) \cdot (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$, определенный равенством*

$$H_2 f = Hf \text{ для } f \in \mathfrak{D}(H_2). \tag{5}$$

*Тогда H_2 — замкнутый эрмитов ** оператор в $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$. Пусть λ — произвольное недействительное число и*

$$\mathfrak{M}_\lambda^1 = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}(H_1 - \bar{\lambda}1), \quad \mathfrak{M}_\lambda^2 = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{R}(H_2 - \bar{\lambda}1);$$

тогда

$$\dim(\mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}^1 \oplus \mathfrak{M}_{\bar{\lambda}}^2) = \dim(\mathfrak{M}_\lambda^1 \oplus \mathfrak{M}_\lambda^2), \quad \dim \mathfrak{M}_\lambda^2 \leqslant \dim \mathfrak{M}_\lambda^1 \tag{6}$$

---

* Введенные здесь расширения являются обобщением расширений второго рода, рассмотренных мною в ([5]), а также обычных расширений; последние получаются при $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$.

** Оператор H в $\mathfrak{H}$ называется эрмитовым, если для любых $f, g \in \mathfrak{D}(H)$ имеет место равенство $(Hf, g) = (f, Hg)$; эрмитов оператор H в $\mathfrak{H}$ называется симметрическим, если $\mathfrak{D}(H)$ плотно в $\mathfrak{H}$. Подробнее об эрмитовых операторах см. ([5]).

и $\mathfrak{D}(H)$ *состоит из тех и только тех элементов* $f \in \mathfrak{H}$, *которые представимы в виде*

$$f = f_1 - \varphi_1 + U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2 + f_2 - \varphi_2 + U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2, \qquad (7)$$

где

$$f_1 \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2 \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1 \in \mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}, \quad \varphi_2 \in \mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}, \qquad (8)$$

а $U \sim \| U_{jk} \|_{j, k=1, 2}$ — *изометрическое отображение* $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda} \oplus \mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}$ на $\mathfrak{M}^1_{\lambda} \oplus \mathfrak{M}^2_{\lambda}$ *такое, что*

$$\text{из } U_{12}\varphi_2 = 0 \text{ следует } \varphi_2 = 0. \qquad (9)$$

При этом

$$Hf = H_1 f_1 - \bar\lambda\varphi_1 + \lambda(U_{11}\varphi_1 + U_{12}\varphi_2) + H_2 f_2 - \bar\lambda\varphi_2 + \lambda(U_{21}\varphi_1 + U_{22}\varphi_2). \qquad (10)$$

Обратно, если H_2 — *произвольный замкнутый эрмитов оператор в* $\mathfrak{H}_2$, *удовлетворяющий* (6), $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ *и* $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ — *произвольное изометрическое отображение, удовлетворяющее* (9), *то оператор* H *в* $\mathfrak{H}$, *определенный равенствами* (7) *и* (10), *является самосопряженным расширением* H_1. *При этом* $\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{D}(H_2)$ *и* $Hf = H_2 f$ *при* $f \in \mathfrak{D}(H_2)$.

Доказательство. Пусть H — расширение H_1; из равенства (3), примененного к $A = H$ и $A_1 = H_1$, следует, что при $E_1 f = 0$ также $E_1 H^* f = E_1 Hf = 0$, т. е. если $f \in \mathfrak{D}(H)(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$, то $Hf \in \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$. Поэтому оператор H_2, определенный равенством (5), является оператором в $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$; кроме того очевидно, что H_2 замкнут и эрмитов. Положим* $H_0 = H_1 \oplus H_2$; тогда H_0 — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$,

$$\mathfrak{M}^0_\lambda = \mathfrak{M}^1_\lambda \oplus \mathfrak{M}^2_\lambda, \qquad (11)$$

и $H \supset H_0$. Определим операторы V и V_0 равенствами

$$V(H - \lambda 1) f = (H - \bar\lambda 1) f, \quad f \in \mathfrak{D}(H),$$
$$V_0(H_0 - \lambda 1) f_0 = (H_0 - \bar\lambda 1) f_0, \quad f_0 \in \mathfrak{D}(H_0);$$

очевидно $V_0 \subset V$ и V — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$. Легко видеть, что f и f_0 представимы в виде

$$f = Vg - g, \quad f_0 = V_0 g_0 - g_0, \quad g \in \mathfrak{D}(V) = \mathfrak{H}, \quad g_0 \in \mathfrak{D}(V_0),$$

причем

$$Hf = \lambda Vg - \bar\lambda g, \quad H_0 f_0 = \lambda V_0 g_0 - \bar\lambda g_0.$$

Положим $U = V$ в $\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{D}(V_0) = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{R}(H_0 - \lambda 1) = \mathfrak{M}^0_{\bar\lambda}$; очевидно U изометрически отображает $\mathfrak{M}^0_{\bar\lambda}$ на $\mathfrak{M}^0_\lambda$. Так как g представим в виде

$$g = g_0 + \varphi_0, \quad g_0 \in \mathfrak{D}(V_0), \quad \varphi_0 \in \mathfrak{M}^0_{\bar\lambda},$$

то

$$f = V_0 g_0 - g_0 + U\varphi_0 - \varphi_0 = f_0 - \varphi_0 + U\varphi_0, \qquad (12)$$

причем

$$Hf = \lambda V_0 g_0 - \bar\lambda g_0 + \lambda U\varphi_0 - \bar\lambda\varphi_0 = H_0 f_0 - \bar\lambda\varphi_0 + \lambda U\varphi_0. \qquad (13)$$

* По поводу обозначений см. ([5]), § 4.

Отсюда, пользуясь определением H_0 и (11)—(13), без труда приходим к (7), (8) и (10).

Пусть теперь $U_{12}\varphi_2=0$; положим в (7) $\varphi_1=f_1=f_2=0$. Мы получим

$$f=-\varphi_2+U_{22}\varphi_2\in\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_2=\mathfrak{D}(H_2), \tag{14}$$

$$H_2 f=Hf=-\bar{\lambda}\varphi_2+\lambda U_{22}\varphi_2, \tag{15}$$

откуда

$$H_2 f-\lambda f=(\lambda-\bar{\lambda})\varphi_2.$$

Но левая часть последнего равенства $\in\mathfrak{R}(H_2-\lambda 1)$, а правая $\in\mathfrak{M}^2_{\bar{\lambda}}$; так как $\mathfrak{R}(H_2-\lambda 1)\perp\mathfrak{M}^2_{\bar{\lambda}}$, то $\varphi_2=0$, и условие (9) выполнено. Из (9) следует, что $\dim\mathfrak{M}^2_{\bar{\lambda}}\leqslant\dim\mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}}$.

Пусть, обратно, H_2 и $U\sim\|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ удовлетворяют условиям (6) и (9). Полагая снова $H_0=H_1\oplus H_2$, мы можем свести (7), (8) и (10) к (12) и (13). Докажем, что H однозначно определяется этими равенствами, т. е. что из

$$[f_1-\varphi_1+U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2]+[f_2-\varphi_2+U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2]=0 \tag{16}$$

следует

$$H_1 f_1-\bar{\lambda}\varphi_1+\lambda(U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2)+H_2 f_2-\bar{\lambda}\varphi_2+\lambda(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2)=0. \tag{17}$$

Пусть имеет место (16); в силу взаимной ортогональности обоих слагаемых в скобках отсюда следует, что

$$f_1-\varphi_1+U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2=0, \tag{18}$$

$$f_2-\varphi_2+U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2=0. \tag{19}$$

Так как $\mathfrak{D}(H_1)$, $\mathfrak{M}^1_{\lambda}$, $\mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}}$ — линейно независимы, то из (18) получаем, что

$$f_1=\varphi_1=U_{12}\varphi_2=0;$$

отсюда в силу (9) $\varphi_2=0$. Тогда (19) даст, что и $f_2=0$, так что (17) выполняется.

Отсюда легко получаем, что H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $f_1\in\mathfrak{D}(H_1)$, то, полагая в (7) и (10) $\varphi_1=\varphi_2=f_2=0$, получаем, что $Hf_1=H_1 f_1$, так что H — расширение H_1.

Наконец, если $f\in\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_2$, то из (7) получаем

$$f_1-\varphi_1+U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2=0.$$

Отсюда, как и выше, следует, что $f_1=\varphi_1=\varphi_2=0$, $f=f_2$ и $Hf=H_2 f$, т. е. $\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_2=\mathfrak{D}(H_2)$ и $Hf=H_2 f$ для $f\in\mathfrak{D}(H_2)$.

§ 3. Описание всех спектральных функций симметрического оператора

Определение 3. Пусть H_1 — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_1$; семейство $E_1(\lambda)$, $-\infty<\lambda<+\infty$, ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}_1$ мы будем называть *спектральной функцией* H_1, если

1° $(E_1(\lambda)f, f)$ не убывает при возрастании λ;

2° $E_1(\lambda)f$ — непрерывная слева функция λ;

3° $E_1(\lambda)f \to 0$ при $\lambda \to -\infty$, $E_1(\lambda)f \to f$ при $\lambda \to +\infty$;

4° для любого конечного интервала Δ и произвольного $f \in \mathfrak{H}_1$

$$E_1(\Delta)f \in \mathfrak{D}(H_1^*) \quad \text{и} \quad H_1^* E_1(\Delta) f = \int_\Delta \lambda \, dE_1(\Delta_\lambda) f.$$

Так как $H_1^* = \tilde{H}_1^*$, то H_1 и $\tilde{H}_1$ имеют одни и те же спектральные функции. Поэтому в дальнейшем можно ограничиться рассмотрением замкнутых симметрических операторов.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$, а $E_1(\lambda)$ — одна из его спектральных функций. Тогда для любого $g \in \mathfrak{D}(H_1)$ и любого конечного интервала Δ*

$$E_1(\Delta) H_1 g = \int_\Delta \lambda \, dE_1(\Delta_\lambda) g, \tag{1}$$

$$|H_1 g|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_1(\Delta_\lambda) g, g), \tag{2}$$

причем интеграл справа сходится.

Доказательство. Для любого $f \in \mathfrak{H}_1$

$$\left(f, \int_\Delta \lambda \, dE_1(\Delta_\lambda) g\right) = \left(\int_\Delta \lambda \, dE_1(\Delta_\lambda) f, g\right) = (H_1^* E_1(\Delta) f, g) = \\ = (f, E_1(\Delta) H_1 g);$$

отсюда следует (1). Далее, в силу (1) и 4°

$$(E_1(\Delta) H_1 g, H_1 g) = \int_\Delta \lambda \, d(E_1(\Delta_\lambda) g, H_1 g) = \int_\Delta \lambda \, d(H_1^* E_1(\Delta_\lambda) g, g) = \\ = \int_\Delta \lambda \, d \int_{\Delta_\lambda} \mu \, d(E_1(\Delta_\mu) g, g) = \int_\Delta \lambda^2 d(E_1(\Delta_\lambda) g, g).$$

Полагая $\Delta = (-n, n)$, получаем при $n \to \infty$

$$|H_1 g|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_1(\Delta_\lambda) g, g).$$

ТЕОРЕМА 5. *Пусть H_1 — замкнутый симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$, а $E_1(\lambda)$ — одна из его спектральных функций. Пусть, далее, $\mathfrak{H}$ — произвольное гильбертово пространство, содержащее $\mathfrak{H}_1$ и такое, что $\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$, а E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$. Тогда существует в $\mathfrak{H}$ самосопряженное расширение H оператора H_1 такое, что для всех $f \in \mathfrak{H}_1$*

$$E_1(\lambda) f = E_1 \cdot E(\lambda) f, \tag{3}$$

где $E(\lambda)$ — спектральная функция H.

Обратно, всякое самосопряженное расширение H оператора H_1 определяет по формуле (3) некоторую спектральную функцию $E_1(\lambda)$ опера-

тора H_1. *Если* $E(\lambda)$ — *произвольная ортогональная спектральная функция в* $\mathfrak{H}$, *а* H — *соответствующий самосопряженный оператор, то* $E_1(\lambda)$ *в* (3) *является спектральной функцией некоторого симметрического оператора* H_1 *в* $\mathfrak{H}_1$ *тогда и только тогда, когда* H — *расширение* H_1.

Доказательство. Второе утверждение является следствием третьего. Докажем поэтому последнее. Пусть $E_1(\lambda)$ — спектральная функция H_1. Согласно теореме 4 для $g \in \mathfrak{D}(H_1)$ существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 d(E_1(\Delta_\lambda) g, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E_1 E(\Delta_\lambda) g, g) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\Delta_\lambda) g, E_1 g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\Delta_\lambda) g, g); \qquad (4)$$

поэтому $g \in \mathfrak{D}(H)$, так что $\mathfrak{D}(H_1) \subset \mathfrak{D}(H)$ и (4) перепишется в виде

$$|H_1 g|^2 = |Hg|^2, \quad |H_1 g| = |Hg|. \qquad (5)$$

Кроме того при $\Delta = (-n, n)$

$$E_1(\Delta) H_1 g = \int_{-n}^{n} \lambda\, dE_1(\Delta_\lambda) g = E_1 \int_{-n}^{n} \lambda\, dE(\Delta_\lambda) g;$$

переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$H_1 g = E_1 H g.$$

Поэтому (5) перепишется в виде

$$|E_1 H g| = |Hg|;$$

по определению проекции отсюда следует, что $H_1 g = E_1 H g = Hg$, так что H — расширение H_1. Пусть, обратно, H — самосопряженное расширение H_1, $E(\lambda)$ — спектральная функция H и $E_1(\lambda)$ — оператор, определенный равенством (3). Условия 1°—3° для $E_1(\lambda)$, очевидно, выполняются. Кроме того для любого конечного интервала Δ и произвольного $f \in \mathfrak{H}$

$$E(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H), \quad HE(\Delta) f = \int_{\Delta} \lambda\, dE(\Delta_\lambda) f.$$

Согласно теореме 2 отсюда следует, что

$$E_1 E(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H_1^*) \text{ и } H_1^* E_1 E(\Delta) f = E_1 H E(\Delta) f = E_1 \int_{\Delta} \lambda\, dE(\Delta_\lambda) f.$$

В частности, при $f \in \mathfrak{H}_1$ получаем, что

$$E_1(\Delta) f = E_1 E(\Delta) f \in \mathfrak{D}(H_1^*),$$

$$H_1^* E_1(\Delta) f = E_1 \int_{\Delta} \lambda\, dE(\Delta_\lambda) f = \int_{\Delta} \lambda\, dE_1(\Delta_\lambda) f,$$

так что $E_1(\lambda)$ — спектральная функция H_1.

Перейдем теперь к доказательству первого утверждения. Пусть $E_1(\lambda)$ — спектральная функция H_1. По теореме 1 существует в $\mathfrak{H}$ ортогональная спектральная функция $E(\lambda)$, удовлетворяющая (3). Пусть H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, соответствующий $E(\lambda)$. Тогда, по доказанному выше, H — расширение H_1.

Определение 4. Будем говорить, что H определяет $E_1(\lambda)$, если они связаны так, как в теореме 5.

Следствие 4. *Для того чтобы спектральное семейство $E_1(\lambda)$ определялось расширением второго рода* оператора H_1, необходимо и достаточно, чтобы из*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_1(\Delta_\lambda) f, f) < +\infty$$

следовало $f \in \mathfrak{D}(H_1)$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 15 ([5]). Для доказательства достаточности заметим, что для $f \in \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_1$ сходится

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\Delta_\lambda) f, f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\Delta_\lambda) f, E_1 f) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_1(\Delta_\lambda) f, f),$$

так что $f \in \mathfrak{D}(H_1)$. Поэтому $\mathfrak{D}(H_1) = \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_1$ и H — расширение второго рода оператора H_1.

Следствие 5. *Существуют семейства ограниченных самосопряженных операторов $E_1(\lambda)$ в $\mathfrak{H}_1$, которые удовлетворяют условиям 1°—3° определения 3, но не являются спектральной функцией никакого симметрического оператора.*

Доказательство. Пусть H — неограниченный оператор в $\mathfrak{H}$ такой, что**

$$\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_1 = (0), \tag{6}$$

$E(\lambda)$ — спектральная функция H и

$$E_1(\lambda) f = E_1 E(\lambda) f, \quad f \in \mathfrak{H}_1,$$

где E_1 — оператор проектирования в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$. Если бы $E_1(\lambda)$ было спектральной функцией некоторого симметрического оператора H_1, то по теореме 5 было бы $\mathfrak{D}(H_1) \subset \mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_1$, что противоречит (6).

Следствие 6. *Всякое решение g уравнения*

$$H_1^* g - \lambda g = h, \; I(\lambda) \neq 0, \quad h \in \mathfrak{H}_1, \tag{7}$$

удовлетворяющее условию

$$I(H_1^* g, g) \cdot I(\lambda) \leqslant 0, \tag{8}$$

можно представить в виде

$$g = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu) h}{\mu - \lambda}, \tag{9}$$

---

* Определение расширения второго рода см. ([5]), § 1.

** См., например, ([1]), лемма 4. 2.

где $E_1(\mu)$ — некоторая спектральная функция H_1. Обратно, при любой спектральной функции $E_1(\mu)$, (9) представляет решение уравнения (7), удовлетворяющее (8).

Доказательство. Пусть g — решение $(7)_1$; так как $g \in \mathfrak{D}(H_1^*)$, то g можно представить в виде

$$g = f - \varphi + \psi, \quad f \in \mathfrak{D}(H_1), \quad \varphi \in \mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}}, \quad \psi \in \mathfrak{M}^1_{\lambda}, \tag{10}$$

причем

$$H_1^* g = H_1 f - \bar{\lambda}\varphi + \lambda\psi. \tag{11}$$

Отсюда легко выводим, что

$$I(H_1^* g, g) = I(\lambda)(|\psi|^2 - |\varphi|^2); \tag{12}$$

поэтому в силу (8) должно быть $|\psi| \leqslant |\varphi|$ и можно, очевидно, выбрать $U \sim \| U_{jk} \|_{j,k=1,2}$ в теореме 3 так, чтобы было $U_{11}\varphi = \psi$. Пусть H и $E_1(\mu)$ — самосопряженное расширение и спектральная функция оператора H_1, соответствующие U, а $E(\mu)$ — спектральная функция H. Рассмотрим уравнение

$$Hg' - \lambda g' = h; \tag{13}$$

полагая

$$g' = f_1' - \varphi_1' + U_{11}\varphi_1' + U_{12}\varphi_2' + f_2' - \varphi_2' + U_{21}\varphi_1' + U_{22}\varphi_2',$$
$$f_1' \in \mathfrak{D}(H_1), \quad f_2' \in \mathfrak{D}(H_2), \quad \varphi_1' \in \mathfrak{M}^1_{\bar{\lambda}}, \quad \varphi_2' \in \mathfrak{M}^2_{\bar{\lambda}},$$

мы получаем

$$h = [H_1 f_1' - \lambda f_1' + (\lambda - \bar{\lambda})\varphi_1'] + [H_2 f_2' - \lambda f_2' + (\lambda - \bar{\lambda})\varphi_2']. \tag{14}$$

Так как $h \in \mathfrak{H}_1$, то должно быть $H_2 f_2' - \lambda f_2' + (\lambda - \bar{\lambda})\varphi_2' = 0$, следовательно $f_2' = \varphi_2' = 0$, так что

$$g' = f_1' + \varphi_1' + U_{11}\varphi_1' + U_{21}\varphi_1'. \tag{15}$$

С другой стороны, из (7), (10) и (11) следует, что

$$h = H_1 f - \lambda f + (\lambda - \bar{\lambda})\varphi_1,$$

следовательно в силу (14) $f = f_1'$, $\varphi_1 = \varphi_1'$ и $U_{11}\varphi_1' = U_{11}\varphi_1 = \psi_1$. Отсюда $E_1 g' = f_1 - \varphi_1 + \psi_1 = g$ и

$$g = E_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE(\mu)h}{\mu - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dE_1(\mu)h}{\mu - \lambda}.$$

Обратно, если g представим по формуле (9), то $g = E_1 g'$, где g' — решение (13), а H — расширение H_1, определяющее $E_1(\mu)$. В силу предыдущего отсюда следует (7) и (10), где $|\psi| = |U_{11}\varphi| \leqslant |\varphi|$; согласно (12) это означает, что g удовлетворяет условию (8).

Определение 5. Пусть $H^{(n)}$ — последовательность ограниченных самосопряженных операторов в $\mathfrak{H}$; пределом этой последовательности назовем оператор $H^{(0)}$, определенный для тех и только тех f, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty} H^{(n)} f$, причем

$$H^{(0)} f = \lim H^{(n)} f.$$

Очевидно, $H^{(0)}$ — эрмитов оператор в $\mathfrak{H}$.

Определение 6*. Будем говорить, что последовательность ограниченных самосопряженных операторов $H^{(n)}$ в $\mathfrak{H}$ аппроксимирует симметрический оператор H в $\mathfrak{H}$, если предел $H^{(0)}$ этой последовательности определен на множестве, плотном в $\mathfrak{H}$ и если $\tilde{H}^{(0)} \supset H$.

Определение 7. Спектральную функцию $E(\lambda)$ симметрического оператора H в $\mathfrak{H}$ будем называть карлемановской, если существует в $\mathfrak{H}$ последовательность ограниченных самосопряженных операторов $H^{(n)}$, обладающая следующими свойствами:

1* спектр каждого из операторов $H^{(n)}$ состоит из конечного числа собственных значений;

2* последовательность $H^{(n)}$ аппроксимирует H;

3* последовательность $E^{(n)}(\lambda)$ спектральных функций $H^{(n)}$ слабо сходится к $E(\lambda)$.

ЛЕММА 5. *Пусть A — замкнутый линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения $\mathfrak{D}(A)$; тогда существует в $\mathfrak{D}(A)$ полная ортонормальная система $\{\varphi_\alpha\}$ такая, что оператор A_0, определенный на $\{\varphi_\alpha\}$ равенством*

$$A_0\varphi_\alpha = A\varphi_\alpha, \tag{16}$$

удовлетворяет соотношению **

$$\tilde{A}_0 = A. \tag{17}$$

Доказательство. Положим $H = \sqrt{A^*A}$; согласно теореме Неймана (4) H — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(H)$ и для $f \in \mathfrak{D}(H)$

$$|Af| = |Hf|. \tag{18}$$

Пусть $F(\lambda)$ — спектральная функция H; положим

$$\Delta_n = [n, n+1), \quad \mathfrak{H}_n = E(\Delta_n)\mathfrak{H}, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

В каждом из подпространств $\mathfrak{H}_n$ выберем полную ортонормальную систему; все они вместе составят полную ортонормальную систему $\{\varphi_\alpha\}$ в $\mathfrak{H}$, все элементы которой принадлежат $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(H)$. Обозначим через A_0 и H_0 операторы, определенные на $\{\varphi_\alpha\}$ равенствами (16) и

$$H_0\varphi_\alpha = H\varphi_\alpha. \tag{19}$$

Составим оператор $\tilde{H}_0$; очевидно, $\tilde{H}_0 \subset H$. Так как H ограничен в каждом из подпространств $\mathfrak{H}_n$, $\tilde{H}_0$ определен во всем $\mathfrak{H}_n$ и совпадает там с H. Если теперь $f \in \mathfrak{D}(H) = \mathfrak{D}(A)$, то, полагая

$$f_n = \sum_{k=-n}^{n} F(\Delta_k) f,$$

имеем

$$\tilde{H}_0 f_n = \sum_{k=-n}^{n} \tilde{H}_0 F(\Delta_k) f = \sum_{k=-n}^{n} \int_{\Delta_k} \lambda\, dF(\Delta_k) f = \int_{-n}^{n+1} \lambda\, dE(\Delta_\lambda) f.$$

---

* Определения 5 и 6 имеются у Стона (6), глава IX, § 3.

** $\tilde{A}_0$ обозначает линейное замыкание оператора A_0.

Поэтому

$$|f-f_n| \to 0, \quad |Hf-\tilde{H}_0 f_n| \to 0 \quad \text{при } n \to \infty. \tag{20}$$

Но в силу (18) $\tilde{A}_0$ также определен во всем $\mathfrak{H}_n$ и совпадает там с A. Поэтому (20) перепишется в виде

$$|f-f_n| \to 0, \quad |Af-\tilde{A}_0 f_n| = |A(f-f_n)| = |H(f-f_n)| = |Hf-\tilde{H}_0 f_n| \to 0$$
$$\text{при } n \to \infty;$$

так как $\tilde{A}_0$ — замкнутый оператор, то $f \in \mathfrak{D}(\tilde{A}_0)$ и $\tilde{A}_0 f = Af$, так что $\tilde{A}_0 = A$.

ТЕОРЕМА 6. *Всякая спектральная функция симметрического оператора является карлемановской.*

Доказательство. Пусть H — замкнутый симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, а $E(\lambda)$ — одна из его спектральных функций. Так как H — замкнутый оператор и его область определения плотна в $\mathfrak{H}$, то существует в $\mathfrak{D}(H)$ полная ортонормальная система $\{\varphi_\alpha\}$ такая, что оператор H_0, определенный по $\{\varphi_\alpha\}$ равенством

$$H_0 \varphi_\alpha = H \varphi_\alpha, \tag{21}$$

удовлетворяет условию

$$\tilde{H}_0 = H. \tag{22}$$

Пусть $\mathfrak{H}_1^{(n)}$, $E_1^{(n)}$ — пространство и проекционный оператор, построенные по $\{\varphi_\alpha\}$, как в доказательстве следствия 1. Положим для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$E_1^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)} E(\lambda) f;$$

так как

$$\dim(\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1^{(n)}) = \dim \mathfrak{H}_1^{(n)} = \dim \mathfrak{H},$$

то существует в $\mathfrak{H}$ ортогональная спектральная функция $E^{(n)}(\lambda)$ такая, что для $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$

$$E_1^{(n)} E^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)} E(\lambda) f. \tag{23}$$

Положим

$$\Delta_{-n^2-1}^{(n)} = (-\infty, -n); \quad \Delta_k^{(n)} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right),$$
$$k = -n^2, \ldots, n^2-1; \quad \Delta_{n^2}^{(n)} = [n, \infty), \tag{24}$$

$$H^{(n)} = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)} E^{(n)}(\Delta_k^{(n)}), \tag{25}$$

где $\lambda_k^{(n)} = \frac{k+1}{n}$, $k = -n^2-1, \ldots, n^2-1$ и $\lambda_{n^2}^{(n)}$ — любое число из $[n, \infty)$. Очевидно, $H^{(n)}$ — ограниченный самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, спектр которого состоит из конечного числа собственных значений $\lambda_k^{(n)}$, $k = -n^2-1, \ldots, n^2$.

Пусть φ — один из элементов системы $\{\varphi_\alpha\}$; тогда $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$. Кроме того при n достаточно большом $\varphi \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$, следовательно

$$E_1^{(n)} H^{(n)} \varphi = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)} E_1^{(n)} E^{(n)}(\Delta_k^{(n)}) \varphi = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)} E_1^{(n)} E(\Delta_k^{(n)}) \varphi, \tag{26}$$

$$|H^{(n)}\varphi|^2 = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)2}(E^{(n)}(\Delta_k^{(n)})\varphi,\varphi) = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)2}(E_1^{(n)}E^{(n)}(\Delta_k^{(n)})\varphi,\varphi) =$$
$$= \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)2}(E_1^{(n)}E(\Delta_k^{(n)})\varphi,\varphi) = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)2}(E(\Delta_k^{(n)})\varphi,\ \varphi) \to$$
$$\to \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(E(\Delta_\lambda)\varphi,\ \varphi) = |H\varphi|^2, \quad \text{при } n\to\infty. \tag{27}$$

Поэтому последовательность $|H^{(n)}\varphi|$ ограничена; пусть $|H^{(n)}\varphi| < C$. Кроме того для любого $f \in \mathfrak{H}$

$$(H^{(n)}\varphi,\ f) = (E_1^{(n)}H^{(n)}\varphi,\ f) + (H^{(n)}\varphi,\ (1-E_1^{(n)})f).$$

Но для первого слагаемого в силу (26) имеем

$$(E_1^{(n)}H^{(n)}\varphi,\ f) = \Big(\sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)}E_1^{(n)}E(\Delta_k^{(n)})\varphi,\ f\Big) = \Big(\sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)}E(\Delta_k^{(n)})\varphi,\ E_1^{(n)}f)\Big) \to$$
$$\to \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\Delta_\lambda)\varphi, f\Big) = (H\varphi,\ f) \quad \text{при } n\to\infty$$

и для второго

$$|(H^{(n)}\varphi,\ (1-E_1^{(n)})f)| \leqslant C\,|(1-E_1^{(n)})f| \to 0 \quad \text{при } n\to\infty.$$

Таким образом $(H^{(n)}\varphi,\ f) \to (H\varphi,\ f)$ при $n\to\infty$; в частности, полагая $f = H\varphi$, получаем

$$(H^{(n)}\varphi,\ H\varphi) \to |H\varphi|^2.$$

Но тогда в силу (27)

$$|H\varphi - H^{(n)}\varphi|^2 = |H\varphi|^2 - 2\Re\,(H\varphi,\ H^{(n)}\varphi) + |H^{(n)}\varphi|^2 \to$$
$$\to |H\varphi|^2 - 2\,|H\varphi|^2 + |H\varphi|^2 = 0.$$

Итак, предел $H^{(0)}$ последовательности $H^{(n)}$ является расширением оператора H_0, определенного равенством (26), $H^{(0)} \supset H_0$. Отсюда в силу (22)

$$\tilde{H}^{(0)} \supset \tilde{H}_0 = H,$$

т. е. последовательность $H^{(n)}$ аппроксимирует H.

Далее, спектральной функцией $H^{(n)}$ является

$$F^{(n)}(\lambda) = \sum_{\lambda_k^{(n)}<\lambda} E^{(n)}(\Delta_k^{(n)});$$

кроме того, обозначая через $\lambda^{(n)}$ наибольшее из чисел $\lambda_k^{(n)} < \lambda$, имеем

$$\lambda^{(n)} \to \lambda \quad \text{при } n\to\infty.$$

Но тогда для $f \in \mathfrak{H}_1^{(m)}$, $m < n$,

$$E_1^{(n)}F^{(n)}(\lambda)f = \sum_{\lambda_k^{(n)}<\lambda} E_1^{(n)}E^{(n)}(\Delta_k^{(n)})f = \sum_{\lambda_k^{(n)}<\lambda} E_1^{(n)}E(\Delta_k^{(n)})f = E_1^{(n)}E(\lambda^{(n)})f.$$

а значит для любого $g \in \mathfrak{H}$

$$(F^{(n)}(\lambda) f, g) = (E_1^{(n)} F^{(n)}(\lambda) f, g) + (F^{(n)}(\lambda) f, (1 - E_1^{(n)}) g) = \\ = (E_1^{(n)} E(\lambda^{(n)}) f, g) + (F^{(n)}(\lambda) f, (1 - E_1^{(n)}) g).$$

С другой стороны, так как функция $E(\lambda) f$ непрерывна слева, то

$$(E_1^{(n)} E(\lambda^{(n)}) f, g) = (E(\lambda^{(n)}) f, E_1^{(n)} g) \to (E(\lambda) f, g);$$

кроме того

$$|(F^{(n)}(\lambda) f, (1 - E_1^{n}) g)| \leqslant |f| \, |(1 - E_1^{(n)}) g| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому

$$(F^{(n)}(\lambda) f, g) \to (E(\lambda) f, g) \quad \text{при } n \to \infty \tag{28}$$

для всех λ, $-\infty < \lambda < +\infty$, всех $g \in \mathfrak{H}$ и всех конечных линейных комбинаций φ_α. Так как последние плотны в $\mathfrak{H}$, а последовательность $F^{(n)}(\lambda)$ равномерно ограничена, то (28) имеет место и для всех $f \in \mathfrak{H}$. Поэтому $E(\lambda)$ — карлемановская спектральная функция оператора H.

П р и м е р. Пусть H_1 — оператор, определенный якобиевой матрицей

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix} \right\|, \quad a_k,\ b_k \text{ — вещественные числа, } b_k > 0,$$

и некоторой ортонормальной системой $g_1, g_2, g_3, \ldots$ в $\mathfrak{H}_1$. Полагая

$$b_0 = 1,\ P_0(\lambda) = 0,\ P_1(\lambda) = 1,\ P_k(\lambda) = \frac{(\lambda - a_k) P_{k-1}(\lambda) - b_{k-2} P_{k-2}(\lambda)}{b_{k-1}},\ k = 2, 3, \ldots$$

без труда находим, что $g_k = P_k(H_1) g_1$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Определим индекс дефекта H_1; уравнение

$$H_1^* f - \lambda f = 0, \quad I(\lambda) \neq 0, \quad f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k g_k \tag{29}$$

эквивалентно системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} & (a_1 - \lambda) x_1 + b_1 x_2 = 0, \\ & b_k x_{k-1} + (a_k - \lambda) x_k + b_k x_{k+1} = 0, \qquad k = 2, 3, 4, \ldots \end{aligned} \right\} \tag{30}$$

и условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty. \tag{31}$$

Из (30) находим, что $x_k = P_k(\lambda) x_1$; следовательно должно быть $\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2 < +\infty$. Итак, если $\sum_{k=1}^{\infty} |P_k(\lambda)|^2$ расходится, то индекс дефекта H_1 равен $(0, 0)$ и H_1 — самосопряженный оператор; если же этот ряд сходится для некоторого λ, то он сходится и для $\overline{\lambda}$ ($P_k(\lambda)$ — полином с действительными коэффициентами) и существует с точностью до

множителя одно решение (29). Следовательно в этом случае H_1 имеет индекс дефекта (1, 1) и $\sum_{k=1}^{\infty}|P_k(\lambda)|^2 < +\infty$ для любого недействительного λ. (Легко видеть, что это соотношение имеет тогда место и для всех действительных значений λ.)

Пусть $E_1(\mu)$ — одна из спектральных функций H_1; положим

$$\sigma(\mu) = (E_1(\mu)\, g_1, g_1).$$

Тогда $\sigma(\mu)$ — непрерывная слева неубывающая функция μ и $\sigma(\mu) \to 0$ при $\mu \to -\infty$, $\sigma(\mu) \to 1$ при $\mu \to +\infty$. Кроме того

$$(H_1^n g_1, g_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n\, d(E_1(\lambda)\, g_1, g_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n\, d\sigma(\lambda).$$

Числа $s_n = (H_1^n g_1, g_1)$ мы будем называть **моментами*** матрицы A. Пусть, обратно, некоторая неубывающая и непрерывная слева функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условию

$$s_n = (H_1^n g_1, g_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^n\, d\sigma(\lambda), \tag{32}$$

а также условиям $\sigma(\lambda) \to 0, 1$ при $\lambda \to -\infty, +\infty$ соответственно. Тогда, как легко видеть, для любых двух полиномов $P(\lambda)$, $Q(\lambda)$

$$(P(H_1)\, g_1, Q(H_1)\, g_1) = \int_{\infty}^{\infty} P(\lambda)\, \overline{Q(\lambda)}\, d\sigma(\lambda), \tag{33}$$

и в частности

$$|P(H_1)\, g_1|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |P(\lambda)|^2\, d\sigma(\lambda). \tag{34}$$

Положим для $h_1 = Q_1(H_1)\, g_1$, $h_2 = Q_2(H_1)\, g_1$, ($Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$ — полиномы)

$$(E_1(\lambda)\, h_1, h_2) = \int_{-\infty}^{\lambda} Q_1(\mu)\, \overline{Q_2(\mu)}\, d\sigma(\mu); \tag{35}$$

мы имеем

$$|(E_1(\lambda)\, h_1, h_2)|^2 \leqslant \int_{-\infty}^{\lambda} |Q_1(\mu)|^2\, d\sigma(\mu) \cdot \int_{-\infty}^{\lambda} |Q_2(\mu)|^2\, d\sigma(\mu) \leqslant |h_1|^2 \cdot |h_2|^2,$$

так что (35) определяет ограниченный самосопряженный оператор $E_1(\lambda)$ на замкнутой оболочке всех h_1, т. е. на $\mathfrak{H}_1$, ибо среди h_1 встречаются все $g_n = P_n(H_1)\, g_1$. Из (35) непосредственно следует, что $E_1(\lambda) \to 0$ и 1

---

* Как известно, числа s_n ($n = 0, 1, 2, 3, \ldots, s_0 = 1$) являются моментами некоторой симметрической якобиевой матрицы с положительными элементами над главной диагональю в том и только в том случае, когда все определители $|s_{i+k}|_{i,\,k=0,\ldots,\,n}$ положительны.

при $\lambda \to -\infty$ и $+\infty$ и что $E_1(\lambda)$—непрерывная слева функция λ. Далее, полагая $Q(\lambda) = \lambda Q_2(\lambda)$, имеем

$$(E_1(\Delta) h_1, H_1 h_2) = \int_\Delta Q_1(\mu) \overline{Q(\mu)} \, d\sigma(\mu) = \int_\Delta \mu Q_1(\mu) \overline{Q_2(\mu)} \, d\sigma(\mu) =$$

$$= \int_\Delta \mu \, d \int_{-\infty}^{\mu} Q_1(\nu) \overline{Q_2(\nu)} \, d\sigma(\nu) = \int_\Delta \mu \, d(E_1(\mu) h_1, h_2) = \left(\int_\Delta \mu \, dE_1(\mu) h_1, h_2 \right);$$

отсюда следует, что имеет смысл $H_1^* E_1(\Delta) h_1 = \int_\Delta \mu \, dE_1(\mu) h_1$, так что $E_1(\mu)$—спектральная функция H_1.

Итак, для нахождения всех $\sigma(\mu)$, удовлетворяющих (32), нужно построить согласно теореме 4 все спектральные функции $E_1(\mu)$ оператора H_1 и положить* $\sigma(\mu) = (E_1(\mu) g_1, g_1)$. Отметим, что разным $E_1(\lambda)$ соответствуют разные $\sigma(\lambda)$, ибо из $(E_1(\lambda) g_1, g_1) = (E_1'(\lambda) g_1, g_1)$ следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_1(\mu) g_n, g_m)}{\mu - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_1(\mu) P_n(H_1) g_1, P_m(H_1) g_1)}{\mu - \lambda} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\mu) \overline{P_m(\mu)} \frac{d(E_1(\mu) g_1, g_1)}{\mu - \lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} P_n(\mu) \overline{P_m(\mu)} \frac{d(E_1'(\mu) g_1, g_1)}{\mu - \lambda} =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(E_1'(\mu) g_n, g_m)}{\mu - \lambda};$$

отсюда

$$(E_1'(\mu) g_n, g_m) = (E_1(\mu) g_n, g_m), \quad E_1'(\mu) = E_1(\mu).$$

§ 4. Минимальные расширения симметрического оператора

В предыдущем параграфе мы показали, что всякая спектральная функция $E_1(\lambda)$ симметрического оператора H_1 определяется некоторым самосопряженным расширением H оператора $\mathfrak{H}_1$. Возникает вопрос: когда разные H определяют разные $E_1(\lambda)$? Мы дадим теперь ответ на этот вопрос.

Определение 8. Самосопряженное расширение H в $\mathfrak{H}$ симметрического оператора H_1 в $\mathfrak{H}_1 (\subset \mathfrak{H})$ будем называть минимальным, если пространство $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ и ни одно из его подпространств, отличных от (0), не приводит H.

ТЕОРЕМА 7. *Для всякого самосопряженного расширения H в $\mathfrak{H}$ симметрического оператора H_1 в $\mathfrak{H}_1$ $(\subset \mathfrak{H})$ существует минимальное самосопряженное расширение H_0 в некотором пространстве $\mathfrak{H}_0$ $(\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H})$ такое, что $H_0 \subset H$. Расширения H_0 и H определяют одну и ту же спектральную функцию оператора H_1.*

---

* Более подробно на применении результатов этой работы к проблеме моментов я имею в виду остановиться в отдельной статье.

Доказательство. Пусть $E(\lambda)$ — спектральная функция H; обозначим через $\mathfrak{H}_0$ замкнутую линейную оболочку всех $E(\lambda)f$, $-\infty<\lambda<+\infty$, $f\subset\mathfrak{H}_1$. Очевидно, $\mathfrak{H}_1\subset\mathfrak{H}_0\subset\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_0$ приводит H. Пусть H_0 — часть H в $\mathfrak{H}_0$; тогда H_0 — самосопряженный оператор, $H_0\subset H$ и H_0 — расширения H_1. Докажем, что H_0 минимален. Обозначим для этого через $E_0(\lambda)$ спектральную функцию H_0; очевидно, что

$$E_0(\lambda)f=E(\lambda)f \quad \text{для} \quad f\subset\mathfrak{H}_0; \tag{1}$$

в частности, (1) выполняется для $f\subset\mathfrak{H}_1$. Если бы в $\mathfrak{H}_0\ominus\mathfrak{H}_1$ было подпространство $\mathfrak{M}\neq(0)$, приводящее H_0, то таковым было бы и $\mathfrak{H}_0\ominus\mathfrak{M}\supset\supset\mathfrak{H}_0\ominus(\mathfrak{H}_0\ominus\mathfrak{H}_1)=\mathfrak{H}_1$; следовательно замкнутая линейная оболочка всех $E_0(\lambda)f=E(\lambda)f$, $f\in\mathfrak{H}_1$, $-\infty<\lambda<+\infty$, должна была бы находиться в $\mathfrak{H}_0\ominus\mathfrak{M}$, в то время как она совпадает с $\mathfrak{H}_0$. Итак, H_0 минимален. Пусть теперь E_0, E — операторы проектирования в $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$; очевидно $E_0f=E_1f$ для $f\subset\mathfrak{H}_0$; поэтому из (1) получаем, что

$$E_0E_0(\lambda)f=E_1E_0(\lambda)f=E_1E(\lambda)f \quad \text{для} \quad f\in\mathfrak{H}_1, \tag{2}$$

т. е. H и H_0 определяют одну и ту же спектральную функцию.

Из теоремы 7 следует, что уже минимальные самосопряженные расширения дают все спектральные функции оператора H_1. Остается выяснить, когда разные минимальные расширения определяют разные спектральные функции H_1.

Определение 9. Минимальные самосопряженные расширения H', H'' в $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$ симметрического оператора H_1 и $\mathfrak{H}_1$ будем называть эквивалентными относительно $\mathfrak{H}_1$, если существует изометрическое отображение X пространства $\mathfrak{H}'$ на $\mathfrak{H}''$ такое, что

$$H''=XH'X^{-1}, \tag{3}$$

$$Xf=f \quad \text{для} \quad f\in\mathfrak{H}_1. \tag{4}$$

Очевидно, все условия эквивалентности здесь удовлетворяются, так что совокупность всех минимальных расширений оператора H_1 разбивается на классы расширений, эквивалентных относительно $\mathfrak{H}_1$.

ТЕОРЕМА 8. *Для того чтобы минимальные самосопряженные расширения H', H'' симметрического оператора H_1 определяли одну и ту же спектральную функцию $E_1(\lambda)$, необходимо и достаточно, чтобы они были эквивалентны относительно $\mathfrak{H}_1$.*

Доказательство. Пусть H' и H'' определяют $E_1(\lambda)$, т. е. в силу (2)

$$E_1(\lambda)f=E_1E'(\lambda)f=E_1E''(\lambda)f \quad \text{для} \quad f\in\mathfrak{H}_1,$$

где $E'(\lambda)$, $E''(\lambda)$ — спектральные функции H', H'', а E_1 — оператор проектирования на $\mathfrak{H}_1$ в раз навсегда зафиксированном пространстве $\mathfrak{H}$ (содержащем пространства $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$, в которых рассматриваются H', H''). Для любого интервала Δ, конечного или бесконечного, и $f\in\mathfrak{H}_1$

$$|E'(\Delta)f|^2=(E'(\Delta)f,f)=(E_1E'(\Delta)f,f)=(E_1E''(\Delta)f,f)=$$
$$=(E''(\Delta)f,f)=|E''(\Delta)f|^2. \tag{5}$$

Пусть $\mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}''$ — линейные оболочки всех $E'(\lambda)f$, $E''(\lambda)f$, $-\infty<\lambda<+\infty$, $f\in\mathfrak{H}_1$; всякий элемент $g\in\mathfrak{S}'$ представим в виде

$$g=E'(\lambda_1)f_1+\ldots+E'(\lambda_k)f_k;\quad f_1,\ldots,f_k\in\mathfrak{H}_1,$$

причем можно считать $\lambda_1<\lambda_2<\ldots<\lambda_k$. Переписывая (5) в виде

$$g=E'(\lambda_1)(f_1+\ldots+f_k)+[E'(\lambda_2)-E'(\lambda_1)](f_2+\ldots+f_k)+\\+\ldots+[E'(\lambda_k)-E'(\lambda_{k-1})]f_k,$$

мы видим, что всякий элемент $g\in\mathfrak{S}'$ представим в виде

$$g=E'(\Delta_1)h_1+\ldots+E'(\Delta_k)h_k,\quad \Delta_j\cdot\Delta_k=0 \text{ при } j\neq k\\ h_1,\ldots,h_k\in\mathfrak{H}_1. \tag{6}$$

Аналогичное представление имеет место и для элементов $\mathfrak{S}''$. Но в силу (5)

$$|g|^2=|E'(\Delta_1)h_1+\ldots+E'(\Delta_k)h_k|^2=|E'(\Delta_1)h_1|^2+\ldots+|E'(\Delta_k)h_k|^2=\\=|E''(\Delta_1)h_1|^2+\ldots+|E''(\Delta_k)h_k|^2=|E''(\Delta_1)h_1+\ldots+E''(\Delta_k)h_k|^2;$$

поэтому оператор X, определенный равенством

$$X(E'(\Delta_1)h_1+\ldots+E'(\Delta_k)h_k)=E''(\Delta_1)h_1+\ldots+E''(\Delta_k)h_k, \tag{7}$$

изометрически отображает $\mathfrak{S}'$ на $\mathfrak{S}''$. Следовательно его замыкание, которое мы также обозначим через X, изометрически отображает $\overline{\mathfrak{S}}'=\mathfrak{H}'$ на $\overline{\mathfrak{S}}''=\mathfrak{H}''$. В силу (7) для $f\in\mathfrak{H}_1$

$$XE'(\lambda)f=E''(\lambda)f;$$

отсюда, полагая $\lambda\to+\infty$, получаем, что $Xf=f$ при $f\in\mathfrak{H}_1$. Далее, при $\lambda_1\leqslant\lambda$, $f\in\mathfrak{H}_1$

$$XE'(\lambda)X^{-1}E''(\lambda_1)f=XE'(\lambda)E'(\lambda_1)f=XE'(\lambda_1)f=\\=E''(\lambda_1)f=E''(\lambda)E''(\lambda_1)f$$

и при $\lambda_1>\lambda$

$$XE'(\lambda)X^{-1}E''(\lambda_1)f=XE'(\lambda)E'(\lambda_1)f=XE'(\lambda)f=\\=E''(\lambda)f=E''(\lambda)E''(\lambda_1)f.$$

Отсюда

$$XE'(\lambda)X^{-1}=E''(\lambda) \tag{8}$$

на всех $E''(\lambda_1)f$, $-\infty<\lambda_1<+\infty$, $f\in\mathfrak{H}_1$, а значит и на замкнутой линейной оболочке $\mathfrak{H}''$. Но из (8) следует, что $XH'X^{-1}=X''$, так что H' и H'' эквивалентны относительно $\mathfrak{H}_1$.

Пусть, обратно, H' и H'' эквивалентны относительно $\mathfrak{H}_1$, так что (3) и (4) имеют место. Но тогда $XE'(\lambda)X^{-1}=E''(\lambda)$, следовательно для $f\in\mathfrak{H}_1$

$$E''(\lambda)f=XE'(\lambda)X^{-1}f=XE'(\lambda)f,\\ E''(\lambda)f-E'(\lambda)f=(X-1)E'(\lambda)f.$$

Но в силу (4) $Xg-g\perp\mathfrak{H}_1$, так что при $f\in\mathfrak{H}_1$

$$E_1E''(\lambda)f-E_1E'(\lambda)f=E_1(X-1)E'(\lambda)f=0,$$

т. е. H' и H'' определяют одну и ту же спектральную функцию оператора H_1.

ТЕОРЕМА 9. *Если H_1 — максимальный симметрический оператор в $\mathfrak{H}_1$, то все его минимальные самосопряженные расширения эквивалентны относительно $\mathfrak{H}_1$.*

Доказательство*. Пусть $\mathfrak{M}_1^-$, $\mathfrak{M}_1^+$ — дефектные подпространства H_1 и $\mathfrak{M}_1^- \neq (0)$, $\mathfrak{M}_1^+ = (0)$; пусть, далее, H' и H'' — два минимальных самосопряженных расширения H_1 в $\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ соответственно, а U' и U'' — их трансформации Кели. Тогда U', U'' — унитарные операторы в $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$ и

$$U'(\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1^-) = U''(\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1^-) = \mathfrak{H}_1.$$

Положим

$$U'\mathfrak{M}_1^- = \mathfrak{N}_1', \; U'\mathfrak{N}_1' = \mathfrak{N}_2', \; \ldots, \; U'\mathfrak{N}_k' = \mathfrak{N}_{k+1}', \; \ldots,$$
$$U''\mathfrak{M}_1^- = \mathfrak{N}_1'', \; U'\mathfrak{N}_1'' = \mathfrak{N}_2'', \; \ldots, \; U'\mathfrak{N}_k'' = \mathfrak{N}_{k+1}'', \; \ldots;$$

тогда из $\mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1^- \perp \mathfrak{M}_1^-$ следует, что $\mathfrak{H}_1 \perp \mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{H}_1 \perp \mathfrak{N}_1''$. Поэтому также $\mathfrak{M}_1^- \perp \mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{M}_1^- \perp \mathfrak{N}_1''$; применяя к этим подпространствам U' и U'', получаем, что $\mathfrak{N}_1' \perp \mathfrak{N}_2'$, $\mathfrak{N}_1'' \perp \mathfrak{N}_2''$ и, повторяя тот же прием, что $\mathfrak{N}_j' \perp \mathfrak{N}_k'$, $\mathfrak{N}_j'' \perp \mathfrak{N}_k''$ при $j \neq k$.

Далее,

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{H}' &= \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \ldots, \\ \mathfrak{H}'' &= \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1'' \oplus \mathfrak{N}_2'' \oplus \ldots \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

В самом деле, в силу $U'\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1'$,

$$U'[\mathfrak{H}' \ominus (\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \ldots)] = \mathfrak{H}' \ominus [U'\mathfrak{H}_1 \oplus U'\mathfrak{N}_1' \oplus U'\mathfrak{N}_2' \oplus \ldots] =$$
$$= \mathfrak{H}' \ominus [\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \ldots],$$

так что $\mathfrak{H}' \ominus (\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \ldots)$ есть подпространство в $\mathfrak{H}' \ominus \mathfrak{H}_1$, которое приводит U', а значит и H'. В силу минимальности H' отсюда следует, что $\mathfrak{H}' \ominus [\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \ldots] = (0)$.

Положим теперь

$$Xf = f \quad \text{для} \quad f \in \mathfrak{H}_1,$$
$$Xf = U''^k U'^{-k} f \quad \text{для} \quad f \in \mathfrak{N}_k', \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

так как, при $f \in \mathfrak{N}_k'$, $U'^{-k} f \in \mathfrak{M}_1^-$, то $Xf \in \mathfrak{N}_k''$, так что X изометрически отображает $\mathfrak{H}_1$ на $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{N}_k'$ на $\mathfrak{N}_k''$. В силу (9) X отображает поэтому $\mathfrak{H}'$ на $\mathfrak{H}''$. Для $f \in \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{M}_1^-$ имеем $U'f = U''f \in \mathfrak{H}_1$, следовательно

$$X^{-1}U''Xf = X^{-1}U''f = U''f = U'f;$$

далее, для $f \in \mathfrak{M}_1^-$ имеем $U''f \in \mathfrak{N}_1''$, следовательно

$$X^{-1}U''Xf = X^{-1}U''f = U'U''^{-1}U''f = U'f;$$

наконец, для $f \in \mathfrak{N}_k'$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, $U''Xf \in \mathfrak{N}_{k+1}''$, следовательно

$$X^{-1}U''Xf = U'^{k+1}U''^{-k-1}U''U''^k U'^{-k} f = U'f.$$

Таким образом $X^{-1}U''X = U'$, а значит и $X^{-1}H''X = H'$.

Следствие 7. *Максимальный симметрический оператор имеет только одну спектральную функцию* **.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
7. III. 1940.

* Идея этого доказательства принадлежит А. Н. Колмогорову.

** Следствие 7 можно также доказать непосредственно, пользуясь формулой обращения Стильтьеса; теорема 9 следует тогда из теоремы 8 и следствия 7.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Calkin J. W., Abstract symmetric boundary conditions, Transact. Amer. Math. Soc. 45:3 (1939).
[2] Carleman T., Sur les équations integrales à noyau réel et symétrique, Uppsala, 1923.
[3] Hilbert D., Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Gött. Nachr., 1904—1910.
[4] Neumann J. v., Über adjungierte Funktionaloperatoren, Ann. of Math., 33 (1932).
[5] Наймарк М., Самосопряженные расширения второго рода симметрического оператора, Изв. Акад. Наук СССР, серия матем., 4 (1940).
[6] Stone M. H., Linear transformations in Hilbert space, Amer. Math. Soc. Colloquium publications, XV, New York (1932).

M. NEUMARK. SPECTRAL FUNCTIONS OF A SYMMETRIC OPERATOR

SUMMARY

In this paper a characterisation of all spectral functions * of a symmetric operator ** is given. Observe that separability of the Hilbert space is not assumed here.

§ 1. Auxiliary propositions

LEMMA 1. *Let A be a self-adjoint operator in the Hilbert space $\mathfrak{H}_1$ satisfying the condition*

$$0 \leqslant (Af, f) \leqslant (f, f), \quad f \in \mathfrak{H}_1;$$

let further $\mathfrak{H}$ be an arbitrary Hilbert space including $\mathfrak{H}_1$ and satisfying

$$\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1);$$

denote by E_1 the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1$. Then there exists in $\mathfrak{H}$ a projection E such that for all $f \in \mathfrak{H}_1$

$$Af = E_1 E f. \tag{1}$$

*The general form of all such E is given by *** $E \sim \| E_{jk} \|_{j,k=1,2}$ where*

$$\left.\begin{aligned} E_{11} = A, \quad E_{12} = E_{21}^* = \sqrt{A - A^2}\, U, \quad PE_{22} = E_{22} P = U^* (1 - A) U, \\ E_{22} (1 - P) f = P_1 (1 - P) f, \quad f \in \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1, \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

*U is a partially isometric operator from $\mathfrak{H}_2$ into $\mathfrak{H}_1$ with an arbitrary initial set $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{H}_2$ and final set **** $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{R}(A - A^2)} \subset \mathfrak{H}_1$, $P = U^* U = P_{\mathfrak{M}_2}$ and P_1 is an arbitrary projection in $(1 - P)\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2$.*

Definition 1. The projection E will be called regular if $\dim (1 - P_1)(\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2) = \dim P_1 (\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2) = \dim \mathfrak{H}_2$ where $\dim \mathfrak{H}_2$ is an infinite cardinal number.

Lemma 1 shows that we can always construct a regular projection E satisfying (1), if $\dim \mathfrak{H}_2$ ($\geqslant \dim \mathfrak{H}_1$) is an infinite cardinal number.

---

* Cf. definition 3.

** About the terminology cf. ([6]).

*** E_{jk} is an operator from $\mathfrak{H}_k$ into $\mathfrak{H}_j$; $E \sim \| E_{jk} \|_{j,k=1,2}$ denotes that $E_{jk} f_k = E_j E f_k$, $f_k \in \mathfrak{H}_k$, where E_j is the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_j$; $j, k = 1, 2$. About the details cf. ([5]), § 4.

**** $\mathfrak{R}(A)$ denotes the range of A; about partially isometric operators cf. ([4]).

Corollary 1. *Let A be an arbitrary self-adjoint operator in an infinite dimensional Hilbert space $\mathfrak{H}$ satisfying $0 \leqslant (Af, f) \leqslant (f, f)$, $f \in \mathfrak{H}$. Then there exists in $\mathfrak{H}$ a sequence of projections $E^{(n)}$ such that for all $f, g \in \mathfrak{H}$, $(E^{(n)} f, g) \to (Af, g)$.*

LEMMA 2. *Let A, B be bounded self-adjoint operators in $\mathfrak{H}_1$ satisfying*

$$(Af, f) \geqslant 0, \quad (Bf, f) \geqslant 0, \quad ((A+B) f, f) \leqslant 1, \quad f \in \mathfrak{H}_1. \tag{3}$$

Then

$$\mathfrak{R}(BA) \subset \mathfrak{R}(\sqrt{B-B^2}) \tag{4}$$

and for $f \in \mathfrak{R}(\sqrt{A-A^2})$

$$|(B-B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A-A^2)^{-\frac{1}{2}} f| \leqslant |f|, \tag{5}$$

$(B-B^2)^{-\frac{1}{2}}$ and $(A-A^2)^{-\frac{1}{2}}$ being considered as operators in $\mathfrak{N}_1 = \overline{\mathfrak{R}(B-B^2)}$ and $\mathfrak{M}_1 = \overline{\mathfrak{R}(A-A^2)}$ respectively.

LEMMA 3. *Let A, B, $\mathfrak{H}_1$ be the same as in lemma 2 and let $\mathfrak{H}$ be a Hilbert space including $\mathfrak{H}_1$ and satisfying the condition $\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$, where $\dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ is an infinite cardinal number. Then there exist in $\mathfrak{H}$ two mutually orthogonal regular projections satisfying*

$$Af = E_1 E f, \quad Bf = E_1 F f, \quad f \in \mathfrak{H}_1 \tag{6}$$

and such that $E+F$ is also regular.

Proof. Take for E an arbitrary regular projection satisfying (2). Denote further by R the closure of $(B-B^2)^{-\frac{1}{2}} BA (A-A^2)^{-\frac{1}{2}}$ and put $R_1 f = RUf$, $f \in \mathfrak{M}_2$. R_1 is an operator from $\mathfrak{M}_2$ to $\mathfrak{N}_1$ satisfying

$$|R_1 f| \leqslant |f|. \tag{7}$$

Put further

$$\mathfrak{E} = P_1 (\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2), \quad \mathfrak{F} = (1-P_1)(\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2); \tag{8}$$

then $\mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}$, $\mathfrak{E} \perp \mathfrak{F}$, $\dim \mathfrak{E} = \dim \mathfrak{F} = \dim \mathfrak{H}_2$ and $E_{22} = 1$ on $\mathfrak{E}$, $E_{22} = 0$ on $\mathfrak{F}$. Decompose $\mathfrak{F}$ in three mutually-orthogonal subspaces: $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_3$ such that $\dim \mathfrak{F}_1 = \dim (\overline{1 - R_1 R_1^*) \mathfrak{N}_1}$, $\dim \mathfrak{F}_2 = \dim \mathfrak{F}_3 = \dim \mathfrak{H}_2$ and put

$$\left.\begin{aligned} Vf &= -R_1 f && \text{for } f \in \mathfrak{M}_2, \\ Vf &= (1 - R_1 R_1^*)^{\frac{1}{2}} V_1 f && \text{»} \quad f \in \mathfrak{F}_1, \\ Vf &= 0 && \text{»} \quad f \in \mathfrak{H}_2 \ominus [\mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{F}_1] = \mathfrak{E} \oplus \mathfrak{F}_2 \oplus \mathfrak{F}_3, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

V_1 being an arbitrary isometric mapping of $\mathfrak{F}_1$ onto $\overline{(1 - R_1 R_1^*) \mathfrak{N}_1}$. Using (9) we easily prove that V is a partially isometric operator from $\mathfrak{H}_2$ into $\mathfrak{H}_1$ with some initial set $\mathfrak{N}_2 \in \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{F}_1$ and final $= \mathfrak{N}_1$.

Put

$$\left.\begin{gathered} F \sim \| F_{jk} \|_{j,k=1,2}, \quad F_{11} = B, \quad F_{12} = F_{21}^* = \sqrt{B - B^2}\, V, \\ F_{22} f = V^* (1 - B) V \quad \text{for } f \in \mathfrak{N}_2, \\ F_{22} f = f \text{ for } f \in \mathfrak{F}_2, \quad F_{22} f = 0 \text{ for } f \in \mathfrak{H}_2 \ominus [\mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{F}_2]. \end{gathered}\right\} \tag{10}$$

By lemma 1 F is a projection satisfying (6), and (10) shows that F is regular. Using (9) we find that $EF=0$.

LEMMA 4. *Let* A, B, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}$, E_1 *be the same as in lemma 3 and* G' *a regular projection in* $\mathfrak{H}$ *satisfying*

$$E_1 G' f=(A+B)f, \quad f\in\mathfrak{H}_1. \tag{11}$$

Then there exist in $\mathfrak{H}$ *two regular mutually orthogonal projections* E' *and* F' *satisfying*

$$E_1 E' f=Af, \quad E_1 F' f=Bf, \quad f\in\mathfrak{H}_1 \text{ and } E'+F'=G'. \tag{12}$$

Proof. Let E, F be the projections constructed in lemma 3. Put $G=E+F$, $C=A+B$. Then G is regular and $E_1 Gf=(A+B)f=Cf$, $f\in\mathfrak{H}_1$; hence by lemma 1 $G\sim\|G_{jk}\|_{j,k=1,2}$, $G'\sim\|G'_{jk}\|_{j,k=1,2}$, where

$$G_{11}=C,\ G_{12}=G^*_{21}=\sqrt{C-C^2}\,W,\quad G_{22}W^*W=W^*(1-C)W,$$
$$G'_{11}=C,\ G'_{12}=G'^*_{21}=\sqrt{C-C^2}\,W',\quad G'_{22}W'^*W'=W'^*(1-C)W',$$

and W,W' are partially isometric operators from $\mathfrak{H}_2$ to $\mathfrak{H}_1$ with some initial sets $\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}'_2\in\mathfrak{H}_2$ and final set $\mathfrak{P}_1=\mathfrak{P}'_1=\overline{\mathfrak{R}(C-C^2)}$. Put for $f\in\mathfrak{P}'_2$, $T_1 f=W^*W'f$; T_1 maps isometrically $\mathfrak{P}'_2$ onto $\mathfrak{P}_2$. Let further $\mathfrak{H}_2\ominus\mathfrak{P}_2=$ $=\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}'_2\ominus\mathfrak{P}'_2=\mathfrak{A}'\oplus\mathfrak{B}'$ be the decompositions of the left hand spaces in characteristic manifolds of G_{22}, G'_{22} corresponding to $\lambda=0$, $\lambda=1$ respectively. By regularity of G and G' $\dim\mathfrak{A}=\dim\mathfrak{B}=\dim\mathfrak{A}'=$ $=\dim\mathfrak{B}'$; hence we can extend T_1 to a unitary operator T in $\mathfrak{H}_2$ mapping $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$ onto $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ respectively. We then easily verify the relations

$$G'_{11}=G_{11},\quad G'_{12}=G_{12}T,\quad G'_{21}=T^*G_{21},\quad G'_{22}=T^*G_{22}T. \tag{13}$$

On the other hand, if we put

$$E'_{11}=E_{11},\quad E'_{12}=E_{12}T,\quad E'_{21}=T^*E_{21},\quad E'_{22}=T^*E_{22}T,$$
$$F'_{11}=F_{11},\quad F'_{12}=F_{12}T,\quad F'_{21}=T^*F_{21},\quad F'_{22}=T^*F_{22}T,$$

we have two regular projections $E'\sim\|E'_{j,k}\|_{j,k=1,2}$, $F'\sim\|F'_{jk}\|_{j,k=1,2}$. The equalities

$$E'_{11}+F'_{11}=G_{11},\quad E'_{12}+F'_{12}=(E_{12}+F_{12})T=G_{12}T,\quad E'_{21}+F'_{21}=T^*G_{21},$$
$$E'_{22}+F'_{22}=T^*(E_{22}+F_{22})T=T^*G_{22}T$$

together with (13) show that $E'+F'=G'$; since G' is a projection, $E'F'=0$.

THEOREM 1. *Let* $E_1(\lambda)$, $-\infty<\lambda<+\infty$, *be a family of bounded self-adjoint operators in a Hilbert space* $\mathfrak{H}_1$ *satisfying the following conditions*:*

1° $(E_1(\lambda)f,f)$ *is a non-decreasing function of* λ;

2° $E_1(\lambda-\varepsilon)f\to E_1(\lambda)f$ *for* $\varepsilon>0$, $\varepsilon\to 0$;

3° $E_1(\lambda)f\to 0$ *for* $\lambda\to-\infty$ *and* $E_1(\lambda)f\to f$ *for* $\lambda\to+\infty$.

---

* Here and below convergence is always meant in the sence of the strong topology in $\mathfrak{H}_1$.

Let further $\mathfrak{H}$ *be a Hilbert space including* $\mathfrak{H}_1$ *such that* $\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ *and* $\dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ *is infinite, and let* E_1 *be the projection in* $\mathfrak{H}$ *onto* E_1. *Then there exists in* $\mathfrak{H}$ *a family of projections* $E(\lambda)$ *also satisfying* 1°—3° *and such that*

$$E_1(\lambda) f = E_1 E(\lambda) f \ \text{for} \ f \in \mathfrak{H}_1. \tag{14}$$

Proof. Denote by S the set of all intervals

$$\Delta^- = (-\infty, 0) \quad \Delta^+ = [0, +\infty), \quad \Delta_n = [n, n+1),$$
$$\Delta_n^- = (-\infty, n), \quad \Delta_n^+ = [n+1, +\infty),$$
$$\Delta_n^{p_1 p_2 \dots p_k} = \left[n + \frac{p_1}{2} + \dots + \frac{p_k}{2^k},\ n + \frac{p_1}{2} + \dots + \frac{p_k + 1}{2^k} \right],$$

$n = \dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots;\quad k = 1, 2, 3, \dots;\quad p_1, p_2, \dots, p_k = 0, 1,$ and by $\mathfrak{S}$ the set of all numbers of the form $n + \frac{p_1}{2} + \dots + \frac{p_k}{2^k}$. Using lemmas 1, 4 and 1°, 3° and beginning from Δ^- and Δ^+ we can make correspond to each $\Delta \in S$ a projection $F(\Delta)$ in $\mathfrak{H}$ satisfying the following conditions:

1^* if $\Delta, \Delta' \in S$, $\Delta\Delta' = 0$ then $F(\Delta) \cdot F(\Delta') = 0$;

2^* if $\Delta = \Delta' + \dots + \Delta^k$, $\Delta^j, \Delta \in S$, $j = 1, \dots, k$, $\Delta^p \Delta^q = 0$ for $p \neq q$, then $F(\Delta) = F(\Delta') + \dots + F(\Delta^k)$;

3^* if $\Delta \in S$, then for all $f \in \mathfrak{H}_1$, $E_1(\Delta) f = E_1 F(\Delta) f$.

Let now S' be the set of all finite sums

$$\Delta = \Delta^1 + \dots + \Delta^k,\ \Delta^j \in S,\ \Delta^p \Delta^q = 0 \ \text{for} \ p \neq q; \tag{15}$$

put $F(\Delta) = F(\Delta') + \dots + F(\Delta^k)$ for $\Delta \in S'$. By 2^* $F(\Delta)$ is independent on the representation (15) of Δ, and 1^*—3^* are also satisfied for S'. For $\lambda \in \mathfrak{S}$ the interval $\Delta_\lambda = (-\infty, \lambda) \in S'$; put $F(\lambda) = F(\Delta_\lambda)$. Clearly

$$F(\lambda_1) F(\lambda_2) = F(\lambda_1) \ \text{for} \ \lambda_1 \leqslant \lambda_2; \tag{16}$$

hence for every real λ

$$G(\lambda) f = \lim_{\substack{\mu \to \lambda \\ \mu < \lambda,\ \mu \in \mathfrak{S}}} F(\mu) f,\ f \in \mathfrak{H} \tag{17}$$

exists and is also a projection in $\mathfrak{H}$. By definition $G(\lambda - \varepsilon) f \to G(\lambda) f$ for $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$ and from (16), (17) we deduce

$$G(\lambda) G(\mu) = G(\lambda), \quad \lambda \leqslant \mu. \tag{18}$$

Using 3^*, 2° we find that

$$E_1 G(\lambda) f = E_1(\lambda) f, \quad f \in \mathfrak{H}; \tag{19}$$

hence, by 3°, $E_1 G(-\infty) f = E_1(-\infty) f = 0$, $E_1 [1 - G(+\infty)] f = 0$ for $f \in \mathfrak{H}_1$. But then lemma 1 shows that also $E_1 G(-\infty) f = 0$, $E_1 [1 - G(+\infty)] f = 0$ for $f \in \mathfrak{H}_1$, so that the spaces $\mathfrak{M} = G(-\infty) \mathfrak{H}$, $\mathfrak{N} = [1 - G(+\infty)] \mathfrak{H}$ are orthogonal to $\mathfrak{H}_1$. Now put

$$E(\lambda) f = G(\lambda) f \ \text{for} \ f \in \mathfrak{H} \ominus [\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}],$$
$$E(\lambda) f = G_0(\lambda) f \ \text{for} \ f \in \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N},$$

$G_0(\lambda)$ being an arbitrary family of projections in $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ satisfying 1°—3°. Then $E(\lambda)$ has all the properties required in our theorem.

Corollary 2. *Let $E(\lambda)$ be an arbitrary family of bounded self-adjoint operators in an infinite-dimensional Hilbert space $\mathfrak{H}$ satisfying 1°—3° of theorem 1. Then there exists in $\mathfrak{H}$ a sequence of projections $E^{(n)}(\lambda)$ also satisfying 1°—3° and weakly convergent to $E(\lambda)$ for $n \to \infty$ and every λ.*

Corollary 3. *Let $E_1(\lambda)$ be the same as in theorem 1 and $\varphi(\lambda)$ an arbitrary scalar continuous function of λ; then for every finite interval Δ the integral $\int_\Delta \varphi(\lambda)\,dE_1(\Delta_\lambda)f$ converges strongly.*

Proof. Let $E(\lambda)$ be the family of projections constructed in theorem 1. Our assertion follows at once from $\int_\Delta \varphi(\lambda)\,dE_1(\Delta_\lambda)f = E_1\int_\Delta \varphi(\lambda)\,dE(\Delta_\lambda)f$ and the strong convergence of $\int_\Delta \varphi(\lambda)\,dE(\Delta_\lambda)f$.

§ 2. Self-adjoint extensions of a symmetric operator

Definition 2. Let $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1$ be Hilbert spaces and $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$; let further A, A_1 be closed linear operators in $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1$ with domains $\mathfrak{D}(A), \mathfrak{D}(A_1)$ dense in $\mathfrak{H}, \mathfrak{H}_1$ respectively. A shall be called an extension* of A_1, if $\mathfrak{D}(A_1) \subset \mathfrak{D}(A)$ and, for $f \in \mathfrak{D}(A_1)$, $Af = A_1 f$.

THEOREM 2. *Let A, A_1 be the same as in definition 2. Let further E_1 be the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1$ and B_1 an operator in $\mathfrak{H}_1$ defined in $E_1\mathfrak{D}(A^*)$ by*

$$B_1 E_1 f = E_1 A^* f, \quad f \in \mathfrak{D}(A^*). \tag{1}$$

Then

$$B_1 \subset A_1^*. \tag{2}$$

Proof. For $f \in \mathfrak{D}(A^*)$, $g \in \mathfrak{D}(A_1)$

$$(E_1 f, A_1 g) = (f, A_1 g) = (f, Ag) = (A^* f, g) = (E_1 A^* f, g); \tag{3}$$

hence $E_1 f = 0$ implies $E_1 A^* f = 0$. Thus (1) defines B_1 uniquely. Moreover, (3) implies (2).

THEOREM 3. *Let H_1 be a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$; then $\mathfrak{H}_1$ can be extended to a Hilbert space $\mathfrak{H}$, and a self-adjoint operator H in $\mathfrak{H}$ can be constructed, which is an extension of H_1. Denote by H_2 an operator with the domain $\mathfrak{D}(H_2) = \mathfrak{D}(H) \cdot (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1)$ defined by*

$$H_2 f = Hf \text{ for } f \in \mathfrak{D}(H_2). \tag{4}$$

*Then H_2 is a closed Hermitian** operator in $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$. Denote further*

$$\mathfrak{M}_\lambda^1 = \mathfrak{H}_1 \ominus \mathfrak{R}(H_1 - \bar{\lambda}1), \quad \mathfrak{M}_\lambda^2 = \mathfrak{H}_2 \ominus \mathfrak{R}(H_2 - \bar{\lambda}1),$$
$$\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1, \quad I(\lambda) \neq 0.$$

* The extension here introduced is a generalization of the notion of extension of the second kind introduced in [5]; the ordinary extension is also a special case when $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$.

** For the definition of Hermitian operators cf. [5].

Then

$$\dim(\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda})=\dim(\mathfrak{M}^1_{\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\lambda}),\ \dim\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}\leqslant\dim\mathfrak{M}^1_{\lambda} \tag{5}$$

and $\mathfrak{D}(H)$ *consists of those and only those elements* $f\in\mathfrak{H}$ *which are representable in the form*

$$f=f_1-\varphi_1+U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2+f_2-\varphi_2+U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2, \tag{6}$$

where $f_1\in\mathfrak{D}(H_1)$, $f_2\in\mathfrak{D}(H_2)$, $\varphi_1\in\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}$, $\varphi_2\in\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}$ *and* $U\sim\|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ *is an isometric mapping of* $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}$ *onto* $\mathfrak{M}^1_{\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\lambda}$ *such that*

$$U_{12}\varphi_2=0 \quad \textit{implies } \varphi_2=0. \tag{7}$$

Moreover,

$$Hf=H_1f_1-\bar\lambda\varphi_1+\lambda(U_{11}\varphi_1+U_{12}\varphi_2)+H_2f_2-\bar\lambda\varphi_2+\lambda(U_{21}\varphi_1+U_{22}\varphi_2). \tag{8}$$

Conversely, if H_2 *is an arbitrary closed Hermitian operator in* $\mathfrak{H}_2$ *satisfying* (5) and $U\sim\|U_{jk}\|_{j,k=1,2}$ — *any isometric mapping of* $\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\bar\lambda}$ *onto* $\mathfrak{M}^1_{\lambda}\oplus\mathfrak{M}^2_{\lambda}$ *satisfying* (7), *then the operator* H *in* $\mathfrak{H}=\mathfrak{H}_1\oplus\mathfrak{H}_2$ *defined by* (6) *and* (8) *is a self-adjoint extension of* H_1. *Moreover* $\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_2=\mathfrak{D}(H_2)$ *and* $Hf=H_2f$ *for* $f\in\mathfrak{D}(H_2)$.

§ 3. Characterization of all spectral functions of a symmetric operator

Definition 3. Let H_1 be a symmetric operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}_1$; a family $E_1(\lambda)$, $-\infty<\lambda<+\infty$, of bounded self-adjoint operators will be called a spectral function of H_1 if:

1° $(E_1(\lambda)f,f)$ is a non-decreasing function of λ; $f\in\mathfrak{H}_1$;

2° $E_1(\lambda-\varepsilon)f\to E_1(\lambda)f$ for $\varepsilon\to0$, $\varepsilon>0$, $f\in\mathfrak{H}_1$;

3° $E_1(\lambda)f\to0$ for $\lambda\to-\infty$; $E_1(\lambda)f\to f$ for $\lambda\to+\infty$, $f\in\mathfrak{H}_1$;

4° for every finite interval Δ and $f\in\mathfrak{H}_1$

$$E_1(\Delta)f\in\mathfrak{D}(H_1^*) \text{ and } H_1^*E_1(\Delta)f=\int_\Delta\lambda\,dE_1(\Delta_\lambda)f.$$

A spectral function $E_1(\lambda)$ will be called orthogonal if all $E_1(\lambda)$ are projections * (orthogonal spectral functions are also called resolutions of identity).

Since $H_1^*=\tilde H_1^*$, H_1 and $\tilde H_1$ have the same spectral function. We can therefore consider only closed symmetric operators.

THEOREM 4. *Let* H_1 *be a closed symmetric operator in* $\mathfrak{H}_1$ *and* $E_1(\lambda)$ *a spectral function of* H_1. *Then for every* $g\in\mathfrak{D}(H_1)$ *and every finite interval* Δ

$$E_1(\Delta)H_1g=\int_\Delta\lambda\,dE_1(\Delta_\lambda)g, \tag{1}$$

$$|H_1g|^2=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^2\,d(E_1(\Delta_\lambda)g,g), \tag{2}$$

where the integral on the right converges.

Proof. (1) follows from $\left(f,\int_\Delta\lambda\,dE_1(\Delta_\lambda)g\right)=\left(\int_\Delta\lambda\,dE_1(\Delta_\lambda)f,g\right)=$ $=(H_1^*E_1(\Delta)f,g)=(f,E_1(\Delta)H_1g)$. Hence $(E_1(\Delta)H_1g,H_1g)=\int_\Delta\lambda\,d(E_1(\Delta_\lambda)g,H_1g)=$

* Every family of projections satisfying 1°—3° is, as we know, a spectral function of a self-adjoint operator.

$= \int\limits_{\Delta} \lambda \, d(H_1^* E_1(\Delta_\lambda) g, g) = \int\limits_{\Delta} \lambda^2 \, d(E_1(\Delta_\lambda) g, g)$; putting $\Delta = (-n, n)$ and $n \to \infty$ we obtain (2).

THEOREM 5. *Let H_1 be a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}_1$ and $E_1(\lambda)$ a spectral function of H_1. Let further $\mathfrak{H}$ be an arbitrary Hilbert space including $\mathfrak{H}_1$ such that* $\dim \mathfrak{H}_1 \leqslant \dim (\mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1) = \dim \mathfrak{H}$ *and E_1 the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1$. Then there exists in $\mathfrak{H}$ a self-adjoint extension H of H_1 such that for all $f \in \mathfrak{H}_1$*

$$E_1(\lambda) f = E_1 \cdot E(\lambda) f, \tag{3}$$

$E(\lambda)$ being the spectral function of H. Conversely, every self-adjoint extension H of H_1 defines by (3) *a spectral function of H_1. If $E(\lambda)$ is an arbitrary orthogonal spectral function in $\mathfrak{H}$ and H the corresponding self-adjoint operator, then $E_1(\lambda)$ in* (3) *is a spectral function of a symmetric operator H_1, if and only if H is an extension of H_1.*

Proof. The second assertion follows from the third. Let us prove the latter. If $E_1(\lambda)$ in (3) is a spectral function of H_1, then by theorem 4 for $g \in \mathfrak{D}(H_1)$,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\Delta_\lambda) g, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\Delta_\lambda) g, E_1 g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_1(\Delta_\lambda) g, g) < +\infty; \tag{4}$$

hence $g \in \mathfrak{D}(H)$ and

$$|H_1 g| = |Hg|. \tag{5}$$

On the other hand $H_1 g = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE_1(\Delta_\lambda) g = E_1 Hg$; thus by (5) $Hg = H_1 g$ and H is an extension of H_1. If conversely H is a self-adjoint extension of H_1 and $E(\lambda)$ the spectral function of H, then for $f \in \mathfrak{H}_1$

$$H_1^* E_1(\Delta) f = E_1 HE(\Delta) f = E_1 \int\limits_{\Delta} \lambda \, dE(\Delta_\lambda) f = \int\limits_{\Delta} \lambda \, dE_1(\Delta_\lambda) f,$$

i. e. $E_1(\lambda)$ is a spectral function of H_1. Now the first assertion of the theorem follows at once from the third one and theorem 1.

Definition 4. H will be said to define $E_1(\lambda)$, if they are associated as in theorem 5.

Corollary 4. *In order that a spectral function $E_1(\lambda)$ of H_1 should be defined by an extension of the second kind* of H_1, it is necessary and sufficient that $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E_1(\Delta_\lambda) f, f) < +\infty$ should imply $f \in \mathfrak{D}(H_1)$.*

Proof. Apply (4) and the definition of extension of the second kind.

Corollary 5. *There exist families of bounded self-adjoint operators $E_1(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, in $\mathfrak{H}_1$ satisfying 1°—3° of definition 3, which are not spectral functions of any symmetric operator.*

* An extension H is called of the second kind in $\mathfrak{D}(H) \cdot \mathfrak{H}_1 = \mathfrak{D}(H_1)$. For details cf. [5].

Proof. Let H be a self-adjoint operator in $\mathfrak{H}$ satisfying * $\mathfrak{D}(H)\cdot\mathfrak{H}_1=(0)$ and $\hat{E}(\lambda)$ its spectral function. Then by theorem 5 $E_1(\lambda)$ in (3) cannot be a spectral function of a symmetric operator.

Corollary 6. *Every solution g of the equation*

$$H_1^* g-\lambda g=h, \quad I(\lambda)\neq 0 \tag{6}$$

satisfying

$$I(H_1^* g, g)\cdot I(\lambda)\leqslant 0 \tag{7}$$

is representable in the form

$$g=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_1(\mu)\,h}{\mu-\lambda} \tag{8}$$

where $E_1(\mu)$ is a spectral function of H_1. Conversely, any spectral function $E_1(\mu)$ of H_1 defines by (8) *a solution of* (6) *satisfying* (7).

Proof. Let g be a solution of (6); then $g=f-\varphi+\psi$, $f\in\mathfrak{D}(H_1)$, $\varphi\in\mathfrak{M}^1_{\bar\lambda}$, $\psi\in\mathfrak{M}^1_{\lambda}$ and $H_1^* g=H_1 f-\bar\lambda\varphi+\lambda\psi$. Hence

$$I(H_1^* g, g)=I(\lambda)(|\psi|^2-|\varphi|^2)$$

and by (7) $|\psi|\leqslant|\varphi|$. We can therefore choose $U\sim\|U_{ij}\|_{i,j=1,2}$ in theorem 3 so that $U_{11}\varphi=\psi$. Let H be the extension of H_1 defined by U; using (6) and (8) of § 2 we find that the solution g' of $Hg'-\lambda g'=h$ has the form $g'=f-\varphi+\psi+U_{21}\varphi$. Hence

$$g=E_1 g'=E_1\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE(\mu)\,h}{\mu-\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dE_1(\nu)\,h}{\mu-\lambda}.$$

The inverse assertion can be easily verified.

Definition 5. Let $H^{(n)}$ be a sequence of bounded self-adjoint operators in $\mathfrak{H}$; the operator $H^{(0)}$ defined for those and only those f for which $\lim_{n\to\infty} H^{(n)} f$ exists by $H^{(0)} f=\lim_{n\to\infty} H^{(n)} f$ will be called the limite-operator of $H^{(n)}$. Clearly $H^{(0)}$ is a Hermitian operator in $\mathfrak{H}$.

Definition 6 **. The sequence $H^{(n)}$ of definition 5 will be said to approximate the symmetric operator H, if *** $\tilde{H}^{(0)}\supset H$.

Definition 7. A spectral function $E(\lambda)$ of a symmetric operator H will be said to be of Carleman type if there exists a sequence of bounded self-adjoint operators $H^{(n)}$ satisfying the following conditions:

1° The spectrum of each $H^{(n)}$ consists of a finite number of characteristic values;

2° the sequence $H^{(n)}$ approximates H;

3° the sequence $E^{(n)}(\lambda)$ of the spectral functions of $H^{(n)}$ converges weakly to $E(\lambda)$ for all real λ.

LEMMA 5. *Let A be a closed linear operator in a Hilbert space $\mathfrak{H}$ with the domain $\mathfrak{D}(A)$ dense in $\mathfrak{H}$; then there exists in $\mathfrak{D}(A)$ a complete*

* Cf. (1), lemma 4.2.

** Definitions 5 and 6 are also to be found in (6).

*** $\tilde{A}$ denotes the linear closure of A.

orthonormal set $\{\varphi_\alpha\}$ *such that the operator* A_0 *defined on* $\{\varphi_\alpha\}$ *by* $A_0\varphi_\alpha = A\varphi_\alpha$ *satisfies the relation* $\tilde{A}_0 = A$.

Proof. Put $R = \sqrt{A^*A}$; by a theorem of J. v. Neumann (4) R is self-adjoint, $\mathfrak{D}(A) = \mathfrak{D}(H)$ and for $f \in \mathfrak{D}(H)$

$$|Af| = |Rf|. \tag{9}$$

Let $F(\lambda)$ be the spectral function of R; put $\Delta_n = [n, n+1)$, $\mathfrak{H}_n = E(\Delta_n)\mathfrak{H}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ and select in each $\mathfrak{H}_n$ an orthonormal set. The logical sum of these sets is a complete orthonormal set $\{\varphi_\alpha\}$ in $\mathfrak{H}$ and $\varphi_\alpha \in \mathfrak{D}(R) = \mathfrak{D}(A)$. Denote by R_0, A_0 the corresponding operators defined on $\{\varphi_\alpha\}$; since R is bounded on each $\mathfrak{H}_n$, $\mathfrak{H}_n \subset \mathfrak{D}(\tilde{R}_0)$; moreover $f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\Delta_n) f$, $Rf = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tilde{R}_0 F(\Delta_n) f$ $(f \in \mathfrak{D}(R))$; hence $\tilde{R}_0 = R$. Now (9) implies $\tilde{A}_0 = A$.

THEOREM 6. *Every spectral function of a symmetric operator is of the Carleman type.*

Proof. Let H be a closed symmetric operator in $\mathfrak{H}$, $E(\lambda)$ a spectral function of H, and $\{\varphi_\alpha\}$ the complete orthonormal set constructed in lemma 5 for $A = H$, so that $\tilde{H}_0 = H$.

Decompose $\{\varphi_\alpha\}$ in a sequence $\{\varphi_\alpha\}^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ of systems each one having the same cardinal number as $\{\varphi_\alpha\}$ and denote by $\mathfrak{H}_1^{(n)}$ the closed linear manifold determined by $\{\varphi_\alpha\}^{(1)}, \ldots, \{\varphi_\alpha\}^{(n)}$, and by $E_1^{(n)}$ the projection in $\mathfrak{H}$ onto $\mathfrak{H}_1^{(n)}$. Put for $f \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$: $E_1^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)} E(\lambda) f$; by theorem 1 there exists in $\mathfrak{H}$ a sequence of orthogonal spectral functions $E^{(n)}(\lambda)$ satisfying

$$E_1^{(n)} E^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)}(\lambda) f = E_1^{(n)} E(\lambda) f, \quad f \in \mathfrak{H}_1. \tag{10}$$

Put further

$$\Delta_{-n^2-1}^{(n)} = (-\infty, -n), \ \Delta_k^{(n)} = \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right), \ k = -n^2, \ldots, n^2 - 1,$$

$$\Delta_{n^2}^{(n)} = [n, \infty), \ \lambda_k^{(n)} = \frac{k+1}{n}, \ k = -n^2 - 1, \ldots, n^2$$

and $H^{(n)} = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)} E^{(n)}(\Delta_k^{(n)})$. Then $H^{(n)}$ is a bounded self-adjoint operator in $\mathfrak{H}$ satisfying 1°° of definition 7. If $\varphi \in \{\varphi_\alpha\}$, then $\varphi \in \mathfrak{D}(H)$ and $\varphi \in \mathfrak{H}_1^{(n)}$ for n sufficiently large; hence by (10)

$$|H^{(n)}\varphi|^2 = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)2} (E^{(n)}(\Delta_k^{(n)})\varphi, \varphi) = \sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)2} (E(\Delta_k^{(n)})\varphi, \varphi) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(E(\Delta_\lambda)\varphi, \varphi) = |H\varphi|^2 \ \text{for} \ n \longrightarrow \infty$$

and therefore $|H^{(n)}\varphi| < C$ for some constant C. On the other hand for every $f \in \mathfrak{H}$ $(H^{(n)}\varphi, f) = (E_1^{(n)} H^{(n)}\varphi, f) + (H^{(n)}\varphi, (1 - E_1^{(n)}) f)$ and

$$(E_1^{(n)} H^{(n)}\varphi, f) = \Big(\sum_{k=-n^2-1}^{n^2} \lambda_k^{(n)} E(\Delta_k^{(n)})\varphi, E^{(n)} f \Big) \to$$

$$\to \Big(\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\Delta_\lambda)\varphi, f \Big) = (H\varphi, f), \; n \to \infty,$$

$$|(H^{(n)}\varphi, (1 - E_1^{(n)}) f)| \leqslant C \, |(1 - E_1^{(n)}) f| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Thus $(H^{(n)}\varphi, f) \to (H\varphi, f)$ and therefore

$$|H^{(n)}\varphi - H\varphi|^2 = |H^{(n)}\varphi|^2 - 2R(H^{(n)}\varphi, H\varphi) + |H\varphi|^2 \to 0.$$

So the limite operator $H^{(0)}$ of $H^{(n)}$ is connected with H_0 by the relation $H_0 \subset H^{(0)}$; hence $H = \tilde{H}_0 \subset \tilde{H}^{(0)}$ and 2^{oo} of definition 7 is also satisfied.

The spectral function of $H^{(n)}$ has the form $F^{(n)}(\lambda) = \sum_{\lambda_k^{(n)} < \lambda} E^{(n)}(\Delta_k^{(n)})$; hence denoting by $\lambda^{(n)}$ the greatest of the numbers $\lambda_k^{(n)} < \lambda$, we have

$$E_1^{(n)} F^{(n)}(\lambda) f = \sum_{\lambda_k^{(n)} < \lambda} E_1^{(n)} E(\Delta_k^{(n)}) f = E_1^{(n)} E(\lambda^{(n)}) f, \quad f \in \mathfrak{H}_1.$$

Using $\lambda^{(n)} \to \lambda$, 2^o of definition 3 and applying the same argument as before, we deduce 3^{oo} from definition 7.

§ 4. Minimal extensions of a symmetric operator

Definition 8. A self-adjoint extension H in $\mathfrak{H}$ of a symmetric operator H_1 in $\mathfrak{H}_1$ ($\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$) will be called minimal, if none of the subspaces of $\mathfrak{H}_2 = \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{H}_1$ different from (0) reduce H.

THEOREM 7. *For every self-adjoint extension H in $\mathfrak{H}$ of a symmetric operator H_1 in $\mathfrak{H}_1$ ($\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$) there exists a minimal self-adjoint extension H_0 n a Hilbert space $\mathfrak{H}_0$ satisfying $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$, $H_0 \subset H$. The operators H_0 and H determine the same spectral function of H_1.*

Proof. Let $E(\lambda)$ be the spectral function of H. Denote by $\mathfrak{H}_0$ the closed linear manifold determined by all $E(\lambda) f$, $-\infty < \lambda < +\infty$, $f \in \mathfrak{H}_1$. Clearly $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$ and $\mathfrak{H}_0$ reduces H. Then the part H_0 of H in $\mathfrak{H}_0$ is the required minimal extension of H_1. The last assertion follows from $E(\lambda) f = E_0(\lambda) f$ for $f \in \mathfrak{H}_1$, where $E_0(\lambda)$ is the spectral function of H_0.

Definition 9. Two minimal self-adjoint extensions H', H'' in $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{H}''$ of a symmetric operator H_1 in $\mathfrak{H}_1$ will be said to be equivalent with respect to $\mathfrak{H}_1$, if there exists an isometric mapping X of $\mathfrak{H}'$ onto $\mathfrak{H}''$ satisfying $H'' = XH'X^{-1}$ and $Xf = f$ for $f \in \mathfrak{H}_1$.

THEOREM 8. *In order that two minimal extensions H', H'' of a symmetric operator H_1 in $\mathfrak{H}_1$ should define the same spectral function $E_1(\lambda)$, it is necessary and sufficient that they should be equivalent with respect to $\mathfrak{H}_1$.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 319—334 Série mathématique

Б. И. СЕГАЛ

О НЕКОТОРЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе рассматривается приближенное представление положительных чисел при помощи членов последовательностей целых чисел, в каноническое разложение которых входят лишь заданные простые числа с показателями, представляющими собою точные степени целых чисел.

§ 1

В нашей работе (1) мы рассматривали последовательности целых чисел, производимые системой простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_l$, т. е. последовательности целых чисел, каноническое разложение которых содержит лишь заданные простые числа $p_1, p_2, \ldots, p_l$. При этом мы получили несколько теорем, относящихся к приближенному представлению положительных чисел при помощи членов таких последовательностей в предположении, что показатели степеней простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_l$ принимают значения любых целых чисел или значения простых чисел. Можно поставить ряд других задач подобного рода и рассматривать последовательности целых чисел, производимые системой простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_l$ с теми или иными условиями для показателей степеней этих простых чисел. В настоящей работе мы рассматриваем числа, имеющие каноническое разложение вида

$$p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_l^{\sigma_l},$$

где $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ представляют собою точные n-ые степени целых чисел (n — целое). Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. *Пусть $N > 0$, n — целое $\geqslant 2$, l — целое $\geqslant r+1$, где r — наибольшее четное число, удовлетворяющее условию*

$$r < 4{,}81\, n(n+1)(n+2)\log n;$$

пусть, далее, $p_1, p_2, \ldots, p_l$ — данные простые числа, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_l$ принимают значения точных n-ых степеней целых чисел, d удовлетворяет условию

$$e^{-\Delta_1} \leqslant d \leqslant e^{\Delta_1}, \quad \Delta_1 = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда мы имеем для числа I_N представлений N в виде

$$N = dp_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_l^{\sigma_l} \qquad (1)$$

следующую асимптотическую формулу:

$$I_N = \frac{2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^l}{(\log p_1)^{\frac{1}{n}} \ldots (\log p_l)^{\frac{1}{n}} \Gamma\left(\frac{l}{n}\right)} (\log N)^{\frac{l}{n}-1} \Delta_1 +$$

$$+ O\left((\log N)^{\frac{l}{n}-1} e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}\right), \qquad (2)$$

где $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$.

При доказательстве этой теоремы мы пользуемся одной весьма общей леммой И. М. Виноградова ([2]) и той же оценкой А. О. Гельфонда ([3]), которой мы уже пользовались в нашей работе ([1]). Однако задачу, рассматриваемую в настоящей работе, а также задачи, рассматривавшиеся нами в работе ([1]), можно решить и без применения указанной оценки А. О. Гельфонда и при этом получаются те же результаты, но с менее точным значением для Δ_1.

§ 2

Кроме обозначений, введенных нами в формулировке нашей теоремы (§ 1), мы будем пользоваться еще следующими:

1) $A \ll B$ означает, что $A = O(B)$;

2) (ξ) означает расстояние от вещественного числа ξ до ближайшего целого;

3) $e(\xi) = e^{2\pi i \xi}$;

4) $A = \log N, \quad X = \sqrt[n]{A}$;

5) n — целое постоянное $\geqslant 2$, $\nu = \frac{1}{n}$;

6) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_9$ означают сколь-угодно малые положительные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\varepsilon > \varepsilon_0 > \varepsilon_1 > \ldots > \varepsilon_9;$$

7) $\sigma_\lambda = x_\lambda^n$, где x_λ принимают целые значения $(\lambda = 1, \ldots, l)$;

8) $\gamma_\lambda = \log p_\lambda$, $\lambda = 1, \ldots, l$;

9) $\beta_\mu = (\log A)^{\frac{1}{3}-\varepsilon_\mu}$, $\mu = 0, 1, \ldots, 9$;

10) $S_\lambda = \sum_{x=1}^{X} e(z\gamma_\lambda x^n)$ $(\lambda = 1, \ldots, l)$, где z — вещественное число;

11) $D = \frac{1}{2^{s-1}\pi^{s+1}}$, где s — целое положительное число;

12) $U = \frac{\sin 2\pi\Delta z \sin^s 2\pi\delta z}{\delta^s z^{s+1}}$, где $\Delta = \Delta_1 + s\delta$, $\delta = e^{-\beta_1}$, $s = [(\log A)^{\frac{2}{3}+\varepsilon_2}]$.

§ 3

При доказательстве теоремы мы будем пользоваться следующими леммами, указанными в нашей работе [1].

ЛЕММА 1. *Если p_1 и p_2 — два простых числа, ε — сколь угодно малое положительное число и*

$$\frac{\log p_2}{\log p_1}=\frac{r}{q}+\frac{\theta}{q\tau}, \quad (r, q)=1, \quad q\leqslant\tau, \quad 0<\theta\leqslant 1,$$

то для достаточно больших значений τ имеет место неравенство

$$q>e^{(\log\tau)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}.$$

ЛЕММА 2. *Для функции*

$$\varphi(y, \Delta, \delta)=D\int_0^\infty Ue(yz)\,dz$$

имеем

$$\begin{aligned}\varphi=0, &\quad \text{когда} \quad \Delta+s\delta\leqslant|y|,\\ 0\leqslant\varphi\leqslant 1, &\quad \text{когда} \quad \Delta-s\delta\leqslant|y|\leqslant\Delta+s\delta,\\ \varphi=1, &\quad \text{когда} \quad |y|\leqslant\Delta-s\delta.\end{aligned}$$

ЛЕММА 3. *Если K принимает целые значения, а L — любое положительное целое число, то*

$$\int_0^L e(Kz)\,dz$$

равен нулю, если $K\neq 0$, и равен L, если $K=0$.

Леммы 1, 2 и 3 являются соответственно леммами 4, 5 и 7 нашей работы [1]. Кроме этих лемм нам потребуются еще следующие.

ЛЕММА 4. *Если $A<B$, k — целое $\geqslant 2$, $f_1(z), \ldots, f_k(z)$ в промежутке $A\leqslant z\leqslant B$ ограничены и не отрицательны, то*

$$\int_A^B f_1\ldots f_k\,dz\leqslant\Big(\int_A^B f_1^k\,dz\Big)^{\frac{1}{k}}\ldots\Big(\int_A^B f_k^k\,dz\Big)^{\frac{1}{k}}.$$

Эта лемма непосредственно следует из известного неравенства Hölder'а (см., например, в книге [4] теорему 188 на стр. 140).

ЛЕММА 5. *Если $Y\geqslant 1$, r имеет значение, указанное в формулировке теоремы (§ 1),*

$$\Omega_\rho=\sum_{x=1}^P e(g_\rho zF(x)) \qquad (\rho=1, \ldots, r),$$

где $g_1, \ldots, g_r$ — положительные постоянные числа,

$$F(x)=c_0x^n+\ldots+c_{n-1}x+c_n,$$

$c_0, \ldots, c_{n-1}, c_n$ — целые постоянные числа, причем $c_0\geqslant 1$, то

$$J=\int_0^\lambda|\Omega_1|\ldots|\Omega_r|\,dz\ll YP^{r-n}.$$

Доказательство. По лемме 4 имеем

$$J \leqslant W_1^{\frac{1}{r}} \ldots W_r^{\frac{1}{r}}, \tag{3}$$

где

$$W_\rho = \int_0^Y |\Omega_\rho|^r dz, \quad \rho = 1, \ldots, r.$$

Введем в последний интеграл подстановку

$$g_\rho z = \zeta.$$

Тогда

$$W_\rho = \frac{1}{g_\rho} \int_0^{g_\rho Y} \left| \sum_{x=1}^{P} e(\zeta F(x)) \right|^r d\zeta \ll \int_0^{L} \left| \sum_{x=1}^{P} e(\zeta F(x)) \right|^r d\zeta, \tag{4}$$

где

$$L = [g_\rho Y] + 1 = O(Y).$$

Далее находим

$$\int_0^L \left| \sum_{x=1}^{P} e(\zeta F(x)) \right|^r d\zeta = \sum_{x_1=1}^{P} \ldots \sum_{x_r=1}^{P} \int_0^L e(\zeta(c_0 V_n + c_1 V_{n-1} + \ldots + c_{n-1} V_1))\, d\zeta, \tag{5}$$

где

$$V_n = x_1^n + \ldots + x_{\frac{r}{2}}^n - x_{\frac{r}{2}+1}^n - \ldots - x_r^n,$$
$$V_{n-1} = x_1^{n-1} + \ldots + x_{\frac{r}{2}}^{n-1} - x_{\frac{r}{2}+1}^{n-1} - \ldots - x_r^{n-1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$V_1 = x_1 + \ldots + x_{\frac{r}{2}} - x_{\frac{r}{2}+1} - \ldots - x_r.$$

Согласно лемме 6, опубликованной в работе И. М. Виноградова (²), число решений Q в целых $x_1, \ldots, x_r$ последней системы при любых целых $V_1, V_2, \ldots, V_n$ удовлетворяет соотношению

$$Q \ll P^{r - \frac{n(n+1)}{2}}. \tag{6}$$

При помощи леммы 3 находим, что интеграл правой части (5) равен нулю, если

$$c_0 V_n + c_1 V_{n-1} + \ldots + c_{n-1} V_1 \neq 0,$$

и равен L, если

$$c_0 V_n + c_1 V_{n-1} + \ldots + c_{n-1} V_1 = 0.$$

Поэтому правая часть (5) равна числу L, умноженному на число решений неопределенного уравнения

$$c_0 V_n + c_1 V_{n-1} + \ldots + c_{n-1} V_1 = 0$$

в целых положительных $x_1, \ldots, x_r$, не превосходящих P, и следовательно не превосходит числа LQ, умноженного на число Q' решений неопределенного уравнения

$$c_0 v_n + c_1 v_{n-1} + \ldots + c_{n-1} v_1 = 0 \tag{7}$$

в целых $v_1, \ldots, v_n$, причем

$$v_1 \ll P, \ldots, v_{n-1} \ll P^{n-1}, \ v_n \ll P^n.$$

Выражение $c_1 v_{n-1} + \ldots + c_{n-1} v_1$ принимает

$$\ll P^{n-1} P^{n-2} \ldots P = P^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

значений и при каждом таком значении имеется не более одного значения v_n, удовлетворяющего уравнению (7). Поэтому

$$Q' \ll P^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

и мы находим при помощи (6), что правая часть (5)

$$\ll YQQ' \ll YP^{r - \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2}} = YP^{r-n}.$$

Ввиду этого мы получаем из (4)

$$W_\rho \ll YP^{r-n}$$

и из (3)

$$J \ll YP^{r-n},$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 6. *Если p_1 и p_2 — два простых числа, z — положительное вещественное число, $\eta_1, \ldots, \eta_4$ — произвольно малые положительные постоянные, удовлетворяющие условию*

$$\eta_4 < \eta_3 < \min(\eta_1, \eta_2)$$

и

$$z \log p_1 = \frac{a_1}{q_1} + \frac{\theta_1}{q_1 \tau}, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 0 < q_1 \leqslant \tau, \quad |\theta| < 1, \tag{8}$$

причем

$$q_1 \leqslant e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3} - \eta_1}}, \quad \frac{a_1}{q_1} \ll e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3} - \eta_2}}, \tag{9}$$

то

$$z \log p_2 = \frac{a_2}{q_2} + \frac{\lambda}{q_2^2}, \quad (a_2, q_2) = 1, \quad |\lambda| \leqslant \Lambda,$$

причем

$$\Lambda \ll e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3} - \eta_3}}, \quad e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3} - \eta_4}} \ll q_2 \ll \tau^{\frac{1}{2}}.$$

Доказательство. Полагая

$$\tau_1 = \tau^{\frac{1}{2}} e^{-(\log \tau)^{\frac{1}{3} - \eta_1}}, \tag{10}$$

имеем

$$\frac{\log p_2}{\log p_1} = \frac{a}{q} + \frac{\theta}{q \tau_1}, \quad (a, q) = 1, \quad 0 < q \leqslant \tau_1, \quad 0 < |\theta| < 1, \tag{11}$$

причем по лемме 1

$$q \gg e^{(\log \tau_1)^{\frac{1}{3} - \varepsilon}} \gg e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3} - \eta_5}}, \tag{12}$$

где $\eta_5 < \eta_4$. Из (8) и (11) находим

$$z \log p_2 = z \log p_1 \cdot \frac{\log p_2}{\log p_1} = \frac{aa_1}{qq_1} + \frac{a\theta_1}{qq_1\tau} + \frac{a_1\theta + \frac{\theta\theta_1}{\tau}}{qq_1\tau_1},$$

или

$$z \log p_2 = \frac{aa_1}{qq_1} + \frac{g}{\tau} + \frac{(a_1q_1 + 1)\,\theta_2}{qq_1^2\tau_1}, \tag{13}$$

где g по абсолютной величине не превосходит некоторое постоянное, а $|\theta_2| \leqslant 1$. Ввиду второго соотношения (9) имеем

$$a_1 \ll e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3}-\eta_2}} q_1,$$

или, воспользовавшись первым соотношением (9),

$$a_1 \ll e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3}-\eta_6}}, \tag{14}$$

где η_6 удовлетворяет условию $\eta_3 < \eta_6 < \min(\eta_1, \eta_2)$.

Из последнего соотношения и (12) находим

$$\frac{q}{a_1} \gg e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3}-\eta_4}}. \tag{15}$$

Кроме того из первого соотношения (9) и из равенства (10) получаем

$$\tau \gg (qq_1)^2, \tag{16}$$

а из первого соотношения (9) и из соотношения (14)

$$a_1q_1 \ll e^{(\log \tau)^{\frac{1}{3}-\eta_3}}. \tag{17}$$

Учитывая соотношения (15), (16) и (17), мы выводим из равенства (13), что

$$z \log p_2 = \frac{a_2}{q_2} + \frac{\lambda}{q_2^2}, \quad |\lambda| \leqslant \Lambda,$$

где a_2, q_2 и Λ имеют значения, указанные в формулировке леммы, что и требовалось доказать.

ЛЕММА 7 (ср. в книге ([5]) теорему 354). *Пусть*

$$S = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e(f(x)), \quad f(x) = \alpha x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_n,$$

где $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — *вещественные числа*, n — *целое* $\geqslant 2$, Q — *целое*, P — *целое положительное число. Если*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\lambda}{q^2}, \quad q > 0, \quad (a, q) = 1, \quad 1 \leqslant q \leqslant P^{n-1}, \quad |\lambda| \leqslant \Lambda, \quad \Lambda \geqslant 1,$$

то

$$S \ll P \cdot \Lambda^{2^{-n+1}} \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P}\right)^{(1-\varepsilon)2^{-n+1}},$$

где $\varepsilon > 0$, *а постоянная, связанная со знаком* $\ll$, *зависит только от* n *и* ε.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой 266 книги ([5]), получим

$$|S|^{2^{n-1}} \ll P^{\varepsilon'}\left(P^{2^{n-1}-1}+P^{2^{n-1}-n}\sum_{h=1}^{n!P^{n-1}}\min\left(P, \frac{1}{(\alpha h)}\right)\right), \tag{18}$$

где $\varepsilon' > 0$. Сумму, стоящую в правой части, мы можем разбить на $\ll P^{n-1}q^{-1}$ сумм вида

$$\Omega \doteq \sum_{h=R+1}^{R+q}\min\left(P, \frac{1}{(\alpha h)}\right)=\sum_{s=1}^{q}\min\left(P, \frac{1}{(T+\alpha s)}\right).$$

Каково бы ни было T, мы можем выбрать целое число b так, что

$$T=\frac{b}{q}+\frac{\theta}{q}, \quad |\theta|<1,$$

причем можно предполагать, что θ имеет знак, противоположный знаку λ. Из последнего равенства и из условий теоремы мы находим

$$(T+\alpha s)=\left(\frac{b}{q}+\frac{\theta}{q}+\frac{as}{q}+\frac{\lambda s}{q^2}\right)=\left(\frac{as+b+\frac{\lambda s}{q}+\theta}{q}\right)=\left(\frac{\nu(s)+\theta_s\Lambda}{q}\right),$$

где $\nu(s)$ означает наименьший неотрицательный вычет числа $as+b$ по модулю q, а $|\theta_s|\leqslant 1$. Легко видеть, что в каждой сумме Ω $\nu(s)$ принимает каждое значение $0, 1, \ldots, q-1$ не более одного раза. Пусть

$$q>4\Lambda+1;$$

так как

$$\nu(s)-\Lambda\leqslant\nu(s)+\theta_s\Lambda\leqslant\nu(s)+\Lambda,$$

то для значений $\nu(s)$, удовлетворяющих условию

$$2\Lambda\leqslant\nu(s)\leqslant q-2\Lambda, \tag{19}$$

имеем

$$(T+\alpha s)\geqslant\min\left(\frac{\nu(s)-\Lambda}{q}, \frac{q-\nu(s)-\Lambda}{q}\right)\geqslant\min\left(\frac{\nu(s)}{2q}, \frac{q-\nu(s)}{2q}\right).$$

Каждое слагаемое суммы Ω со значением $\nu(s)$, не удовлетворяющим условию (19), заменяем через P (таких слагаемых будет меньше $4\Lambda+1$), а каждое слагаемое суммы Ω со значением $\nu(s)$, удовлетворяющим условию (19), мы можем заменить через $\max\left(\frac{2q}{\nu(s)}, \frac{2q}{q-\nu(s)}\right)$. Поэтому

$$\Omega\leqslant(4\Lambda+1)P+2q\sum\max\left(\frac{1}{\nu(s)}, \frac{1}{q-\nu(s)}\right),$$

где сумма в правой части распространяется на все целые значения $\nu(s)$, удовлетворяющие условию (19). Отсюда легко находим

$$\Omega\leqslant(4\Lambda+1)P+2q\cdot 2\sum_{\nu=2}^{\left[\frac{q}{2}\right]+1}\frac{1}{\nu}\ll\Lambda P+q\log q,$$

или

$$\Omega\ll P^{\varepsilon''}(\Lambda P+q), \quad \varepsilon''>0.$$

Последнее соотношение, очевидно, справедливо и в случае, когда $q \leqslant 4\Lambda + 1$. Поэтому сумма, стоящая в правой части (18), будет

$$\ll P^{n-1} q^{-1} \cdot P^{\varepsilon''} (\Lambda P + q) = P^{\varepsilon''} P^n \left(\frac{\Lambda}{q} + \frac{1}{P} \right),$$

и

$$S^{2^{n-1}} \ll P^{\varepsilon' + \varepsilon''} \left(P^{2^{n-1}-1} + P^{2^{n-1}} \left(\frac{\Lambda}{q} + \frac{1}{P} \right) \right),$$

откуда

$$S^{2^{n-1}} \ll P^{2^{n-1}+\varepsilon} \left(\frac{\Lambda}{q} + \frac{1}{P} \right), \quad \varepsilon > 0.$$

Если $P \leqslant q \leqslant P^{n-1}$, то находим отсюда

$$S^{2^{n-1}} \ll P^{2^{n-1}+\varepsilon} \Lambda \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{P} \right) \ll P^{2^{n-1}} \frac{\Lambda}{P^{1-\varepsilon}},$$

или

$$S \ll P \Lambda^{2^{-n+1}} \left(\frac{1}{P} \right)^{(1-\varepsilon) 2^{-n+1}}. \tag{20}$$

Если же $1 \leqslant q < P$, то разбиваем сумму S на $\ll \frac{P}{q}$ частичных сумм с интервалом суммирования, не превосходящим q. К каждой такой сумме мы можем применить соотношение (20) и найдем

$$S \ll \frac{P}{q} \cdot q \Lambda^{2^{-n+1}} \left(\frac{1}{q} \right)^{(1-\varepsilon) 2^{-n+1}} \ll P \Lambda^{2^{-n+1}} \left(\frac{1}{q} \right)^{(1-\varepsilon) 2^{-n+1}}. \tag{21}$$

Из соотношений (20) и (21) непосредственно вытекает лемма.

ЛЕММА 8 (ср. в работе [2] лемму 7). *Пусть S имеет то же значение, что и в лемме 7. Если*

$$\alpha = \frac{a}{q} + \frac{\lambda}{q^2}, \quad q > 0, \quad (a, q) = 1, \quad P^{n-1} < q < P^n, \quad \lambda \leqslant \Lambda, \quad \Lambda \geqslant 1,$$

то

$$S \ll P \left(\frac{\Lambda}{P} + \frac{q}{P^n} \right)^{\rho}, \quad \rho = (19{,}24\, n^3 \log n)^{-1}.$$

Доказательство. Полагаем

$$Y = \left[P \left(\frac{q}{P^n} \right)^{\frac{1}{4r+n-1}} \right],$$

где r имеет прежнее значение (§ 1, теорема), и находим

$$S = \frac{\Omega}{Y} + O(Y), \quad \Omega = \sum_{y=1}^{Y} \sum_{h=1}^{P} e\left(f(Q+h+y)\right). \tag{22}$$

Заметим, что

$$f(Q+h+y) = By^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_n,$$

где коэффициенты $B_1, \ldots, B_n$ зависят от h, причем

$$B = \alpha, \quad B_1 = n\alpha Q + n\alpha h + \alpha_1.$$

Применяя неравенство Коши—Шварца, мы находим

$$|\Omega|^r \leqslant P^{r-1} \sum_{h=1}^{P} \left| \sum_{y=1}^{Y} e\left(By^n + B_1 y^{n-1} + \ldots + B_n\right) \right|^r,$$

или

$$|\Omega|^r \leqslant P^{r-1} \sum_{h=1}^{P} \sum_{y_1=1}^{Y} \cdots \sum_{y_r=1}^{Y} e\left(BV_n + B_1 V_{n-1} + \ldots + B_{n-1} V_1\right),$$

где

$$\begin{aligned} V_n &= y_1^n + \ldots + y_{\frac{r}{2}}^n - y_{\frac{r}{2}+1}^n - \ldots - y_r^n, \\ V_{n-1} &= y_1^{n-1} + \ldots + y_{\frac{r}{2}}^{n-1} - y_{\frac{r}{2}+1}^{n-1} - \ldots - y^{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_1 &= y_1 + \ldots + y_{\frac{r}{2}} - y_{\frac{r}{2}+1} - \ldots - y_r. \end{aligned}$$

Так как число решений этой системы в целых положительных $y_1, \ldots, y_r$, не превосходящих Y, будет, по лемме 6 работы (²) И. М. Виноградова, $\ll Y^{r-\frac{n(n+1)}{2}}$ и так как B не зависит от h, то

$$\Omega^r \ll P^{r-1} Y^{r-\frac{n(n+1)}{2}} Y^n \sum_{V_{n-1}} \cdots \sum_{V_1} \left| \sum_h e\left(B_1 V_{n-1} + \ldots + B_{n-2} V_1\right) \right|,$$

где $V_1, \ldots, V_{n-1}$ принимают ряд последовательных целых значений, не превосходящих соответственно $Y, \ldots, Y^{n-1}$.

Применяя к последнему соотношению неравенство Коши—Шварца, мы получаем

$$\Omega^r \ll P^{r-1} Y^{r-\frac{n(n-1)}{2}} \times$$

$$\times \left(Y^{\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{V_{n-1}} \cdots \sum_{V_1} \sum_h \sum_{h'} e\left(V_{n-1}(B_1 - B_1') + \ldots + V_1 (B_{n-1} - B_{n-1}')\right) \right)^{\frac{1}{2}},$$

где $B_1', \ldots, B_{n-1}'$ получаются соответственно из $B_1, \ldots, B_{n-1}$ заменой h на h'.

Так как система чисел $V_1, \ldots, V_{n-2}$ может принять не более $Y \ldots Y^{n-2} = Y^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$ различных систем значений, то

$$\Omega^r \ll P^{r-1} Y^{r-\frac{n(n-1)}{2}} \left(Y^{\frac{n(n-1)}{2} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}} \sum_h \sum_{h'} \left| \sum_{V_{n-1}} e\left(n\alpha (h - h') V_{n-1}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Но так как разность $h - h'$ может принимать значения $\ll P$ и каждое значение $\ll P$ раз, то

$$\Omega^r \ll P^r Y^r \left(Y^{-n+1} P^{-1} \sum_s \left| \sum_{V_{n-1}} e\left(n\alpha s V_{n-1}\right) \right| \right)^{\frac{1}{2}},$$

где суммирование по s проводится для значений s порядка ниже P. Из последнего соотношения применением неравенства Коши—Шварца получаем

$$\Omega^r \ll P^r Y^r \left(Y^{-n+1} P^{-1} \left(P \sum_s \left| \sum_{V_{n-1}} e\left(n\alpha s V_{n-1}\right) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}},$$

откуда [см., например, в книге ([6]) лемму 6 главы I]

$$\Omega^r \ll P^r Y^r \left(Y^{-n+1} P^{-1} (PT)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{23}$$

где

$$T = \sum_s \min^2 \left(Y^{n-1}, \frac{1}{2(n\alpha s)}\right).$$

Прежде чем приступить к оценке суммы T, заметим, что эту сумму можно переписать так:

$$T = \sum_t \min^2 \left(Y^{n-1}, \frac{1}{2(\alpha t)}\right),$$

причем t, так же как и s, принимает последовательные целые значения порядка не выше P. По условию леммы имеем ($|t| < q$)

$$(\alpha t) = \left(\frac{at}{q} + \frac{\frac{\lambda t}{q}}{q}\right) = \left(\frac{\nu(t) + \Lambda\theta_t}{q}\right),$$

где $\nu(t)$ — наименьший неотрицательный вычет числа at по модулю q. Так как

$$2|t| \ll P \leqslant P^{n-1} < q$$

и $(a, q) = 1$, то $\nu(t)$ может принимать каждое из значений $0, 1, \ldots, q-1$ не более одного раза. Рассуждая теперь так же, как при доказательстве предыдущей леммы, найдем

$$T \ll \Lambda Y^{2n-2} + q^2 \sum_{\nu=\Lambda}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \ll \Lambda Y^{2n-2},$$

если $q \leqslant \Lambda Y^{n-1}$, и

$$T \ll (qY^{-n+1}) Y^{2n-2} + q^2 \sum_{\nu=qY^{-n+1}}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \ll Y^{n-1} q,$$

если $q > \Lambda Y^{n-1}$. Таким образом всегда имеем

$$T \ll \Lambda Y^{2n-2} + Y^{n-1} q = PY^{2n-2}\left(\frac{\Lambda}{P} + \frac{q}{PY^{n-1}}\right).$$

При помощи этой оценки мы получаем из (23)

$$\Omega^r \ll P^r Y^r \left(\frac{\Lambda}{P} + \frac{q}{PY^{n-1}}\right)^{\frac{1}{4}}, \quad \Omega \ll PY \left(\frac{\Lambda}{P} + \frac{q}{PY^{n-1}}\right)^{\frac{1}{4r}},$$

а из (22) находим

$$S \ll P\left(\frac{\Lambda}{P} + \frac{q}{PY^{n-1}}\right)^{\frac{1}{4r}} + Y.$$

Так как

$$4r + n - 1 < 19{,}24\, n^3 \log n,$$

то из последнего соотношения непосредственно вытекает лемма 8.

Следует заметить, что вместо лемм 7 и 8 мы могли бы пользоваться в настоящей работе одним неравенством, доказанным J. G. van der Corput'ом в его работе (7). Однако леммы 7 и 8 применимы и в тех случаях, когда неравенство van der Corput'а уже неприменимо. Так, например, задачу, рассматриваемую в настоящей работе, можно решить без помощи оценки А. О. Гельфонда (3), если воспользоваться леммами 7 и 8; если же пользоваться неравенством van der Corput'a, то решение задачи получается лишь при помощи оценки А. О. Гельфонда.

ЛЕММА 9. *Если l—целое положительное число, $P \geqslant 1$, $g_1, g_2, \ldots, g_l$—положительны, то для числа $T_l(P)$ целых точек в области*

$$g_1x_1^n + g_2x_2^n + \ldots + g_lx_l^n \leqslant P, \quad x_1 \geqslant 1,\ x_2 \geqslant 1, \ldots, x_l \geqslant 1$$

имеем

$$T_l(P) = \frac{(\Gamma(1+\nu))^l P^{l\nu}}{g_1^\nu g_2^\nu \ldots g_l^\nu \Gamma(1+l\nu)} + O(P^{l\nu-\nu}).$$

Доказательство. Обозначим

$$v_l = g_1u_1^n + \ldots + g_lu_l^n, \quad v_{l-1} = g_1u_1^n + \ldots + g_{l-1}u_{l-1}^n$$

и условимся считать, что $u_1, \ldots, u_l$ принимают только положительные значения, или нуль. Докажем сперва, что

$$T_l(P) = Y + O(P^{l\nu-\nu}), \tag{24}$$

где

$$Y = \int \underset{v_l \leqslant P}{\ldots} \int du_1 \ldots du_l\,.$$

При $l = 1$ равенство (24) очевидно. Допустим, что оно доказано для $l-1$. Имеем

$$T_l(P) = \sum_{\substack{g_1x_1^n + \ldots + g_lx_l^n \leqslant P \\ x_1 \geqslant 1, \ldots, x_l \geqslant 1}} 1 = \sum_{x_l=1}^{\left[\left(\frac{P}{g_l}\right)^\nu\right]} \sum_{\substack{g_1x_1^n + \ldots + g_{l-1}x_{l-1}^n \leqslant P - g_lx_l^n \\ x_1 \geqslant 1, \ldots, x_{l-1} \geqslant 1}} 1 =$$

$$= \sum_{x_l=1}^{\left[\left(\frac{P}{g_l}\right)^\nu\right]} T_{l-1}(P - g_lx_l^n).$$

Так как мы предполагаем равенство (24) доказанным для $l-1$, то

$$T_{l-1}(P - g_lx_l^n) = \int \underset{v_{l-1} \leqslant P - g_lx_l^n}{\ldots} \int du_1 \ldots du_{l-1} + O(P^{l\nu-2\nu});$$

подставив это значение в предыдущее равенство, найдем

$$T_l(P) = \sum_{x_l=1}^{\left[\left(\frac{P}{g_l}\right)^\nu\right]} \int \underset{v_{l-1} \leqslant P - g_lx_l^n}{\ldots} \int du_1 \ldots du_{l-1} + O(P^{l\nu-\nu}).$$

Кратный интеграл, стоящий под знаком суммы в правой части послед-

него равенства, представляет собою монотонно убывающую функцию от x_l, и при $x_l^{n}=0$ порядок его не выше $P^{\nu(l-1)}$. Поэтому

$$T_l(P)=\int_0^{\left(\frac{P}{g_l}\right)^{\nu}} du_l \int_{v_{l-1}\leqslant P-g_l u_l^{n}} \ldots \int du_1 \ldots du_{l-1}+O(P^{l\nu-\nu}),$$

откуда непосредственно следует равенство (24). Введем подстановку

$$g_\lambda^{\nu} u_\lambda = P^{\nu} w_\lambda \qquad (\lambda=1, \ldots, l).$$

Тогда

$$Y=\frac{P^{l\nu}}{g_1^{\nu}\ldots g_l^{\nu}} \int_{\substack{w_1^{n}+\ldots+w_l^{n}\leqslant 1\\ w_1\geqslant 0,\ldots,w_l\geqslant 0}} \ldots \int dw_1 \ldots dw_l .$$

Но последний интеграл, как известно, равен $\frac{(\Gamma(1+\nu))^l}{\Gamma(1+l\nu)}$. Поэтому

$$Y=\frac{(\Gamma(1+\nu))^l P^{l\nu}}{g_1^{\nu}\ldots g_l^{\nu}\Gamma(1+l\nu)} .$$

Подставляя это значение Y в (24), мы получаем лемму 9.

§ 4

Для доказательства нашей теоремы (§ 1) введем числа M, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{array}{l} \log M = A \pm 2\mu\Delta_1, \ \mu=0, 1, 2, \ldots, \\ A(1-\eta)\leqslant \log M \leqslant A(1+\eta), \\ \qquad \eta=e^{-\beta_6}. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Мы можем при помощи леммы 2 написать для числа I_M представлений каждого M в форме

$$M=dp_1^{c_1}p_2^{c_2}\ldots p_l^{c_l} \tag{26}$$

следующую формулу (см. обозначения, § 2):

$$I_M+R=D\int_0^{\infty} US_1S_2\ldots S_l e(-z\log M)\,dz, \tag{27}$$

где R означает погрешность, соответствующую представлениям M в форме (26), когда $\log d$ удовлетворяет условиям

$$-\Delta-s\delta\leqslant \log d\leqslant -\Delta+s\delta$$

или

$$\Delta-s\delta\leqslant \log d\leqslant \Delta+s\delta.$$

Обозначим

$$\Phi(z)=DUS_1S_2\ldots S_l e(-z\log M),$$

$$H_M=\int_0^{\zeta}\Phi(z)\,dz, \qquad \zeta=A^{-1}e^{\beta_5},$$

$$H_1 = \int_{\zeta}^{Z} \Phi(z)\, dz, \qquad Z = e^{\beta_3},$$

$$H_2 = \int_{Z}^{\infty} \Phi(z)\, dz.$$

Тогда имеем

$$|I_M - H_M| \leqslant |H_1| + |H_2| + |R|. \tag{28}$$

Рассмотрим интеграл H_1. Значения z, принадлежащие интервалу $\zeta \leqslant z \leqslant Z$, разобьем на две совокупности E' и E''. К совокупности E' отнесем те значения z, для которых имеет место представление

$$z \log p_1 = \frac{a_1}{q_1} + \frac{\theta}{q_1 \tau_1}, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 0 < q_1 \leqslant \tau_1, \quad |\theta| < 1,$$

причем

$$\tau_1 = Ae^{-\beta_5}, \quad q_1 > e^{\beta_7}.$$

К совокупности E'' отнесем все остальные значения z указанного интервала. Обозначив

$$H_1' = \int_{(E')} \Phi(z)\, dz, \qquad H_1'' = \int_{(E'')} \Phi(z)\, dz,$$

имеем

$$H_1 = H_1' + H_1''. \tag{29}$$

Для каждого значения z из E' имеем по леммам 7 и 8

$$S_1 \ll Xe^{-\beta_4}.$$

Поэтому

$$H_1' \ll DXe^{-\beta_4} \int_{(E')} |\dot{U}|\, |S_2| \ldots |S_l|\, dz.$$

Но так как

$$U \ll \frac{\Delta}{D},$$

а область E' мы можем заменить всем промежутком от 0 до Z, то

$$H_1' \ll \Delta X e^{-\beta_4} \int_{0}^{Z} |S_2| \ldots |S_l|\, dz.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 5, находим

$$H_1' \ll \Delta X e^{-\beta_4} Z X^{l-1-n},$$

или

$$H_1' \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}. \tag{30}$$

К значениям z, принадлежащим E'', мы можем применить лемму 6. В самом деле, для каждого такого значения z имеем

$$z \log p_1 = \frac{a_1}{q_1} + \frac{\theta}{q_1 \tau_1}, \quad (a_1, q_1) = 1, \quad 0 < q_1 \leqslant \tau_1, \quad |\theta| < 1,$$

причем

$$q_1 \leqslant e^{\beta_7}, \quad \frac{a_1}{q_1} \ll e^{\beta_3}, \quad \tau_1 = Ae^{-\beta_5}.$$

Поэтому

$$z \log p_2 = \frac{a_2}{q_2} + \frac{\lambda}{q_2^2}, \quad (a_2, q_2) = 1, \quad |\lambda| \ll \Lambda,$$

причем

$$\Lambda \ll e^{\beta_8}, \quad e^{\beta_9} \ll q_2 \ll A^{\frac{1}{2}},$$

и по лемме 7 находим

$$S_2 \ll Xe^{-\beta_4}.$$

Рассуждая теперь так же, как при оценке H_1', мы находим

$$H_1'' \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}. \tag{31}$$

Воспользовавшись оценками (30) и (31), получаем из (29)

$$H_1 \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}. \tag{32}$$

Для оценки интеграла H_2 мы пользуемся следующими очевидными неравенствами:

$$|S_\lambda| \leqslant X \quad (\lambda = 1, \ldots, l) \quad \text{и} \quad |\sin 2\pi\Delta z \sin^s 2\pi\delta z| \leqslant 1.$$

Тогда

$$H_2 \ll DX^l \delta^{-s} \int\limits_{\zeta}^{\infty} z^{-s-1}\, dz = DX^l \delta^{-s} Z^{-s}.$$

Подставив сюда значения D, δ, s и Z, находим

$$H_2 \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}. \tag{33}$$

Для оценки R, очевидно, достаточно заменить в интеграле правой части (27) Δ через $\Delta - 2s\delta$ и оценить получаемую при этом погрешность. Если мы такую замену произведем в интеграле H_M, то погрешность будет

$$< D \int\limits_0^{\zeta} \frac{|2 \cos 2\pi (\Delta - s\delta) z \sin 2\pi s\delta z \sin^s 2\pi\delta z|}{\delta^s z^{s+1}} |S_1| \ldots |S_l|\, dz,$$

следовательно эта погрешность будет

$$\ll s\delta \int\limits_0^1 |S_1| \ldots |S_l|\, dz.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 5, мы найдем, что погрешность, получаемая при замене в H_M Δ на $\Delta - 2s\delta$, будет

$$\ll X^{l-n} e^{-\beta_0}.$$

Воспользовавшись еще оценками (32) и (33), мы найдем

$$R \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}. \tag{34}$$

При помощи (32), (33) и (34) мы находим из (28)

$$I_M - H_M \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}, \tag{35}$$

откуда при $M = N$ получаем

$$I_\zeta - H_N \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}. \tag{36}$$

§ 5

Для получения асимптотического выражения для I_N остается еще вычислить H_N. С этой целью мы оценим разность $H_M - H_N$. Так как из определения (25) следует, что $\log M = A + \theta A\eta$, $|\theta| \leqslant 1$, то

$$|H_M - H_N| \leqslant D \int_0^{\zeta} |U|\,|S_1| \ldots |S_l|\,|1 - e(z\theta A\eta)|\,dz,$$

откуда находим

$$H_M - H_N \ll \Delta\zeta A\eta \int_0^1 |S_1| \ldots |S_l|\,dz.$$

Применяя к последнему интегралу лемму 5, мы получаем

$$H_M - H_N \ll \Delta\zeta A\eta X^{l-n},$$

или

$$H_M - H_N \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}.$$

Из этого соотношения и (35) получаем $I_M - H_N \ll X^{l-n} e^{-\beta_0}$.

Суммируя это соотношение по всем числам M, находим

$$\sum I_M - VH_N \ll VX^{l-n} e^{-\beta_0}, \tag{37}$$

где V—число чисел M, определенных соотношениями (25), причем

$$V = \frac{A\eta}{\Delta_1} + O(1). \tag{38}$$

Так как $\sum I_M$ обозначает число целых точек в области

$$A(1-\eta) \leqslant \gamma_1 x_1^n + \ldots + \gamma_l x_l^n \leqslant A(1+\eta),$$

то имеем по лемме 9

$$\sum I_M = \frac{(\Gamma(1+\nu))^l A^{l\nu}}{\gamma_1^\nu \ldots \gamma_l^\nu \Gamma(1+l\nu)} [(1+\eta)^{l\nu} - (1-\eta)^{l\nu}] + O(A^{l\nu-\nu}) =$$
$$= \frac{2(\Gamma(1+\nu))^l A^{l\nu}\eta}{\gamma_1^\nu \ldots \gamma_l^\nu \Gamma(l\nu)} + O(A^{l\nu}\eta^2).$$

Подставив это значение в (37), находим

$$\frac{2(\Gamma(1+\nu))^l A^{l\nu}\eta}{\gamma_1^\nu \ldots \gamma_l^\nu \Gamma(l\nu)} - VH_N \ll VX^{l-n} e^{-\beta_0} + A^{l\nu}\eta^2,$$

откуда

$$H_N - \frac{2(\Gamma(1+\nu))^l A^{l\nu}\eta}{\gamma_1^\nu \ldots \gamma_l^\nu \Gamma(l\nu) V} \ll X^{l-n} e^{-\beta_0} + \frac{A^{l\nu}\eta^2}{V}.$$

Воспользовавшись значением (38) для V, мы получаем из последнего соотношения

$$H_N - \frac{2(\Gamma(1+\nu))^l A^{l\nu-1}\Delta_1}{\gamma_1^\nu \ldots \gamma_l^\nu \Gamma(l\nu)} \ll A^{l\nu-1} e^{-\beta_0}.$$

Поэтому из (36) находим

$$I_N = \frac{2(\Gamma(1+\nu))^l A^{l\nu-1}\Delta_1}{\gamma_1^\nu \ldots \gamma_l^\nu \Gamma(l\nu)} \ll A^{l\nu-1} e^{-\beta_0}$$

и наша теорема доказана.

Заметим, что способом, изложенным в настоящей работе, можно решить ряд аналогичных задач. Так, например, можно рассматривать последовательности целых чисел, производимые системой простых чисел $p_1, p_2, \ldots, p_l$, в предположении, что показатели степеней этих простых чисел принимают значения многочлена с целыми коэффициентами, значения n-ых степеней простых чисел и т. п.

В заключение сделаем необходимые исправления к доказательству теоремы 3 (§ 13) нашей работы ([1]). Для оценки S_2 необходимо несколько видоизменить лемму 1 и представить ее в форме, соответствующей леммам 7 и 8 настоящей работы. Кроме того нужно ε_6 и ε_{13} заменить соответственно через ε_8 и ε_9.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР.

Поступило
5. II. 1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Сегал Б. И., О целых числах с каноническим разложением определенного вида, Изв. Ак. Н. СССР, серия матем. (1939), № 5—6, 519—538.
[2] Виноградов И. М., Некоторые общие леммы и их применение к оценке тригонометрических сумм, Матем. сб., нов. серия, 3 (1938), 435—471.
[3] Гельфонд А. О., О приближении алгебраическими числами отношения логарифмов двух алгебраических чисел, Изв. Ак. Н. СССР, серия матем. (1939), № 5—6, 509—518.
[4] Hardy G. H., Littlewood J. E., Polya G., Inequalities, Cambridge, 1934.
[5] Landau E., Vorlesungen über Zahlentheorie, Bd. I, Leipzig, 1927.
[6] Виноградов И. М., Новый метод в аналитической теории чисел, Труды Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. X, 1937, 5—122.
[7] Van der Corput J. G., Une inégalité relative aux sommes de Weyl, Proceedings Koninklijke Nederlandsche Akad. van Wetenschappen, XLII (1939), 461—467.

B. SEGAL. ON CERTAIN SETS OF INTEGERS

SUMMARY

The main result of the present paper (cf. our earlier paper ([1])) is the following

Theorem. *Let $N > 0$, n an integer $\geqslant 2$, $l \geqslant r+1$, where r denotes the greatest even number satisfying the condition*

$$r < 4{,}81 n(n+1)(n+2)\log n;$$

further, let $p_1, p_2, \ldots, p_l$ be given primes,

$$\sigma_\lambda = x_\lambda^n \qquad (\lambda = 1, \ldots, l),$$

where the x_λ run over integers, and d satisfies the condition

$$e^{-\Delta} \leqslant d < e^{\Delta}, \quad \Delta = e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon}}, \quad \varepsilon > 0.$$

Then we have for the number I_N of representations of N in the form

$$N = d\, p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} \ldots p_l^{\sigma_l}$$

the following asymptotical formula

$$I_N = \frac{2\left(\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)^l}{(\log p_1)^{\frac{1}{n}} \ldots (\log p_l)^{\frac{1}{n}}\, \Gamma\left(\frac{l}{n}\right)} (\log N)^{\frac{l}{n}-1}\Delta + O\left((\log N)^{\frac{l}{n}-1} e^{-(\log\log N)^{\frac{1}{3}-\varepsilon_0}}\right),$$

where $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 335–340 Série mathématique

Л. И. ШАТРОВСКИЙ

О МИНИМАЛЬНЫХ БАЗИСАХ НАТУРАЛЬНОГО РЯДА ЧИСЕЛ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается способ элементарного построения бесчисленного множества различных минимальных базисов натурального ряда заданного порядка.

Известно, что базисом h-го порядка для натурального ряда называется возрастающая последовательность натуральных чисел, которая, будучи суммируема в смысле Шнирельмана h раз, дает весь натуральный ряд.

Нетрудно доказать, что последовательность натуральных чисел $\varphi = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots\}$ может являться базисом h-го порядка натурального ряда чисел лишь в том случае, если выполнено условие

$$\varphi(x) \geqslant c_h x^{\frac{1}{h}}, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ — количество членов последовательности φ, не превосходящих x, а $c_h \geqslant 1$ — константа, зависящая от h. Базис h-го порядка, для которого

$$\varphi(x) = O(x^{\frac{1}{h}}), \tag{2}$$

называется минимальным базисом(1).

В печати опубликован пока только один пример минимального базиса, принадлежащий Штеру (2), почти одновременно, независимо от него данный Д. А. Райковым (3).

В настоящей статье дается способ элементарного построения бесчисленного множества различных минимальных базисов заданного порядка h, т. е. базисов, удовлетворяющих условию (2).

Пользуюсь случаем выразить благодарность руководителям семинара по теории чисел Московского педагогического института им. Либкнехта тт. А. П. Дицману и Н. Д. Гиленко за руководство и помощь.

* * *

Пусть натуральное число k_0 удовлетворяет неравенству

$$\frac{k_0+1}{k_0} < \sqrt[h]{2}. \tag{3}$$

Построим систему h чисел

$$q_{1,k}=kp_h!+1, \quad q_{2,k}=kp_h!+p_1, \quad \ldots, \quad q_{h,k}=kp_h!+p_{h-1}, \tag{4}$$

где p_i есть i-ое простое число, а $k \geqslant k_0$. Нетрудно видеть, что для любых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant h$, имеем

$$(q_{i,k}, q_{j,k})=1.$$

Поэтому, если $\prod_{i=1}^{h} q_{i,k}=A_k$ и $a_{\nu,k}=\frac{A_k}{q_{\nu,k}}$,

то

$$(a_{1,k}, a_{2,k}, \ldots, a_{h,k})=1. \tag{5}$$

С другой стороны, из (3) и (4) следует, что

$$\frac{q_{i,k+1}}{q_{i,k}}=\frac{(k+1)p_h!+p_{i-1}}{kp_h!+p_{i-1}}<\frac{k+1}{k}<\sqrt[h]{2},$$

а поэтому

$$A_{k+1}<2A_k. \tag{6}$$

ЛЕММА. *Если* $a_{\nu,k}=\frac{A_k}{q_{\nu,k}}$, *то неопределенное уравнение*

$$a_{1,k}x_1+a_{2,k}x_2+\ldots+a_{h,k}x_h=N \tag{7}$$

всегда разрешимо в неотрицательных целых числах относительно $x_1, x_2, \ldots, x_h$ *для любого целого* $N>(h-1)A_k$.

Доказательство. Из (5) следует разрешимость уравнения (7) в целых числах. Пусть

$$N=a_{1,k}c_1+a_{2,k}c_2+\ldots+a_{h,k}c_h$$

одно из таких решений. Найдем наименьшие неотрицательные вычеты членов $a_{\nu,k}c_\nu$ по модулю A_k, которые обозначим через $a_{\nu,k}c'_\nu$. Тогда очевидно

$$N=a_{1,k}c'_1+a_{2,k}c'_2+\ldots+a_{h-1,k}c'_{h-1}+\left[a_{h,k}c'_h+\sum_{i=1}^{h}a_{i,k}(c_i-c'_i)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{h-1}a_{i,k}c'_i+a_{h,k}c''_h,$$

где c''_h — целое число, так как

$$\sum_{i=1}^{h}a_{i,k}(c_i-c'_i)\equiv 0 \pmod{A_k}\equiv 0 \pmod{a_{h,k}}.$$

Но

$$\sum_{i=1}^{h-1}a_{i,k}c'_i<(h-1)A_k<N,$$

а поэтому $a_{h,k}c''_h>0$. Таким образом слагаемые $a_{1,k}c'_1$, $a_{2,k}c'_2, \ldots$, $a_{h-1,k}c'_{h-1}$, $a_{h,k}c''_h$ неотрицательны, и лемма доказана.

Заметим теперь, что при $k \geqslant k_0$ любые два соседние числа последовательности

$$A_k, \quad A_{k+1}, \ldots, A_{k+l}, \ldots \tag{8}$$

удовлетворяют условию (6).

Пусть теперь

$$\left.\begin{array}{c} A_{k+l_1} \leqslant A_k^2 < A_{k+l_1+1}, \\ A_{k+l_2} \leqslant A_k^3 < A_{k+l_2+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{k+l_{\lambda-1}} \leqslant A_k^\lambda < A_{k+l_{\lambda-1}+1}. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{9}$$

Тогда из (6)

$$\left.\begin{array}{c} A_k^2 < 2A_{k+l_1}, \\ A_k^3 < 2A_{k+l_2}, \\ \cdots\cdots \\ A_k^\lambda < 2A_{k+l_{\lambda-1}}, \\ \cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{10}$$

Построим последовательность

$$\begin{gathered} \varphi_h = \{1, 2, 3, \ldots, (h-1) A_k - 1, (h-1) A_k; \\ a_{1,k}\, x_{1,0},\ a_{2,k}\, x_{2,0}, \ldots, a_{h,k}\, x_{h,0}; \\ a_{1,k+l_1}\, x_{1,1},\ a_{2,k+l_1}\, x_{2,1}, \ldots, a_{h,k+l_1}\, x_{h,1}; \ldots \\ \ldots; a_{1,k+l_{\lambda-1}} x_{1,\lambda-1},\ a_{2,k+l_{\lambda-1}} x_{2,\lambda-1}, \ldots, a_{h,k+l_{\lambda-1}} x_{h,\lambda-1}\}, \end{gathered} \tag{11}$$

где $a_{i,k} = \frac{A_k}{q_{i,k}}$, k удовлетворяет условию (3), а $x_{i,\lambda-1}$ принимают все целые положительные значения, удовлетворяющие неравенствам

$$a_{i,k+l_{\lambda-1}} x_{i,\lambda-1} < (h-1) A_k^{\lambda+1} < 2(h-1) A_{k+l_\lambda}, \qquad l_0 = 0. \tag{12}$$

Для этой последовательности можно доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА. *Последовательность φ_h является минимальным базисом h-го порядка натурального ряда чисел, т. е.*

$$h\varphi_h \equiv \{N\}, \tag{1'}$$

где $\{N\}$ — натуральный ряд чисел,

$$\varphi_h(x) = O(x^{\frac{1}{h}}). \tag{2'}$$

Доказательство. Всякое натуральное число $N < (h-1) A_k$ входит в $h\varphi_h$, так как оно — элемент φ_h. Для всякого же N, удовлетворяющего неравенствам

$$(h-1) A_{k+l_{\lambda-1}} \leqslant N < (h-1) A_{k+l_\lambda},$$

неопределенное уравнение

$$a_{1,k+l_{\lambda-1}} x_{1,\lambda-1} + a_{2,k+l_{\lambda-1}} x_{2,\lambda-1} + \ldots + a_{h,k+l_{\lambda-1}} x_{h,\lambda-1} = N$$

всегда разрешимо в неотрицательных целых числах относительно $x_{\nu,\lambda-1}$ и притом таких, которые удовлетворяют условию (12), что следует из доказанной выше леммы.

Оценим теперь рост $\varphi_h(x)$, где

$$(h-1)\,A_{k+l_{\lambda-2}} < x \leqslant (h-1)\,A_{k+l_{\lambda-1}} \leqslant (h-1)\,A_k^{\lambda}. \tag{13}$$

Имеем

$$\varphi_h(x) \leqslant \varphi_h\{(h-1)\,A_k^{\lambda}\} < (h-1)\,A_k + h\,(h-1)\,\frac{A_k^2}{a_{h,k}} +$$

$$+ h\,(h-1)\,\frac{A_k^3}{a_{h,k+l_1}} + \ \ldots\ + h\,(h-1)\,\frac{A_k^{\lambda}}{a_{h,k+l_{\lambda-2}}} + h(h-1)\,\frac{A_k^{\lambda}}{a_{h,k+l_{\lambda-1}}} +$$

$$+ h\,(h-1)\,\frac{A_k^{\lambda}}{a_{h,k+l_{\lambda}}} + \ \ldots < h\,(h-1)\,A_k\left\{\left[1 + \frac{A_k}{a_{h,k}} + \frac{A_k^2}{a_{h,k+l_1}} + \ \ldots\ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{A_k^{\lambda-1}}{a_{h,k+l_{\lambda-2}}}\right] + A_k^{\lambda-1}\left[\frac{1}{a_{h,k+l_{\lambda-1}}} + \frac{1}{a_{h,k+l_{\lambda}}} + \ \ldots\right]\right\},$$

или согласно (10) и из определения $a_{\nu,k}$

$$\varphi_h(x) < h\,(h-1)\,A_k\left\{[1 + 2q_{h,k} + 2q_{h,k+l_1} + \ \ldots\ + 2q_{h,k+l_{\lambda-2}}] + \right.$$

$$\left. + A_k^{\lambda-1}\left[\frac{q_{h,k+l_{\lambda-1}}}{A_{k+l_{\lambda-1}}} + \frac{q_{h,k+l_{\lambda}}}{A_{k+l_{\lambda}}} + \ \ldots\right]\right\}.$$

Пусть теперь

$$\sqrt[h]{A_{k+l_j}} = g_{k+l_j}.$$

Из (3) имеем

$$\frac{q_{h,k+l_j}}{q_{1,k+l_j}} = \frac{(k+l_j)\,p_h! + p_{h-1}}{(k+l_j)\,p_h! + 1} < \frac{(k+l_j)\,p_h! + p_h!}{(k+l_j)\,p_h!} = \frac{k+l_j+1}{k+l_j} < \sqrt[h]{2} < 2.$$

Поэтому, так как $q_{1,k+l_j} < g_{k+l_j} < q_{h,k+l_j}$, справедливо неравенство

$$q_{h,k+l_j} < 2g_{k+l_j}. \tag{14}$$

Отсюда имеем

$$\varphi_h(x) < h\,(h-1)\,A_k\left\{4\,[1 + g_k + g_{k+l_1} + \ \ldots\ + g_{k+l_{\lambda-2}}] + \right.$$

$$\left. + 2A_k^{\lambda-1}\left[\frac{g_{k+l_{\lambda-1}}}{A_{k+l_{\lambda-1}}} + \frac{g_{k+l_{\lambda}}}{A_{k+l_{\lambda}}} + \ \ldots\right]\right\} <$$

$$< 4h\,(h-1)\,A_k\left\{[1 + g_k + g_{k+l_1} + \ \ldots\ + g_{k+l_{\lambda-2}}] + \right.$$

$$\left. + A_k^{\lambda-1}\left[\frac{1}{g_{k+l_{\lambda-1}}^{h-1}} + \frac{1}{g_{k+l_{\lambda}}^{h-1}} + \ \ldots\right]\right\}.$$

Но из (9) следует $g_{k+l_j} < g_k^{j+1}$. Поэтому

$$1 + g_k + g_{k+l_1} + \ \ldots\ + g_{k+l_{\lambda-2}} < 1 + g_k + g_k^2 + \ \ldots\ + g_k^{\lambda-1} =$$

$$= \frac{g_k^{\lambda} - 1}{g_k - 1} < 2g_k^{\lambda-1}.$$

С другой стороны, из (10) следует $g_k^{\lambda} < \sqrt[h]{2}\,g_{k+l_{\lambda-1}}$. Отсюда имеем

$$\frac{1}{g_{k+l_{\lambda-1}}^{h-1}} + \frac{1}{g_{k+l_{\lambda}}^{h-1}} + \ \ldots < \frac{2}{g_k^{\lambda(h-1)}} + \frac{2}{g_k^{(\lambda+1)(h-1)}} + \ \ldots =$$

$$= 2\,\frac{\dfrac{1}{g_k^{\lambda(h-1)}}}{1 - \dfrac{1}{g_k^{h-1}}} = \frac{2g_k^{h-1}}{(g_k^{h-1} - 1)\,g_k^{\lambda(h-1)}} < \frac{4}{g_k^{\lambda(h-1)}}. \tag{15}$$

Подставляя эти значения в выражение для $\varphi_h(x)$, получим

$$\varphi_h(x) < 4h(h-1)A_k\left[2g_k^{\lambda-1} + \frac{4A_k^{\lambda-1}}{g_k^{\lambda(h-1)}}\right] <$$

$$< 16h(h-1)A_k\left[g_k^{\lambda-1} + \frac{A_k^{\lambda-1}}{g_k^{(\lambda-1)(h-1)}}\right] < 32h(h-1)A_k g_k^{\lambda-1}. \qquad (16)$$

Так как согласно (10)

$$A_k^{\lambda-1} < 2A_{k+l_{\lambda-2}} < 2^h(h-1)A_{k+l_{\lambda-2}} < 2^h x,$$

то

$$g_k^{\lambda-1} = \sqrt[h]{A_k^{\lambda-1}} < 2x^{\frac{1}{h}}. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) непосредственно следует

$$\varphi_h(x) < 64h(h-1)A_k x^{\frac{1}{h}} = O(x^{\frac{1}{h}}),$$

что и требовалось доказать.

Педагогический институт им. К. Либкнехта.
Москва.

Поступило
21. II. 1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Rohrbach H., Ein Beitrag zur additive Zahlentheorie, Math. Zeitschrift, 42 (1936), 1—30.

[2] Stöhr A., Eine Basis h-ter Ordnung für die Menge aller natürlichen Zahlen, Math. Zeitschrift, 42 (1937), 739—743.

[3] Райков Д. А., О базисах натурального ряда, Матем. сб. 44 : 3 (1937), 595.

L. CHATROVSKY. SUR LES BASES MINIMALES DE LA SUITE DES NOMBRES NATURELS

RÉSUMÉ

Jusqu'à présent il n'existe dans la littérature mathématique qu'un seul exemple d'une base minimale de la suite des nombres naturels. C'est l'exemple de Stöhr ([2]) et de Raikoff ([3]).

Ce travail donne une méthode de construire d'une manière élémentaire un ensemble infini de bases minimales distinctes d'ordre donné h, c'est-à-dire de bases satisfaisant à la condition

$$\varphi_h(x) = O(x^{\frac{1}{h}}),$$

$\varphi_h(x)$ étant la quantité des membres de la base φ_h qui ne surpassent pas x.

Etant donné un nombre k_0 pour lequel on a

$$\frac{k_0+1}{k_0} < \sqrt[h]{2}$$

construisons un système de h nombres

$$q_{1k} = kp_h! + 1, \quad q_{2k} = kp_h! + p_1, \ldots, q_{h,k} = kp_h! + p_{h-1},$$

où p_i est le i-ième nombre premier et où $k \geqslant k_0$.

Soit $A_k = \prod_{i=1}^{h} q_{ik}$, $a_{\nu,k} = \frac{A_k}{q_{\nu,k}}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, h)$.

Alors l'équation

$$a_{1k} x_1 + a_{2k} x_2 + \ldots + a_{hk} x_h = N,$$

$N > (n-1) A_k$ peut être toujours satisfaite par des nombres entiers non négatifs x_i. Soient

$$A_{k+l_1} \leqslant A_k^2 < A_{k+l_1+1},$$
$$A_{k+l_2} \leqslant A_k^3 < A_{k+l_2+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{k+l_{\lambda-1}} \leqslant A_k^{\lambda} < A_{k+l_{\lambda-1}+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Lorsque dans la suite

$$\varphi_h = \{1, 2, \ldots, (h-1) A_k - 1, (h-1) A_k; a_{1k} x_{10}, a_{2k} x_{20}, \ldots, a_{hk} x_{h0}; a_{1,k+l_1} x_{11}, a_{2,k+l_1} x_{21}, \ldots, a_{h,k+l_1} x_{h1}; \ldots; a_{1,k+l_{\lambda-1}} x_{1,\lambda-1}, a_{2,k+l_{\lambda-1}} x_{2,\lambda-1}, \ldots \ldots, a_{h,k+l_{\lambda-1}} x_{h,\lambda-1}; \ldots\}$$

les $x_{i\lambda}$ satisfont aux inégalités

$$a_{i,k+l_{\lambda-1}} x_{i,\lambda-1} < (h-1) A_k^{\lambda+1} < 2(h-1) A_{k+l_\lambda},$$

cette suite est une base minimale d'ordre h de la suite des nombres naturels.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 341–348 Série mathématique

Л. М. ШИФНЕР

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В работе изучается форма матриц U_1 и U_2, удовлетворяющих условиям $[U_1[U_2U_1]]=0$ и $[U_2[U_2U_1]]=0$, при наличии которых система Гаусса допускает (по Лаппо-Данилевскому) интегрирование в конечном виде.

Ряды композиций, при помощи которых И. А. Лаппо-Данилевский решает основные задачи аналитический теории дифференциальных уравнений, допускают иногда частичное суммирование, приводящее к представлению интегралов в конечном виде. Особенно часто это происходит в том случае, когда рассматриваемые матрицы коммутируют друг с другом. Условие коммутирования для двух матриц U_1 и U_2 может быть записано в виде

$$[U_1U_2]=0, \tag{1}$$

где под $[U_2U_1]$ понимается $[U_2U_1]=U_2U_1-U_1U_2$.

Имеется также один пример, когда интегрирование в конечном виде происходит благодаря тому, что рассматриваемые матрицы U_1, U_2 удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned}[U_1[U_2U_1]]=0,\\ [U_2[U_2U_1]]=0.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В этом примере интегральная матрица системы Гаусса

$$\frac{dY}{dx}=Y\left(\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{x-a_2}\right), \tag{3}$$

нормированная в точке $x=b$, принимает вид

$$Y_b(x)=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1}e^{[U_2U_1]L_b(a_2a_1\mid x)}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}. \tag{4}$$

Легко показать, что приведенная формула И. А. Лаппо-Данилевского является частным случаем формулы для интегральной матрицы системы

$$\frac{dY}{dx}=Y[U_1\varphi_1(x)+U_2\varphi_2(x)], \tag{5}$$

нормированной в точке $x=b$, а именно формулы

$$Y_b(x)=e^{U_1L_1(b|x)}\cdot e^{[U_2U_1]L_{21}(b|x)}\cdot e^{U_2L_2(b|x)}, \tag{6}$$

где под $L_1(b|x)$, $L_2(b|x)$ и $L_{21}(b|x)$ надо понимать соответственно

$$\int_b^x \varphi_1(t)\,dt, \quad \int_b^x \varphi_2(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_b^x \varphi_1(t)\int_b^t \varphi_2(\tau)\,d\tau\,dt.$$

Для доказательства равенства (6) достаточно провести для системы (5) те же рассуждения, которые были проведены И. А. Лаппо-Данилевским для системы (3). Таким образом, применение равенств (2) не ограничивается примером (3), а выходит за его рамки.

Внутренняя структура матриц U_1 и U_2, подчиняющихся условию (1), изучена весьма подробно. Основными результатами являются следующие:

1° Если матрица U_1 приводится к диагональной и имеет все характеристические числа, отличные друг от друга, т. е. если

$$U_1 = T\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\,T^{-1}, \tag{7}$$

то всякая коммутирующая с ней матрица U_2 должна иметь вид

$$U_2 = T\,[\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n]\,T^{-1}, \tag{7'}$$

где величины $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ не обязательно различны между собой.

2° Если матрица приводится к диагональной форме, но имеет некоторые из характеристических чисел одинаковыми, т. е. если

$$U_1 = T\,[K_1, K_2, \ldots, K_r]\,T^{-1}, \tag{8}$$

где $K_i = \xi_i I_{\rho_i}$ — матрица ρ_i-го порядка, то

$$U_2 = T\,[H_1, H_2, \ldots, H_r]\,T^{-1}, \tag{8}$$

где H_i — произвольная матрица ρ_i-го порядка.

3° Если матрица U_1 приводится к квазидиагональной матрице

$$U_1 = T\,[J_{\rho_1}(\xi_1),\ J_{\rho_2}(\xi_2), \ldots, J_{\rho_r}(\xi_r)]\,T^{-1}, \tag{9}$$

то коммутирующая с ней матрица U_2 имеет вид

$$U_2 = T\,[P_1[J_{\rho_1}(0)],\ P_2[J_{\rho_2}(0)], \ldots, P_r[J_{\rho_r}(0)]]\,T^{-1}, \tag{9'}$$

где $P_i(X)$ — полином $(\rho_i - 1)$-ой степени от X с произвольными числовыми коэффициентами.

4° Если матрица U_1 представлена в виде

$$U_1 = T\,[K_1, K_2, \ldots, K_r]\,T^{-1}, \tag{10}$$

где

$$K_i = [J_{\rho_1^{(i)}}(\xi_i), J_{\rho_2^{(i)}}(\xi_i), \ldots, J_{\rho_{t_i}^{(i)}}(\xi_i)],$$

то коммутирующая с ней матрица U_2 должна получаться из формулы

$$U_2 = T\,[H_1, H_2, \ldots, H_r]\,T^{-1}, \tag{10'}$$

где $H_i = \| H_{kl}^{(i)} \|\ (k, l = 1, 2, \ldots, t_i)$, а $H_{kl}^{(i)}$ — матрица $\rho_k^{(i)} \times \rho_l^{(i)}$-го порядка с элементами

$$\{H_{kl}^{(i)}\}_{pq} \begin{cases} =0 & (\text{при } m < \rho_k^{(i)} - \min(\rho_k^{(i)}, \rho_l^{(i)})) \\ = c_m^{(i,k,l)} & (\text{при } m \geqslant \rho_k^{(i)} - \min(\rho_k^{(i)}, \rho_l^{(i)})) \end{cases}$$

(под m понимается разность $m = p - q$, числа $c_m^{(i,k,l)}$ произвольны). Например, если

$$U_1 = T\,[J_3(\xi),\ J_4(\xi)]\,T^{-1},$$

то

$$U_2 = T \begin{Vmatrix} a_0 & . & . & b_0 & . & . & . \\ a_1 & a_0 & . & b_1 & b_0 & . & . \\ a_2 & a_1 & a_0 & b_2 & b_1 & b_0 & . \\ . & . & . & d_0 & . & . & . \\ c_0 & . & . & d_1 & d_0 & . & . \\ c_1 & c_0 & . & d_2 & d_1 & d_0 & . \\ c_2 & c_1 & c_0 & d_3 & d_2 & d_1 & d_0 \end{Vmatrix} T^{-1}.$$

Исследований внутренней структуры матриц U_1 и U_2, подчиняющихся условиям (2), насколько мне известно, не производилось. Займемся таким исследованием.

Заметим прежде всего, что если матрицы U_1 и U_2 коммутируют, то условия (2) выполняются. Однако это тривиальный случай. Будем искать матрицы U_1 и U_2, удовлетворяющие условиям (2), но не (1).

A) Пусть

$$U_1 = T\,[\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]\,T^{-1},$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ не обязательно все отличны друг от друга. Ищем U_2 в виде $U_2 = TXT^{-1}$. Тогда

$$[U_2 U_1] = T\,\|(\xi_j - \xi_i)\,x_{ij}\|\,T^{-1}$$

и

$$[U_1[U_2 U_1]] = T\,\|-(\xi_j - \xi_i)^2\,x_{ij}\|\,T^{-1}.$$

Из $[U_1[U_2 U_1]] = 0$ вытекает $(\xi_j - \xi_i)^2 x_{ij} = 0$, т. е. $(\xi_j - \xi_i)\,x_{ij} = 0$, и следовательно $[U_2 U_1] = 0$.

Таким образом нетривиальных решений не существует: матрицы U_1 и U_2, удовлетворяющие условиям (2), удовлетворяют также и условиям (1).

B) Пусть теперь

$$U_1 = TJ_n(\xi)\,T^{-1}.$$

Обозначим

$$U_2 = TXT^{-1}.$$

Матрица X должна удовлетворять условиям

$$[J_n(0)\,[XJ_n(0)]]=0, \tag{a}$$

$$[X\,[XJ_n(0)]]=0, \tag{b}$$

так как $J_n(\xi)=\xi+J_n(0)$, и число ξ коммутирует со всякой матрицей.

Из условия (а) получаем (см. сл. 3°)

$$[XJ_n(0)]=\alpha_0+\alpha_1 J_n(0)+\alpha_2 J_n^2(0)+\ldots+\alpha_{n-1} J_n^{n-1}(0).$$

Так как, с другой стороны,

$$[XJ_n(0)]=\|x_{k,\,l+1}-x_{k-1,\,l}\|,$$

то

$$x_{k,\,l+1}-x_{k-1,\,l}\begin{cases} =0 & \text{при} \quad k-l<0,\\ =\alpha_{k-l} & \text{при} \quad k-l\geqslant 0.\end{cases} \tag{c}$$

Обозначим $k-l=s$; числа s являются номерами диагоналей, параллельных главной; сама главная диагональ получает номер 0, диагонали, расположенные ниже главной, — положительные, выше главной — отрицательные номера.

Полагая $s<0$, получаем из (с), что все элементы $(s-1)$-ой диагонали матрицы X равны друг другу. Так как при $k=1$ элемент $x_{k-1,\,l}$ должен считаться равным нулю, то имеем из (с): $x_{1,\,l+1}=0$ при $l>k$, т. е. при $l>1$, иными словами, $x_{13}=x_{14}=\ldots=x_{1n}=0$. Отсюда заключаем, что все элементы диагоналей отрицательного номера (<-1) равны нулю.

Полагая $s\geqslant 0$, видим из (с), что каждый нижестоящий член $(s-1)$-ой диагонали матрицы X получается из ближайшего вышестоящего члена этой диагонали путем сложения последнего с числом α_s; таким образом

$$x_{l+s-1,l}=x_{s,1}+(l-1)\,\alpha_s; \tag{d}$$

если $s=0$, то $x_{s,1}$ не существует и

$$x_{l-1,\,l}=(l-1)\,\alpha_0;$$

в частности

$$x_{n-1,\,n}=(n-1)\,\alpha_0. \tag{e}$$

С другой стороны, считая $k=l=n$, получаем из (с)

$$x_{n-1,n}=-\alpha_0. \tag{f}$$

Из (е) и (f) получаем $\alpha_0=0$, т. е. все элементы (-1)-ой диагонали матрицы X также равны нулю. Итак, матрица

$$X=\|x_{s+1,\,1}+(l-1)\,\alpha_{s+1}\|, \tag{11}$$

где $s=k-l$.

В развернутом виде равенство (11) можно записать так:

$$X=x_{11}+x_{21}J_n(0)+\ldots+x_{n1}J_n^{n-1}(0)+\{\alpha_1+\alpha_2 J_n(0)+\ldots$$
$$\ldots+\alpha_{n-1}J_n^{n-2}(0)\}[0,1,2,\ldots,n-1].$$

Используем теперь условие (b), обозначив левую часть равенства (b) через Z:

$$Z = [X[XJ_n(0)]] = [\alpha_1 + \alpha_2 J_n(0) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1} J_n^{n-2}(0)][0, 1, 2, \ldots, n-1][\alpha_1 J_n(0) + \alpha_2 J_n^2(0) + \ldots + \alpha_{n-1} J_n^{n-1}(0)] +$$
$$- [\alpha_1 J_n(0) + \alpha_2 J_n^2(0) + \ldots + \alpha_{n-1} J_n^{n-1}(0)][\alpha_1 + \alpha_2 J_n(0) + \ldots$$
$$\ldots + \alpha_{n-1} J_n^{n-2}(0)][0, 1, 2, \ldots, n-1],$$

т. е.

$$Z = \| \alpha_{s+1} \| \cdot \{ \| (k-1) \alpha_s \| - \| (l-1) \alpha_s \| \} = \| \alpha_{s+1} \| \cdot \| s\alpha_s \|.$$

Элемент матрицы Z с индексами k и l, $\{Z\}_{kl}$, равен

$$\{Z\}_{kl} = \sum_{r=l+1}^{n} (r-l) \alpha_{k-r+1} \alpha_{r-l},$$

и следовательно

$$\{Z\}_{2k,1} = \alpha_{2k-1} \alpha_1 + 2\alpha_{2k-2} \alpha_2 + \ldots + (n-1) \alpha_{2k-n+r} \alpha_{n-1},$$

т. е. (ввиду равенства нулю чисел α с нулевым и отрицательными значками)

$$\{Z\}_{2k,1} = \alpha_{2k-1} \alpha_1 + 2\alpha_{2k-2} \alpha_2 + \ldots + (2k-1) \alpha_1 \alpha_{2k-1}. \tag{g}$$

Полагая в равенстве (g) $k = 1, 2, \ldots, m = \left[\frac{n}{2}\right]$, приравнивая полученные выражения нулю и решая полученные m уравнений относительно чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, получим

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0. \tag{12}$$

Так как в каждое слагаемое суммы $\{Z\}_{kl}$ входит в качестве множителя одно из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, то при соблюдении условия (12) получим $Z = 0$, т. е. равенство (b) будет соблюдено. Итак, в рассматриваемом случае матрица X имеет вид

$$X = P[J_n(0)] + Q[J_n(0)] R_n, \tag{13}$$

где

$$R_n = J_n^m(0)[0, 1, 2, \ldots, n-1], \tag{13'}$$

а $P(X)$ и $Q(X)$ — многочлены от X степеней $(n-1)$-ой и $(n-m-2)$-ой соответственно, с произвольными коэффициентами. Например, если $U_1 = J_5(\xi)$, то

$$U_2 = \left\| \begin{matrix} a & . & . & . & . \\ b & a & . & . & . \\ c & b & a & . & . \\ d & c+\alpha & b & a & . \\ e & d+\beta & c+2\alpha & b & a \end{matrix} \right\|$$

C) Если

$$U_1 = T\,[J_{\rho_1}(\xi_1), J_{\rho_2}(\xi_2), \ldots, J_{\rho_r}(\xi_r)]\,T^{-1} \quad \text{(все числа } \xi_i \text{ различны)},$$
$$U_2 = TXT^{-1},$$
$$Z = [X\,[J_{\rho_1}(\xi_1),\ J_{\rho_2}(\xi_2), \ldots, J_{\rho_r}(\xi_r)]], \tag{h}$$

то из условия (a) получим

$$Z = [P_1\,[J_{\rho_1}(0)],\ P_2\,[J_{\rho_2}(0)], \ldots,\ P_r\,[J_{\rho_r}(0)]]. \tag{i}$$

С другой стороны, раскрывая (h), имеем

$$Z = \| X_{kl}\,J_{\rho_l}(\xi_l) - J_{\rho_k}(\xi_k)\,X_{kl} \|,$$

где X_{kl} — матрица порядка $\rho_k \times \rho_l$ такая, что

$$X = \| X_{kl} \|.$$

Сравнивая два выражения для матрицы Z, получим

$$X_{kk}\,J_{\rho_k}(\xi_k) - J_{\rho_k}(\xi_k)\,X_{kk} = P_k\,[J_{\rho_k}(0)], \tag{k}$$
$$X_{kl}\ J_{\rho_l}(\xi_l) - J_{\rho_k}(\xi_k)\,X_{kl} = 0, \tag{l}$$

откуда находим

$$X_{kk} = P_k\,[J_{\rho_k}(0)] + Q_k\,[J_{\rho_k}(0)]\,R_{\rho_k}$$

и

$$X_{kl} = 0 \qquad (k \neq l)$$

(так как равенства (k) и (l) приходилось уже разбирать в случаях B и 3° соответственно, где и были получены указанные результаты).

Матрица U_2, таким образом, должна иметь следующий вид

$$U_2 = T\,[P_1\,[J_{\rho_1}(0)] + Q_1\,[J_{\rho_1}(0)]\,R_{\rho_1},\ P_2\,[J_{\rho_2}(0)] + Q_2\,[J_{\rho_2}(0)]\,R_{\rho_2}, \ldots$$
$$\ldots,\ P_r\,[J_{\rho_r}(0)] + Q_r\,[J_{\rho_r}(0)]\,R_{\rho_r}]\,T^{-1}. \tag{14}$$

D) Наконец, в случае, когда

$$U_1 = T\,[K_1, K_2, \ldots, K_r]\,T^{-1},$$

где

$$K_i = [J_{\rho_1^{(i)}}(\xi_i),\ J_{\rho_2^{(i)}}(\xi_i), \ldots, J_{\rho_{t_i}^{(i)}}(\xi_i)],$$

матрица U_2 имеет вид

$$U_2 = T\,[H_1, H_2, \ldots, H_r]\,T^{-1},$$

где

$$H_i = \| H_{kl}^{(i)} \| \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, t_i)$$

с

$$H_{kl}^{(i)} = \| x_{s+1,1}^{(i,k,l)} + (l-1)\alpha_{s+1}^{(i,k,l)} \|,$$

причем между числами x и α с различными значками имеются соотношения

$$A_1^{(i)}X_1^{(i)} - X_1^{(i)}A_1^{(i)} = A_1^{(i)2},$$
$$A_2^{(i)}X_1^{(i)} - X_1^{(i)}A_2^{(i)} + A_1^{(i)}X_2^{(i)} - X_2^{(i)}A_1^{(i)} = A_2^{(i)}A_1^{(i)} + 2A_1^{(i)}A_2^{(i)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$A_k^{(i)}X_1^{(i)} - X_1^{(i)}A_k^{(i)} + A_{k-1}^{(i)}X_2^{(i)} - X_2^{(i)}A_{k-1}^{(i)} + \ldots + A_1^{(i)}X_k^{(i)} - X_k^{(i)}A_1^{(i)} =$$
$$= A_k^{(i)}A_1^{(i)} + 2A_{k-1}^{(i)}A_2^{(i)} + \ldots + kA_1^{(i)}A_k^{(i)}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

первой степени относительно элементов матриц

$$X_s^{(i)} = \| x_{s+1,1}^{(i,k,l)} \|$$

(через $A_s^{(i)}$ обозначена матрица $\| \alpha_{s+1}^{(i,k,l)} \|$).

В частных случаях, однако, удобнее решать эти уравнения, приняв за неизвестные элементы матриц $A_s^{(i)}$, а не $X_s^{(i)}$. Например для матрицы

$$U_1 = T\,[J_2(\xi),\ J_2(\xi)]\,T^{-1}$$

соответствующая ей матрица U_2 равна:

$$U_2 = \left\| \begin{matrix} a_1 & & b_1 & \\ a_2 & a_1 + \lambda\sqrt{-b_1c_1} & b_2 & b_1 + \lambda b_1 \\ c_1 & & d_1 & \\ c_2 & c_1 + \lambda c_1 & d_2 & d_1 - \lambda\sqrt{-b_1c_1} \end{matrix} \right\|$$

Если матрица $\left\| \begin{matrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{matrix} \right\|$ имеет кратные характеристические числа, то величины b_1 и c_1 могут быть взяты различными; в противном случае хотя бы одно из чисел b_1 и c_1 нужно брать равным нулю (случай $b_1 = c_1 = 0$ приводит очевидно к тривиальному решению).

Тульский гос. педагогический институт

Поступило 19. II. 1940.

L. SHIEFNER. ON THE INTEGRATION OF SOME DIFFERENTIAL SYSTEMS IN FINITE FORM

SUMMARY

In this paper I show that the formula of integration of Gauss' system given by I. A. Lappo-Danilevsky in the case, when $[U_1[U_2U_1]] = 0$ and $[U_2[U_2U_1]] = 0$, may be generalized to the case of the system

$$\frac{dY}{dx} = Y\,[U_1\varphi_1(x) - U_2\varphi_2(x)].$$

The integral matrix $Y_b(x)$ which vanishes for $x = b$, is

$$Y_b(x) = e^{U_1 L_1(b|x)} \cdot e^{[U_2U_1] L_{21}(b|x)} \cdot e^{U_2 L_2(b|x)},$$

where

$$L_1(b|x) = \int_b^x \varphi_1(t)\,dt, \quad L_2(b|x) = \int_b^x \varphi_2(t)\,dt, \quad L_{21}(b|x) = \int_b^x \varphi_1(t)\,L_2(b|t)\,dt.$$

I then investigate the form of matrices which satisfy the two mentioned conditions.

In the simplest case, when

$$U_1 = T J_\rho(\zeta) T^{-1},$$

the matrix U_2 has the form

$$U_2 = T\,\{P[J_\rho(0)] + Q[J_\rho(0)]\,R_\rho\}\,T^{-1},$$

where $P(X)$ and $Q(X)$ are polynomials and

$$R_\rho = J_\rho^{\left[\frac{\rho}{2}\right]}(0)\,[0, 1, 2, \ldots, \rho-1].$$

Редактор В. А. Толстиков

Техн. редактор Е. Шнобель Корректор А. Опер

Сдано в набор 28/IV 1940 г. Подписано к печати 19/IX 1940 г.
Формат 70×108 см. 6¼ п. л. + 1 вкл. 45 000 зн. в п. л. Уч.-изд. 9,4 л. Тираж 2575 экз.
А31265. АНИ 1921. Заказ 781.

16-я типография треста «Полиграфкнига». Москва, Трехпрудный, 9.



Д. Граве

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 349—356 Série mathématique

ДМИТРИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ ГРАВЕ

1863—1939

19 декабря 1939 г. в Киеве, на 76-м году жизни скончался почетный член Академии Наук СССР, действительный член Академии Наук УССР, профессор Дмитрий Александрович Граве.

Дмитрий Александрович родился в 1863 г. Он окончил Петербургский университет, где был учеником П. Л. Чебышева. Особенно близок он был с одним из старейших учеников последнего—А. Н. Коркиным, с которым даже жил одно время на общей квартире.

Магистерская диссертация Д. А. Граве «Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка» (1889) была написана отчасти под влиянием А. Н. Коркина. В ней он обобщил метод Якоби-Мейера на случай, когда заданное уравнение содержит явно искомую функцию, приложил метод Коркина к решению обобщенной задачи Коши и решил проблему, поставленную Коркиным, о нахождении всех интегралов системы дифференциальных уравнений задачи трех тел, не зависящих от закона действия сил.

В докторской диссертации «Об основных задачах математической теории построения географических карт» (1896) Д. А. Граве дал решение двух важных задач картографических проекций. Первая состоит в том, чтобы найти все возможные эквивалентные (т. е. сохраняющие площади) проекции шара на плоскость, при которых меридианы и параллели переходят в окружности или прямые. Лагранж дал решение этой задачи, но лишь для того случая, когда проекция одновременно и конформная. Дмитрий Александрович дал полное решение задачи. Оказалось, что имеется 11 типов искомых проекций; все понадобившиеся при этом исследовании трудные вычисления проведены Дмитрием Александровичем с необычайным алгебраическим мастерством до конца. Эта работа произвела большое впечатление. Вторая задача, решенная Д. А. Граве в докторской диссертации, была поставлена Чебышевым и касается вопроса о выборе наилучшей проекции для данного участка земной поверхности. Чебышев утверждал без доказательства следующее: «Окончательное решение задачи о наивыгоднейшей проекции карт очень просто: наивыгоднейшая проекция для изображения какой-нибудь части земной поверхности на карте есть та, в которой на границе изображения масштаб сохраняет одну и ту же величину» (Сочинения, том II, стр. 242). Дмитрий Александрович дал доказательство этой замечательной теоремы. В 1911 г. он

снова вернулся к этой задаче и обобщил свое доказательство на любые поверхности, имеющие гауссову кривизну постоянного знака, и значительно упростил его. Кроме решения этих двух больших задач Дмитрий Александрович дал в своей докторской диссертации новый способ решения задачи Дирихле для алгебраических контуров и решил ряд частных задач по картографии. Эта диссертация была напечатана по частям в лучших европейских журналах и выдвинула Д. А. Граве в ряд крупных ученых.

Отличительной чертой как магистерской, так и в особенности докторской диссертации Дмитрия Александровича является тенденция ставить конкретные задачи и решать их до конца. Только такое решение, которое доведено до окончательных формул, до возможности вычислить, удовлетворяло его, и в этом сказывалась его принадлежность школе Чебышева и влияние петербургских традиций, шедших еще от Эйлера.

В этот же «петербургский» период была написана Д. А. Граве работа «Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных», в которой строятся особые «полиэдральные» функции, обладающие замечательными свойствами. В этой работе Дмитрий Александрович за несколько лет до работ Лебега пользуется, по существу, его приемом интегрирования.

С 1908 г. начинается второй, «киевский» период деятельности Д. А. Граве. Интересы его сосредоточиваются главным образом в области алгебры и теории чисел. Сюда относятся работы, содержащие изящное упрощение изложения теории Галуа, изложение теории идеалов при помощи функционалов (по Веберу), новый вывод знака гауссовой суммы, вывод одного тождества в теории квадратичных форм и работа об уравнениях пятой степени, в которой показано, что есть два класса таких уравнений, разрешимых в радикалах при любом значении постоянного члена: $x^5+s=0$ и $x^5+10px^3+20p^2x+s=0$.

Третий период научной деятельности Д. А. Граве начинается после революции и характеризуется переключением на прикладную математику и механику. В работе «Über die linearen Differentialgleichungen, die in Bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind» (1927) при помощи весьма остроумных алгебраических преобразований решается весьма общая задача. В небольшой работе «Über eine Tschebyscheff'sche Frage» (1927) предложен изящный алгорифм для решения задачи о покрытии шара сеткой и т. д.

Перу Д. А. Граве принадлежит много очень распространенных учебников: «Основы аналитической геометрии», «Теория групп», «Теория эллиптических функций», «Элементарный курс теории чисел», фундаментальный курс «Элементы высшей алгебры», талантливо написанная «Энциклопедия математики», «Математика страхового дела» и др.

Д. А. Граве был замечательным профессором, лекции его отличались глубиной мысли и необыкновенным блеском изложения. Дмитрий Александрович считал, что и общеобязательные курсы (он читал обычно аналитическую геометрию, высшую алгебру и теорию чисел) должны давать широкую картину предмета, причем надо подчеркивать связи между

отдельными математическими дисциплинами. Особое значение он придавал специальным курсам и семинарам; он чуть ли не первый ввел в России специальные семинары по математике. На них-то и выдвигались ученики Граве. Особенно следует отметить семинары по теории групп, теории идеалов, теории Галуа, квадратичному полю, числам Бернулли, эллиптическим функциям и т. д.

С 1908 г. начинается имевшая исключительное значение деятельность Д. А. Граве по созданию математической (главным образом алгебраической) школы в Киеве, где он был с этого времени профессором. Эта школа дала ряд математиков, плодотворно работающих сейчас у нас и за границей. Прямыми учениками Д. А. Граве являются О. Ю. Шмидт, Е. И. Жилинский, Б. Н. Делоне, Н. Г. Чеботарев, Н. И. Ахиезер, отчасти М. Г. Крейн и др. у нас и А. М. Островский и др.—за границей. Если проанализировать причину такого успеха Дмитрия Александровича в создании математической школы в Киеве, то она, несомненно, лежит в том, что при высокой личной талантливости и замечательном умении привлекать молодежь с самых первых курсов университета к работе над важными и глубокими математическими задачами, он нес в Киев высокую культуру и научные тенденции «петербургской школы». Школа Граве была далека от какого бы то ни было провинциализма.

Путем личных поездок и посылки ряда учеников за границу Д. А. Граве поддерживал живую связь с иностранными (главным образом с немецкими) математиками (Гильберт, Ландау, Гензель, Шур и др.). Он был в близких научных отношениях с норвежским математиком и геофизиком Карлом Штермером, который решил в свое время одну изящную задачу, поставленную Граве.

Все участники школы Граве тщательно работали над современными авторами и реферировали всю текущую литературу по интересующим их вопросам и одновременно постоянно изучали творения классиков: Эйлера, Лагранжа, Гаусса, Коши, Абеля, Якоби, Римана, Куммера, Чебышева.

Исключительная по плодотворности деятельность Д. А. Граве была высоко оценена Советским правительством и он был награжден орденом Трудового Красного Знамени.

Б. Н. Делоне

СПИСОК ТРУДОВ Д. А. ГРАВЕ

1884

1. Об идеальной форме оптического стекла без сферической аберрации (*Зап. Физ.-мат. общ. студ. Петерб. унив.*, т. I, стр. 3—13).

1885

2. Об интегрировании одного класса совокупных дифференциальных уравнений (*Зап. Физ.-мат. общ. студ. Петерб. унив.*, т. II, стр. 11—25).
3. О поверхностях Minima (*Зап. Физ.-мат. общ. студ. Петерб. унив.*, т. II, стр. 99—108, 115—126, 131—167). Издано отд. отт. под названием «О наименьших поверхностях. Рассуждение на степень кандидата математики» (Петербург, 1886).

1889

4. Об одном классе линейных уравнений второго порядка, интегрируемых в квадратурах (*Матем. сборник*, т. XIV, стр. 197—201).

5. Об интегрировании частных дифференциальных уравнений первого порядка. Диссертация на степень магистра чистой математики (Петербург, 99 стр.).

1893

6. Курс аналитической геометрии (Петербург, 652 стр.).

1894

7. О проекциях поверхности вращения на плоскости, в которых сохраняются площади, причем меридианы изображаются прямыми, а параллели—кругами (*Известия Ак. Наук*, V сер., т. I, стр. 73—85).
8. Sur une question de Tchebycheff (Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 23-me session. Congrès de Caen, p. 196—199).

1895

9. Sur le problème de Dirichlet (Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 24-me session. Congrès de Bordeaux, p. 111—136).
10. Заметка, написанная в память последнего в жизни Пафнутия Львовича Чебышева математического разговора. О правиле Чебышева для приближенного спрямления дуг (*Известия Ак. Наук*, V сер., т. II, стр. 131—134).
11. Об изображениях шара на плоскости с сохранением площадей (*Известия Русск. астр. общ.*, вып. IV, стр. 15).

1896

12. Sur le problème de trois corps (*Nouvelles annales de mathém.* (3), t. 15, p. 537—547).
13. Об основных задачах математической теории построения географических карт. Диссертация на степень доктора чистой математики (Петербург, 197 стр.)
14. Sur la construction des cartes géographiques (*Journ. de mathém. pures et appl.*, (5), t. 2, p. 317—361).
15. De la meilleure représentation d'une contrée donnée (Association Française pour l'avancement des sciences. Compte rendu de la 25-me session, p. 106—116).

1898

16. К интегрированию системы дифференциальных уравнений линейных в частных производных высших порядков (Проток. Петерб. матем. общ. за 1890—1899 гг., стр. 15 и 17, изложение двух докладов).
17. Об одной эллиптической функции (Проток. Петерб. матем. общ. за 1890—1899 гг., стр. 110—111, изложение доклада).
18. Sur les expressions ditessur puissances (*Nouv. annales de mathém.*, (3), t. 17, p. 80—91).
19. Sur les lignes composées de parties rectilignes (*Comptes rendus*, Paris, t. 127, p. 1005).
20. Об основных предложениях теории функций двух вещественных переменных (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, (2), т. VI, стр. 251—287).
21. Новое доказательство основной теоремы учения о неявных функциях (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, (2), т. VI, стр. 288—293).

1901

22. Об одной теореме проективной геометрии (*Матем. сборник*, т. XXII, стр. 239—242).
23. О некоторых приложениях определителей (*Матем. сборник*, т. XXII, стр. 243—253).
24. Об одном видоизменении задачи о курьерах (*Зап. Харьк. унив.*, кн. 3, стр. 1—6).
25. Об одной теореме, относящейся к линейчатым поверхностям второго порядка (*Зап. Харьк. унив.*, кн. 3, стр. 7—8).

1902

26. Un cas remarquable de transformation rationnelle de l'espace (*Comptes rendus*, Paris, t. 134, p. 1345—1346).

1903

27. О некоторых свойствах коварианта Hesse (*Университ. известия*, Киев, № 6, стр. 1—9; также Отчет и прот. Физ.-мат. общ. при Киевск. унив. за 1902 г., стр, 1—9).

1904

28. О теореме Бертрана (*Университ. известия*, Киев, № 10, стр. 11—19; также Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1903 г., стр. 11—19).

29. О линиях третьего порядка (*Университ. известия*, Киев, № 10, стр. 33—49; также Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1903 г., стр. 33—49).

1908

30. Теория групп (Киев, 204 стр.). Печат. также под назв. «Лекции по алгебраическому анализу» (*Университ. известия*, Киев, № 7 за 1904 г., № 10 за 1905 г., № 11 за 1908 г.).
31. Zur Theorie der elliptischen Funktionen (*Университ. известия*, Киев, № 9, стр. 1—7; также Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1907 г., стр. 1—7).
32. Значение математики в естествознании (*Университ. известия*, Киев, № 12, стр. 1—17). Издано также отд. брош. (Киев).

1909

33. Элементарный курс теории чисел (Киев, 340 стр.; также *Университ. известия*, Киев, №№ 2, 3, 7, 8, 10 за 1909 г., №№ 3, 4 за 1910 г.).
34. Sur une identité dans la théorie des formes binaires quadratiques (*Comptes rendus*, Paris, t. 149, p. 770—772).

1910

35. Sur les équations du cinquième degré résolubles algébriquement, quand le produit des racines reste arbitraire (*Bull. des sciences mathém.*, (2), т. 34, p. 23—29).
36. Введение в анализ. Иррациональные числа и пределы (Киев, 155 стр.; также *Университ. известия*, Киев, №№ 1, 2, 3, 9 за 1910 г.).
37. Элементы теории эллиптических функций. Выпуск I (Киев, 169 стр.). Печат. также под назв. «Теория эллиптических функций» (*Университ. известия*, Киев, № 7 за 1910 г., № 6 за 1912 г.).
38. Курс алгебраического анализа (Киев, 512 стр., литогр.).
39. Арифметическая теория алгебраических величин. Том I. Квадратичная область (Киев, 372 стр., литогр.).

1911

40. Démonstration d'un théorème de Tchébycheff généralisé (*Journ. für die reine und angew. Mathem.*, Bd. 140, S. 247—251).
41. К вопросу об особенных точках алгебраических образов (Сборник статей, посвященных проф. Г. К. Суслову, Киев, стр. 169—70; также Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1910 г., стр. 71—72).
42. Об алгебраических единицах (Сборник статей, посвященных проф. Г. К. Суслову, Киев, стр. 209—233; также *Университ. известия*, Киев, № 5 за 1912 г. и Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1911 г., стр. 19—43). Издано отд. брош. (Киев, 1911).
43. Основы аналитической геометрии. Часть I. Геометрия на плоскости (Киев, 492 стр.; также *Университ. известия*, Киев, № 8 за 1910 г.. №№ 4, 7, 9 за 1911 г., №№ 1, 2 за 1912 г.).

1912

44. Comment on écrit les revues encyclopédiques (*Унив. известия*, Киев, № 10, стр. 1—2; также Отчет и прот. Физ.-мат. общ. при Киевск. унив. за 1911 г., стр. 201—202).
45. Энциклопедия математики. Очерк ее современного положения (Киев, 601 стр.; также *Известия Киевск. коммерч. инст.*, кн. IX—XII за 1911 г.).
46. Математика страхового дела (Киев, 87 стр.).
47. Арифметическая теория алгебраических величин. Том II. Теория идеалов (Киев, 132 стр.; также *Университ. известия*, Киев, №№ 1, 2, 3 за 1913 г.).

1913

48. О таблице характеров Коркина (*Матем. сборник*, т. XXIX, вып. 1, стр. 7—11).
49. Элементарный курс теории чисел. Второе изд., перераб. (Киев, 416 стр.).
50. Основы аналитической геометрии. Часть II. Геометрия в пространстве (Киев, 224 стр., литогр.).

1914

51. Об основных положениях теории Galois (*Матем. сб.*, т. XXIX, стр. 153—170).
52. Sur la généralisation d'un théorème de St. Smith (*Университ. известия*, Киев,

№ 6, стр. 59—60; также Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1913 г., стр. 59—60).

53. Correction d'une table de Cayley (*Университ. известия*, Киев, № 6, стр. 61; также Отчет и проток. Физ.-матем. общ. при Киевск. унив. за 1913 г., стр. 61).

54. Элементы высшей алгебры (Киев, 698 стр.).

1915

55. Sur les sommes de Gauss (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, (2), т. XIV, стр.202—208).

56. О периодических непрерывных дробях (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, (2), т. XIV, стр. 239—246).

57. Начала алгебры (Петроград, 316 стр.).

1917

58. Теория пенсионных касс (Киев, 68 стр.).

1919

59. Основи алгебри. Перевод книги, указаной под № 57 (Київ, 266 стр.).

1921

60. Письмо К. Ф. Гаусса к Г. В. Ольберсу, найденное в Киевской обсерватории (*Журнал чистого и прикл. знания*, отдел физ.-матем. и технич. наук, т. I, вып. 1, стр. 1—4, Одесса). То же на нем. яз.: Ein neuentdeckter Brief von C. F. Gauss an H. W. Olbers (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 2, 1924, стр. 91—95).

1923

61. Как устроена вселенная. Популярный очерк (Киев, 58 стр.).

62. Sur un théorème d'Euler (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 1, стр. 1—3).

63. Sur les racines cinquièmes de l'unité (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 1, стр. 4—6).

64. Généralisation d'un théorème d'Abel (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 1, стр. 7—8).

1924

65. Математика социального страхования. Общедоступное изложение для неспециалистов (Ленинград, 151 стр.).

66. Краткий курс математического анализа (Киев, 368 стр.).

1925

67. Об основных положениях теории идеальных чисел (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 135—151).

68. О разложении простых чисел на идеальные множители (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 542—560).

69. О единицах конечного поля (*Матем. сборник*, т. XXXII, стр. 562—568).

70. Über den Zusammenhang zwischen Astronomie, Meteorologie und Botanik (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 3, стр. 53—55).

71. Über ein Poincaré'sches Problem (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 3, стр. 57—59).

72. Über die elektromagnetischen Grundlagen der Mechanik (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 3, стр. 84—90).

73. Über die Plotnikowsche Zahl (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 4, стр. 5).

74. Historische Bemerkungen (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 4, стр. 6—7).

75. Über die Rollbewegung einer schweren homogenen Kugel auf zwei Kegeln (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. I, вип. 4, стр. 8—11).

76. Електромагнетнi сили в сонячнiй системi (Збiрник математично-природописно-лiкарськоi секцii наукового товариства iмени Шевченка, т. XXIII—XXIV, Львов, стр. 43—46). То же на нем. яз.: Über die elektromagnetischen Erscheinungen im Sonnensysteme (*Записки фiз.-матем. вiддiлу ВУАН*, т. II, вип. 2, 1927, стр. 9—12).

1926

77. Об уравнениях Эйлера и их приложениях к теории упругостей (*Известия Ак. Наук СССР*, VI сер., т. XX, стр. 917—942).
78. Роля Schwarz'евоі функціі у теоріі лінійних диференціальних рівнянь вищого порядку (*Записки фіз.-матем. відділу ВУАН*, т. II, вип. 1, стр. 1—5).
79. Про кривизну понад просторів (*Записки фіз.-матем. відділу ВУАН*, т. II, вип. 1, стр. 41—48).
80. Основи теоріі Galois (*Записки фіз.-матем. відділу ВУАН*, т. II, вип. 1, стр. 49—55).
81. Sur le mouvement du périhélie de Mercure (совместно с Ю. Д. Соколовым). (*Труди фіз.-матем. відділу ВУАН*, т. V, вип. 1, стр. 1—11).
82. Теорія відносності в історичній перспективі (Збірник істор.-філолог. відділу ВУАН, № 51, стр. 220—237, юбіл. збірник на пошану акад. Д. Багалія, ч. 1, Київ).
83. Закон Гука в теории упругости (*Журн. Киевск. инст. нар. хоз.*, т. I, стр. 111—113).
84. О резонансе (*Журн. Киевск. инстит. нар. хоз.*, т. I, стр. 114—116).

1927

85. Плоская геометрия Эвклида как предельная для геометрии Лобачевского (In memoriam N. I. Lobatschewskii, т. II, Казань, стр. 25—36).
86. Über eine Tchebycheff'sche Frage (Збірнік математично-природописно-лікарськоі секціі наукового товариства імени Шевченка, т. XXVI, Львов, стр. 45—50).
87. Über die linearen Differentialgleichungen die in Bezug auf die lineare gebrochene Transformationsgruppe invariant sind (*Journ. für die reine u. angew. Mathem.*, Bd. 156, S. 164—175).
88. Flächentreue Abbildungen der Flächen auf die Ebene (*Mathem. Zeitschrift*, Bd. 26, S. 691—693).
89. О решении линейных дифференциальных уравнений при помощи определенных интегралов (*Известия Ак. Наук СССР*, VI сер., т. XXI, стр. 943—952).
90. Про Лапласове рівняння (*Записки фіз.-мат. відділу ВУАН*, т. II, вип. 3, стр. 1—4).

1928

91. По поводу магнитных аномалий (*Доклады Ак. Наук СССР*, стр. 316—318).
92. Электрическая гиператмосфера и земной магнетизм (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., отд. физ.-матем. наук, № 4—5, стр. 347—366).
93. Über eine allgemeine Methode zur Bildung von Differentialausdrucken, die in Bezug auf eine kontinuierliche Transformationsgruppe invariant bleiben (совместно с Н. Г. Чеботаревым). (*Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН*, т. III вип. 1, стр. 53—59).

1929

94. Малые колебания и некоторые предложения алгебры (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., отд. физ.-матем. наук, № 6, стр. 563—570).
95. Les nouveaux principes de la mécanique céleste (*Труди фіз.-матем. відділу ВУАН*, т. IX, стр. 325—335).

1930

96. Über die Summenformeln (*Зап. фіз.-мат. відділу ВУАН*, т IV, вип. 5, стр. 269—280).
97. Теоретична механіка на основі техніки (Харків, 394 стр.). То же, 2-е изд. (Харків, 1932, 364 стр.).

1931

98. Математика та іі застосування (*Жур. мат. циклу ВУАН*, anno I, № 1, стр. 3—14).

1932

99. Про рух стискуваного течива (*Журн. мат. циклу ВУАН*, anno II, №2, стр. 55—59).
100. Теоретическая механика на основе техники (Москва, 406 стр.).
101. В какую сторону должны вращаться горизонтальные гидравлические турбины? (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., отд. матем. и ест. наук, № 1, стр. 39—42).
102. О действии одноцилиндровой паровой машины (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., отд. матем. и ест. наук, № 4, стр. 503—509).
103. Физические основы гидро- и аэродинамики (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., отд. матем. и ест. наук, № 6, стр. 763—782).

1933

104. Зв'язок теорії еліптичних функцій з теорією ідеалів (*Журнал матем. циклу ВУАН*, anno III, № 2, стр. 3—13).
105. Про узагальнення алгоритма Вороного (*Журнал матем. циклу ВУАН*, anno III, № 2, стр. 17—23).
106. О движении сжимаемой жидкости (*Известия Ак. Наук СССР*, VII сер., отд. матем. и ест. наук, № 5, стр. 653—658).
107. Об одном обобщении теоремы Акселя Туе (*Доклады Ак. Наук СССР*, № 6, стр. 263).
108. Аналітична геометрія (Київ, 308 стр.).

1934

109. Ідеальні модулі алгебричних функцій (*Журнал матем. циклу ВУАН*, anno III, № 4, стр. 23—31).
110. Методи боротьби з труднощами великої задачі Фермата (*Журнал матем. циклу ВУАН*, anno III, № 4, стр. 33—44).
111. Кавітація і корозія швидкорушних гідравлічних турбин (*Журнал матем. циклу ВУАН*, anno III, № 4, стр. 85—90).
112. Про прості числа виду $p=4n+3$ (*Журн. мат. циклу ВУАН*, anno III, № 4, стр. 91—95).
113. Про деякі квадратичні поля (*Журн. мат. циклу ВУАН*, anno III, № 4, стр. 97—112).
114. Аксоіди руху твердого тіла (*Журнал Інст. матем. ВУАН*, № 1, стр. 3—9).

1935

115. Поверхні Riemann'а і теорія електрики (*Журн. Інст. мат. ВУАН*, № 1, стр. 3—15).
116. Функції математичної фізики і гіпергеометричний ряд (*Журнал Інст. матем. ВУАН*, № 3—4, стр. 3—23).
117. Арифметична теорія алгебричних величин (*Журнал Інст. матем. ВУАН*, № 3—4, стр. 25—44).
118. Про Euler'ові інтеграли (*Журнал Інст. матем. ВУАН*, № 3—4, стр. 45—61).

1936

119. Algorithme du calcul des racines des équations algébriques (*Журнал Інст. матем. ВУАН*, № 2, стр. 3—20).
120. Сопротивление жидкости движению тел (Труды Первого Всесоюзного съезда математиков [Харьков, 1930], Москва, стр. 318—327).

1937

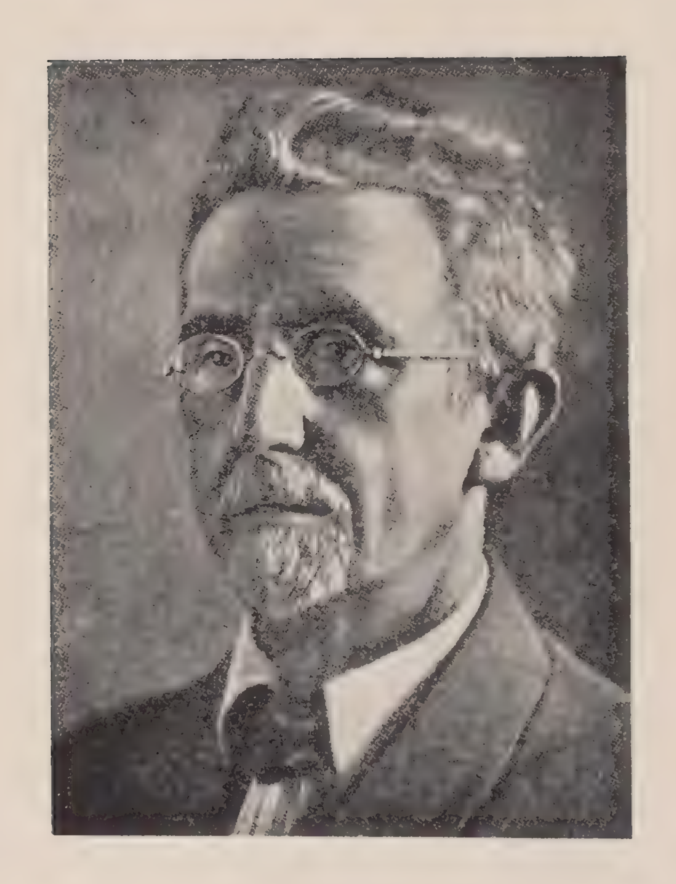
121. Інститут математики Академії Наук УРСР до XX роковин Великої Жовтневої Революції. (Совместно с К. Бреусом). (*Журн. Інст. мат. Ак. Наук УРСР*, № 3, стр. 3—17).
122. Принципи теорії Галуа (*Журн. Інст. мат. Ак. Наук УРСР*, № 3, стр. 65—71).
123. Про одну задачу Ейлера (*Журнал Інст. матем. Ак. Наук УРСР*, № 3, стр. 73—74).
124. Про неможливість алгебричного розвъязання загального рівняння вище четвертого степеня (*Журнал Інст. матем. Ак. Наук УРСР*, № 4, стр. 3—8).
125. Про загальну показникову функцію (*Журн. Інст. мат. Ак. Наук УРСР*, № 4, с. 43—45).

1938

126. Про прості числа (*Журнал Інст. матем. Ак. Наук УРСР*, № 1, стр. 3—16).
127. Про задачу Гольдбаха (*Журнал Інст. матем. Ак. Наук УРСР*, № 1, стр. 77—79).
128. Трактат з алгебричного аналізу. Том I. Початки науки (Видавн. Ак. Наук УРСР, Київ, 196 стр.).
129. Трактат з алгебричного аналізу. Том другий. Історичний огляд (Видавн. Ак. Наук УРСР, Київ, 399 стр.).
130. Трактат по алгебраическому анализу. Том первый. Начала науки (Издат. Укр. Ак. Наук., Киев, 208 стр.).

1939

131. Трактат по алгебраическому анализу. Том второй. Исторический обзор (Издат. Укр. Ак. Наук, Киев, 411 стр.).
132. Про один помилковий приклад в теорії простих чисел (Збірник праць Інст. матем. Ак. Наук УРСР, № 3, стр. 63—64).



И. Иванов.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая (1940), 357—362 Série mathématique

ИВАН ИВАНОВИЧ ИВАНОВ

1862—1939

17 декабря 1939 г. в Ленинграде скончался член-корреспондент Академии Наук СССР профессор Иван Иванович Иванов, бывший одним из крупнейших математиков своего поколения. Ему принадлежит длинный ряд работ, большинство из них относится к теории чисел, которой посвящены и его диссертации: магистерская—«Целые комплексные числа» (1891) и докторская—«О некоторых вопросах, находящихся в связи со счетом простых чисел» (1901).

Значение обеих диссертаций несомненно. Еще Гаусс расширил область высшей арифметики, включив в нее теорию чисел вида $a+ib$, где a и b— числа целые. Одной из центральных задач теории чисел в XIX в. было дальнейшее обобщение теории Гаусса на алгебраические числа. Во всей общности эта задача была решена лишь в восьмидесятых годах немецким ученым Р. Дедекиндом и русским ученым Е. Золотаревым. Их теории были существенно отличны по форме, и европейские ученые считали, что теория Золотарева уступает в общности теории Дедекинда. Заслугой И. И. Иванова является то обстоятельство, что он в своей магистерской диссертации первый установил эквивалентность теорий Золотарева и Дедекинда.

Важность этого результата очевидна, так как обе теории касались самых основных вопросов теории чисел XIX в. При этом теория Золотарева, казавшаяся на первый взгляд менее общей, в некоторых отношениях имела преимущества большей простоты и удобоприменяемости. Ввиду важности этих вопросов они подвергались рассмотрению и в дальнейшем. В частности, в недавнее время ими занимался Н. Г. Чеботарев.

Докторская диссертация И. И. Иванова посвящена вопросам, связанным с распределением простых чисел. Эти вопросы, столь абстрактные по своему характеру, несомненно оказались полезными, так как интерес, который математики питают к ним, и трудность их решения ведут к дальнейшему обогащению средств математики. Работа И. И. Иванова содержит стройное изложение ряда исследований Дирихле, Чебышева и Мертенса, дополненных результатами автора. Среди них особенно следует отметить одну теорему о простых делителях чисел вида $a+bx^2$, где a и b—данные целые числа, а x—переменное целое число. Со времени опубликования диссертации И. И. Иванова прошло почти 40 лет, и математики, вооруженные всеми средствами современной науки, настойчиво изучали проблемы,

связанные с теорией простых чисел, но в изучении указанного вопроса ничего существенно нового к результату И. И. Иванова не прибавлено.

Из других работ И. И. Иванова отметим еще его работу о кубических сравнениях, в которой он существенно упростил метод решения одной проблемы Г. Ф. Вороного. Не вдаваясь в детальное рассмотрение остальных работ И. И. Иванова, заметим, что значительная часть из них посвящена изучению некоторых тождеств и неравенств, стоящих в связи с теорией степенных вычетов.

Русская наука имела ряд крупных достижений в теории чисел, она имеет их и теперь—имена Чебышева, Коркина, Золотарева, Вороного, Маркова навсегда вошли в историю науки, как войдет и имя академика И. М. Виноградова. Покойный И. И. Иванов с полным правом может быть отнесен к тем ученым, которые создавали мировую славу русской теории чисел. Он был продолжателем своих предшественников и достойным соратником своих современников. Его работы уже по своей тематике намечали пути дальнейших успехов науки. В самом деле, И. И. Иванов занимался в основном тремя циклами вопросов—теорией алгебраических чисел, теорией степенных вычетов, теорией простых чисел. Во всех этих вопросах дальнейшее развитие науки в СССР привело к блестящим открытиям—сюда относятся, например, глубокие работы академика И. М. Виноградова.

Научная деятельность И. И. Иванова, начатая в восьмидесятых годах XIX ст. и достигшая своей вершины в начале XX ст., не прекращалась до конца его жизни.

Столь же длительна и не менее плодотворна была преподавательская деятельность И. И. Иванова. Она началась в 1880 г., когда Иван Иванович стал преподавателем средней школы. С 1891 по 1939 г. он был преподавателем в высшей школе. Большая часть его преподавательской деятельности проходила в бывшем Политехническом, ныне Индустриальном институте. Здесь он заведывал кафедрой математики с 1901 по 1935 г. За время своей преподавательской деятельности И. И. Иванов способствовал научной подготовке длинного ряда выпусков специалистов. Он был ценным работником высшей школы. Высокий научный уровень он соединял с преданностью делу образования. К тому же он был хорошим администратором, умело подбиравшим сотрудников и руководившим ими с большим тактом. Он достигал единства преподавания, не стесняя, а направляя инициативу своих помощников. Его пример поддерживал и воодушевлял сотрудников. Он был всегда внимателен к интересам слушателей. Поэтому понятно, что деятельность И. И. Иванова высоко оценивалась слушателями и администрацией тех учебных заведений, где работал Иван Иванович. Столь же высоко она оценивалась и его сотрудниками.

Занимаясь абстрактными отделами науки, уделяя много времени и внимания делу преподавания, Иван Иванович был в то же время активным участником многих начинаний советской общественности. В связи с этим он избирался членом Ленинградского совета от Индустриального института.

Происходя из крестьянской среды, не обучаясь в средней школе, благодаря своей энергии и крупному дарованию Иван Иванович достиг высот науки, став известным ученым еще в дореволюционное время. После Великой Октябрьской Социалистической революции Иван Иванович был избран членом-корреспондентом Академии Наук СССР и получил звание заслуженного деятеля науки.

Р. О. Кузьмин

СПИСОК ТРУДОВ И. И. ИВАНОВА

1881

1. Один из приемов суммирования одинаковых целых степеней натурального ряда (*Семья и школа*, вып. 4—5, стр. 298—304).

1883

2. Суммирование одного ряда (*Семья и школа*, № 7, стр. 149—151)
3. К теории извлечения квадратного корня (*Семья и школа*, № 8, стр. 277—279).
4. Максимум и минимум полиномов 3-й степени (*Семья и школа*, № 9, стр. 280—291).

1884

5. Об одном ряде (по Абелю) (*Семья и школа*, № 9, стр. 266—273; № 10, стр. 377—382).

1885

6. Суммирование трех рядов Эйлера (*Записки Физ.-мат. общ. студентов СПб. университета*, т. I, стр. 125—128).
7. Представление простых чисел в форме $x^2 + Ay^2$ (метод Эрмита) (*Записки Физ.-мат. общ. студентов СПб. университета*, *т*. II, стр. 69—75).
8. Некоторые предложения о простых числах (*Записки Физ.-мат. общ. студентов СПб. университета*, т. II, стр. 109—114).
9. Окружность через девять точек (*Семья и школа*, № 8—9, стр. 566—567).

1886

10. Разложение квадратных корней из некоторых целых чисел в непрерывную дробь (*Журнал элемент. математики*, т. II, № 10, стр. 222—227).
11. Вывод двух формул Якоби (*Записки студентов Физ.-мат. фак. СПб. университета*, т. II, стр. 84—94).

1887

12. Задача 211 (*Вестник опытн. физики и элем. матем.*, № 31, стр. 162).

1891

13. Целые комплексные числа. Рассуждение на степень магистра чистой математики (СПб., VI+113 стр.).

1893

14. К теории целых комплексных чисел (Прилож. к LXXII тому *Запис. Акад. Наук*, № 9, стр. 1—14).

1894

15. Question 109 (*Interm. Mathém.*, t. I, № 4, p. 53).
16. Réponse sur la question 37 (*Interm. mathém.*, t. I, № 5, p. 74—76).
17. Question 205 (*Interm. Mathém.*, t. I, № 6, p. 101—102).
18. Question 340 (*Interm. Mathém.*, t. I, № 10, p. 187).

1895

19. Об одной сумме (*Известия Ак. Наук*, т. III, № 3, стр. 253—256).
20. О простых делителях вида $A+x^2$ (*Известия Ак. Наук*, т. III, № 4, стр. 361—366).
21. Résolution du problème 352 (*Interm. mathém.*, t. II, № 5, p. 173).
22. Résolution d'un problème de Catalan (Question 455) (*Interm. mathém.*, t. II, p. 308.)

1896

23. Formules relatives à un nombre premier $p=4n+3$ (*Interm. mathém.*, t. III, № 3, p. 64—68).
24. О сравнении 3-й степени (*Известия Ак. Наук*, т. V, № 2, стр. 137—142).

1899

25. Об интерполировании двух произведений (*Сообщения Харьк. матем. общ.*, стр. 1—4).
26. О некоторых суммах, зависящих от простых чисел (упоминание о докладе, прочитанном 15/XII 1890). (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб, стр. 4).
27. Доказательство теоремы В. А. Маркова (резюме доклада, прочитанного 15/IX 1892). (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб, стр. 34).
28. Некоторые предложения о простых числах (резюме докладов, прочитанных 15/IX и 20/X 1893 г.). (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб, стр. 53—54; 55—56).
29. Об интегрировании некоторых иррациональных функций (упоминание и частичное воспроизведение доклада, прочитанного 15/I 1894). (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб, стр. 72).
30. Об одном свойстве числовой функции (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб).
31. Об уравнениях с перемежающимися корнями (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб).
32. Постулат Бертрана (из доклада, прочитанного 14/I 1894). (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб, стр. 95).
33. Об одном следствии теоремы Ролля (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб).
34. О вычислении предела одного отношения (Протоколы засед. СПб матем. общ., 1890—1899, СПб).
35. О некоторых суммах, зависящих от простых чисел формы $4m+3$ (*Сборник Инст. инжен. пут. сообщ.*, т. L, стр. 1—12).
36. Sur une démonstration d'Euler d'un théorème de Fermat (*Interm. mathém.*, t. VI, № 2, p. 47—48).
37. Identité entre signes sommatoires (*Interm. Mathém.*, t. VI, № 4, p. 82—84).

1901

38. О некоторых вопросах, находящихся в связи со счетом простых чисел (Изд. Ак. Наук, СПб, IV+120 стр.).
39. Приложение дифференциального исчисления к геометрии. Лекции, читанные в СПб унив. в 1900/1901 г. (СПб, 263+IV стр., литограф.).

1906

40. Дифференциальное и интегральное исчисление. Лекции. (Два литограф. изд.).

1907

41. Дифференциальное и интегральное исчисление, ч. II (литограф.).

1908

42. Высшая математика. Аналитическая геометрия (литограф.).

43. Курс высшей математики, ч. I, Аналитическая геометрия (литограф.). То же в 1909 и 1910 гг.

1911

44. Высшая математика, ч. II (литограф.).

1915

45. Теория чисел. Лекции, читанные в СПб университете (Птгр., литограф.).

1916

46. Высшая математика, ч. II. Лекции, читанные в Политехн. инстит. (Птгр., литограф.).

1917

47. Высшая математика, ч. I. Аналитическая геометрия (Птгр., литограф.).

1919

48. Об одном числовом тождестве (*Известия Петрогр. политехн. инст.*, XXVIII, стр. 181—183).
49. К теории квадратичных и неквадратичных вычетов по данному простому модулю (*Известия Петрогр. политехнич. инст.*, XXVIII, стр. 185—189).

1920

50. А. В. Васильев. Целое число. (*Книга и Революция*, № 2, стр. 69, рецензия).
51. Литцман и Трир. Где ошибка? (*Книга и Революция*, № 2, стр. 69, рецензия).

1921

52. Ирвин Пальмер. Техническая математика (*Книга и Революция*, № 8—9, стр. 91—92, рецензия).
53. В. И. Лебедев. Очерки по истории точных наук (*Книга и Революция*, № 8—9, стр. 91—92, рецензия).
54. Дж. Юнг. Как преподавать математику (*Книга и Революция*, № 8—9, стр. 91—92, рецензия).
55. Аналитическая геометрия. Конспект лекций, читанных в Петр. универс. (литограф.).

1923

56. Аналитическая геометрия. Конспект лекций, читанных в Политехн. инст. (литограф.).

1926

57. О двух сравнениях (*Журнал Ленингр. физ.-мат. общ.*, т. I, в. 1, стр. 37—39).
58. Дифференциальное исчисление, ч. II (Изд. Кубуч, Лнгр., литограф.).
59. Дифференциальное исчисление, ч. I и II (Изд. Кубуч, Лнгр.).

1927

60. Интегральное исчисление и его приложение (Изд. Кубуч, литограф.).
61. О вычислении определенного интеграла (*Известия Политехн. инст.*, XXXI, стр. 97—99).
62. О неравенстве двух интегралов (*Известия Политехн. инст.*, XXXI, стр. 100—104).
63. О сумме, зависящей от простых чисел формы $4n+1$ (*Доклады Ак. Наук СССР*, № 3, стр. 43—48).

1929

64. Об обобщении одного тождества Буняковского (*Известия Политехн. инст.*, XXXII, стр. 5—9).

1931

65. Об интегрировании некоторых трансцендентных функций (*Известия Политехн. инст.*, XXXIII, стр. 19—21).

1932

66. Основания аналитической геометрии (Лнгр., Кубуч, литограф.).
67. Основания аналитической геометрии для втузов (Лнгр., литограф.).

1938

68. О двух дифференциальных уравнениях (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, стр. 24—27).

1939

69. О некоторых суммах, зависящих от простых чисел (*Труды Ленингр. индустр. инст.*, № 3, стр. 43—49).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 363—402 Série mathématique

Ю. В. ЛИННИК

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В работе дается доказательство теоремы о том, что все достаточно большие числа, не делящиеся на p, удовлетворяющие родовым условиям, представимы тройничной положительной формой инварианта $[p, 1]$. Во второй части рассматривается та же задача для форм более общих инвариантов.

Часть I

В настоящей работе разбирается вопрос о достаточных условиях представимости целых чисел отдельными положительными целочисленными собственно примитивными тернарными квадратичными формами. В дальнейшем под словом «форма» будем понимать именно такую форму.

Первая часть работы посвящена формам специального вида, наиболее пригодного для применения предлагаемого метода. Это будут удобные формы и взаимные к ним.

Определение. Удобной формой называется всякая форма f, принадлежащая к инвариантам $[p, 1]$, где p — простое число $\geqslant 3$, и имеющая по модулю p родовое условие

$$\left(\frac{f}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right).$$

Например, если p простое число вида $4n+1$, то форма $x^2+py^2+pz^2$ и все формы ее рода и инвариантов $[p, 1]$ будут удобными.

Формы взаимные и удобные принадлежат к инвариантам $[1, p]$. Они имеют родовые условия только по модулю 8. Такой, например, будет форма вида $px^2+y^2+z^2$, где $p\equiv 1 \pmod 4$ простое число, и весь ее род инвариантов $[1, p]$.

Мы докажем здесь одну теорему об этих формах. Будем говорить, что число m удовлетворяет родовым условиям удобной формы f инвариантов $[p, 1]$, если разрешимо сравнение

$$f(\xi, \eta, \zeta)\equiv m \pmod{8p}$$

и не все три числа ξ, η, ζ делятся на 2 или на p.

ТЕОРЕМА I. *Если f — удобная форма инвариантов $[p, 1]$, то существует константа m_0, зависящая только от p, такая, что всякое нечетное или четное число m, не делящееся на p, удовлетворяющее*

родовым условиям f и большее m_0, $m > m_0$, примитивно представляется формой f, причем для числа представлений $r(f, m)$ есть оценка снизу:

$$r(f, m) > c_1 \frac{h(-m)}{\ln\ln m \cdot \ln(\ln\ln m)}.$$

§ 1

Пусть дан род удобных форм инвариантов $[p, 1]$. Вопрос о представлении чисел этими формами, как будет показано в самом конце работы, сводится к вопросу о существовании некоторых равенств между определенными целыми кватернионами, связанными с этими формами и представляемыми числами. Откладывая выяснение этой связи до конца работы, обратимся к этим равенствам между кватернионами и будем их изучать сами по себе.

Кватернион $a + bi + cj + dk$ будем называть собственно-целым, если a, b, c, d все суть целые числа, и несобственно-целым, если все они — половины нечетных чисел. Те и другие вместе образуют кольцо целых кватернионов.

Рассмотрим все целые кватернионы нормы p; они сами собой примитивны. Выпишем все такие кватернионы, не связанные между собой равенствами вида $P' = P\varepsilon$, где ε — единица, и перенумеруем их:

$$P_1, P_2, \ldots, P_{w'}. \tag{1}$$

Здесь $w' = p + 1$ (1).

Пусть теперь дано число m, удовлетворяющее условиям

$$(m, p) = 1; \quad \left(\frac{-m}{p}\right) = +1; \quad m \neq 4^\mu(8\nu + 7). \tag{2}$$

Из (2) мы выводим, что существует $b \not\equiv 0 \pmod p$ с условием

$$b^2 + m \equiv 0 \pmod p \tag{3}$$

и что число m примитивно представимо суммою трех квадратов. Всякому такому представлению вида $x^2 + y^2 + z^2 = m$ однозначно отвечает собственно-целый вырожденный кватернион $L = xi + yj + zk$ такой, что $L^2 = -m$. Выпишем все такие кватернионы и перенумеруем их:

$$L_1, L_2, \ldots, L_{r(m)}, \quad L_i^2 = -m \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(m)). \tag{4}$$

Составим $r(m)$ кватернионов вида $b + L_i$, где b взято из (3). Норма каждого из них равна $b^2 + m$ и потому в силу (3) каждый из них делится слева на один из кватернионов (1), т. е. существует $r(m)$ равенств

$$b + L_i = P_i X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(m)). \tag{5}$$

Здесь все $r(m)$ кватернионов L_i различны, что же касается P_i, то они вовсе не обязаны быть различными для различных i и, может быть, все они одинаковы.

Число $r(m)$ удовлетворяет условиям (2)

$$c_2 h(-m) > r(m) > c_3 h(-m). \tag{6}$$

Согласно замечательной теореме C. L. Siegel'я (1935) для $h(-m)$ имеется оценка снизу

$$h(-m) > c_\varepsilon m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}. \qquad 7)$$

Эта оценка является основной в настоящей работе. Мы сразу заключаем из нее и из (6), что если m, удовлетворяющее (2), достаточно велико, то в равенствах (5) неизбежны повторения P_i, т. е. случаи, когда $P_i = P_j$, при некоторых неравных i и j. Но, с другой стороны, можно предположить, что при достаточно большом m каждый из кватернионов (1) встречается в равенствах (5). Весьма затруднительное доказательство этого положения и будет занимать нас в дальнейшем.

§ 2

Введем несколько чисел с целью, выясняемой впоследствии. Положим

$$\frac{-\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)}{2\ln p} = \tau.$$

Пусть задано число m, удовлетворяющее (2). Выберем s с условием

$$p^{s-1} < m^{\frac{1}{2}+\tau}, \quad p^s \geqslant m^{\frac{1}{2}+\tau},$$

так, что при $c_4 = p$

$$m^{\frac{1}{2}+\tau} \leqslant p^s < c_4 m^{\frac{1}{2}+\tau}.$$

Положим $p^s = n$. Из (3) вытекает разрешимость сравнения

$$\xi^2 + m \equiv 0 \pmod{n}. \qquad (8)$$

Пусть b' его решение с условием $0 < b' < n = p^s$, $b' \equiv b \pmod{p}$. Составим $r(m)$ кватернионов

$$b' + L_i, \quad L_i^2 = -m \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(m)).$$

Из (8) вытекает, что, при каждом i, $b' + L_i$ делятся на некоторые примитивные кватернионы $\mathscr{P}_i'$ нормы p^s. Эти последние распадаются на произведение s кватернионов нормы p:

$$\mathscr{P}_i' = P_{1i}' P_{2i}' \ldots P_{si}'; \quad \mathrm{Norm}(P_{ji}') = p.$$

Можно написать

$$\mathscr{P}_i' = P_{1i} P_{2i} \ldots P_{si} \varepsilon_i,$$

где ε_i — единица, а P_{ji} суть кватернионы из (1). В самом деле,

$$P_{1i}' = P_{1i}\varepsilon'; \quad \varepsilon' P_{2i}' = P_{2i}\varepsilon'', \ldots, \varepsilon^{(s-1)} P_{si}' = P_{si}\varepsilon_i.$$

Положим $P_{1i}P_{2i} \ldots P_{si} = \mathscr{P}_i$. Мы получим в силу написанного выше $r(m)$ равенств

$$b' + L_i = P_{1i}P_{2i} \ldots P_{si} Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(m)). \qquad (9)$$

§ 3

Предположим, что для некоторого числа m с условиями (2) составлены равенства (5) и (9), причем ни в одном из равенств (5) не встречается на месте P_i некоторый фиксированный кватернион P из (1), т. е. $P_i \neq P$ ($i=1, 2, \ldots, r(m)$). Тогда при любом L_i из (4) невозможны равенства $b+L_i=APB$ или $b+L_i=A\bar{P}B$, где A и B — целые кватернионы и $\mathrm{Norm}(A)=p^t$ $(t \geqslant 0)$.

В самом деле, из первого из них вытекало бы

$$A^{-1}(b+L_i)A=b+A^{-1}L_iA=PBA=PY, \quad Y=BA.$$

Отсюда следует, что $A^{-1}L_iA$ — целый кватернион; он вырожденный; покажем, что он примитивный, т. е. встречается среди (4).

В самом деле, из сравнения $A^{-1}L_iA \equiv 0 \pmod{q}$, где q — простое число, вытекало бы при $q \neq p$

$$AA^{-1}L_iA\bar{A}=L_ip^t \equiv 0 \pmod{q}$$

и $L_i \equiv 0 \pmod{q}$, что невозможно. При $q=p$ имели бы $-L_iAA^{-1}L_iA = mA \equiv 0 \pmod{p}$, откуда, в силу (2), $A \equiv 0 \pmod{p}$, а тогда и $b \equiv 0 \pmod{p}$, что невозможно.

Итак, $A^{-1}L_iA=L_k$ входит в (4); кватернион $b+L_k$ примитивен и из (5) $b+L_k=P_kX_k$, но $P_k \neq P$.

В силу примитивности $b+L_k$, равенство $b+L_k=PY$ невозможно.

Равенство $b+L_i=A\bar{P}B$ также невозможно, иначе имели бы $A^{-1}(b+L_i)A=b+L_k=\bar{P}BA$; беря сопряженные, имели бы $b+(-L_k)=\bar{A}\bar{B}P$; $-L_k=L_{k'}$ входит в (4) и $PL_{k'}P^{-1}=L_k''$ входит в (4), так что равенство $b+L_k''=PAB$ невозможно.

Далее, для числа m в равенствах (9) не может появиться P на месте P_{ji}, т. е.

$$P_{ji} \neq P \qquad (i=1, 2, \ldots, r(m);\ j=1, 2, \ldots, s).$$

Кроме того, $P_{ji} \neq \varepsilon\bar{P}\varepsilon'$, где ε и ε' — единицы. В самом деле, иначе, как и раньше, пришли бы к равенству $b'+L_k=PZ$, но $b' \equiv b \pmod{p}$, т. е. $b'=b+pl$. Отсюда

$$b'+L_k=b+L_k+pl=b+L_k+P\bar{P}l=PZ,$$
$$b+L_k=PY; \quad Y=Pl+Z.$$

Это невозможно по условию.

Числа m, для которых равенства (5) и (9) обладают указанными выше свойствами, назовем *аномальными*. Мы покажем, что существует лишь конечное множество аномальных чисел.

§ 4

Исходя из последнего результата, оценим сверху количество *различных* произведений $\mathscr{P}_i=P_{1i}\ldots P_{si}$, встречающихся в равенствах (9) для анамольного m. Все произведения

$$\mathscr{P}_i=P_{1i}P_{2i}\ldots P_{si} \qquad (i=1, 2, \ldots, r(m)) \tag{10}$$

необходимо примитивны.

P_{1i} при разных i не пробегает значения P, а потому пробегает не более $p+1-1=p$ значений. При заданном P_{1i}, P_{2i} не пробегает P по условию и не пробегает $P_{1i}\varepsilon$, иначе $\mathcal{P}_i$ не было бы примитивным, так как $P_{1i}\cdot\overline{P}_{1i}\varepsilon=p\varepsilon$.

Далее, $\overline{P}_{1i}\varepsilon\neq P$, иначе $P_{1i}=\varepsilon\overline{P}$, что невозможно по условию. Среди 24 кватернионов $\overline{P}_{1i}\varepsilon$ один входит в (1), а потому P_{2i} пробегает не более $p+1-2=p-1$ значений.

Аналогично этому, при заданным, P_{1i}, P_{2i}, P_{3i} пробегает не более $p-1$ значений и т. д., и при заданных $P_{1i}, P_{2i}\ldots P_{s-1,i}$, P_{si} пробегает не более $p-1$ значений.

Следовательно, количество w различных $\mathcal{P}_i$ в равенствах (9) не превосходит

$$p(p-1)^{s-1}=p^s\left(1-\frac{1}{p}\right)^{s-1}=\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\,p^s\left(1-\frac{1}{p}\right)^s\leqslant 2p^s\left(1-\frac{1}{p}\right)^s.$$

Здесь

$$m^{\frac{1}{2}+\tau}\leqslant p^s=n<c_4m^{\frac{1}{2}+\tau}. \tag{11}$$

Отсюда

$$s=\frac{\ln n}{\ln p}$$

и

$$2p^s\left(1-\frac{1}{p}\right)^s=2nl^{\frac{\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\ln n}{\ln p}}=2n^{1-2\tau}. \tag{12}$$

Из (12) выводим

$$w\leqslant 2n^{1-2\tau}<2\left(c_4m^{\frac{1}{2}+\tau}\right)^{1-2\tau}=c_5m^{\frac{1}{2}-2\tau^2}.$$

§ 5

Здесь нам придется обратиться к некоторым фактам из арифметики кватернионов, именно к «теории лучей», частично развитой в моей работе ([5]).

Пусть дан некоторый кватернион R нечетной нормы r и примитивный, и примитивный кватернион Q нормы q. Составим кватернион QR. Его норма qr делится на r, а потому он делится слева на некоторый кватернион R' нормы r, и получается равенство

$$QR=R'Q'. \tag{13}$$

Мы будем говорить, что R' получается из R при помощи Q при левой пермутации Венкова. Аналогично определяется и правая пермутация Венкова. К этому факту относятся следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. *Для всяких двух примитивных кватернионов R и R' нечетной нормы r найдется примитивный кватернион S нормы s, взаимно простой с r, такой, что S переводит R в R' при левой пермутации Венкова*

$$SR=R'S'. \tag{14}$$

ТЕОРЕМА 2. *Если S удовлетворяет равенству* (14) *и условию* $(\mathrm{Norm}(S), r) = 1$, *то всякий другой кватернион T, переводящий R в R' при левой пермутации Венкова, имеет вид*

$$T = \alpha S + R'X,$$

где α — целое рациональное число, а X — целый кватернион. Обратно, всякий такой T удовлетворяет равенству

$$TR = R'S'. \tag{14'}$$

Совокупность таких T называется левым лучом по модулю R', переводящим R в R'. Аналогично определяется правый луч.

Следствием теоремы 2 является

ТЕОРЕМА 3. *Кватернионы T, переводящие R в себя при левой пермутации Венкова, т. е. удовлетворяющие равенству $TR = RT'$, образуют луч $T = \alpha + RX$.*

Этот луч назовем главным.

§ 6

Важнейшим лучом в излагаемой теории является версорный луч (versor ray). Версорным лучом называется луч, переводящий при левой пермутации Венкова R в $\overline{R}$.

ТЕОРЕМА 4. *Для того чтобы кватернион V' принадлежал к левому версорному лучу* $\mathrm{mod}\,\overline{R}$, *необходимо и достаточно выполнение сравнения*

$$2\Re(V'R) = 2\Re(RV') \equiv 0 \pmod r. \tag{15}$$

Заметим, что всегда $\Re(V'R) = \Re(RV')$ в силу соотношения $RV' = V'^{-1}(V'R)V'$.

Ввиду особой важности теоремы приведем ее доказательство.

a) Доказательство достаточности (15). Пусть V' удовлетворяет (15). Тогда $2V'R = M + rZ$, где $\Re(M) = 0$. Возьмем сопряжение от обеих частей

$$2\overline{R}\overline{V}' = -M + r\overline{Z} = -(M + rZ) + r(Z + \overline{Z}) = -2V'R + rU \quad (U \text{ — целое}).$$

Отсюда $2V'R = -2\overline{R}\overline{V}' + rU = \overline{R}(-2\overline{V}' + RU)$. Далее, полагая $-2V' + RU = V''$, найдем $2V'R = \overline{R}V''$. Отсюда $\frac{r-1}{2}\,2V'R = \overline{R}V'''$ при целом V''', или $(r-1)V'R = \overline{R}V'''$.

Вычитая это из тождества $rV'R = \overline{R}RV'R$, найдем $V'R = \overline{R}V^{\mathrm{IV}}$, что и требуется доказать.

b) Доказательство необходимости (15). Подберем V с условием

$$2\Re(VR) \equiv 0 \pmod r \quad (\mathrm{Norm}(V), r) = 1.$$

Это всегда возможно, как нетрудно удостовериться. Если теперь $V' \in \mathfrak{B}$, где $\mathfrak{B}$ — левый версорный луч $\mathrm{mod}\,\overline{R}$, то по теореме 1 и по условию a) $V' = \alpha V + \overline{R}X$ при целом рациональном α. Отсюда

$$2\Re(V'R) = 2\Re(\alpha VR) + 2\Re(\overline{R}XR).$$

Но $2\Re(\alpha VR)=\alpha\cdot 2\Re(VR)\equiv 0 \pmod r$ по выбору V. Далее, при любом целом X, $2\Re(\bar{R}XR)\equiv 0 \pmod r$. Поэтому

$$2\Re(V'R)\equiv 0 \pmod r,$$

что и требовалось доказать.

§ 7

Разовьем одно положение, доказанное Б. А. Венковым в работе (1).

Теорема Венкова. *Если L_i и L_j — два какие-либо кватерниона из* (4), *то возможно найти такой примитивный целый кватернион Q, что*

$$QL_iQ^{-1}=L_j, \tag{16}$$

и притом, если $m\not\equiv 3 \pmod 8$, то $\mathrm{Norm}(Q)$ *можно сделать взаимно простой с любым наперед заданным числом n; если $m\equiv 3 \pmod 8$, то* $\mathrm{Norm}(Q)$ *можно сделать взаимно простой с любым заданным нечетным числом n.*

Операцию (16) будем называть переходом (transition) и обозначать $L_i\to L_j$, а о всяком целом кватернионе Q, удовлетворяющем (16), будем говорить, что он управляет этим переходом.

Основываясь на этой теореме, докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5. *По всякому переходу $L_i\to L_j$ можно указать примитивный Q с условием*

$$QL_iQ^{-1}=L_j,\quad \alpha+L_i=TQ, \tag{17}$$

где T — целый, α — целое рациональное число.

Доказательство. a) Пусть сперва $m=-L_i^2\equiv 3 \pmod 8$. Согласно теореме Венкова выберем кватернион Q с условиями

$$QL_iQ^{-1}=L_j,\quad (\mathrm{Norm}(Q),\ 2m)=1. \tag{18}$$

Отсюда выводим: $L_jQ=QL_i$, т. е. L_j принадлежит главному лучу $\mathrm{mod}\, Q$ слева, ибо $\mathrm{Norm}(Q)$ нечетна.

Следовательно $L_j=\alpha'+QT$ при целом рациональном α'. Далее $L_i=Q^{-1}L_jQ=\alpha'+TQ$. Полагая $-\alpha'=\alpha$, находим

$$\alpha+L_i=TQ,$$

что и требовалось доказать.

b) Пусть $m\equiv 3 \pmod 8$. Тогда в равенстве (18) будем считать Q примитивным с четной нормой. Эта норма, $\mathrm{Norm}(Q)=2q_1$, не может делиться на 4, т. е. q_1 — нечетно. Иначе, как легко видеть, Q было бы непримитивным, ибо делилось бы на кватернион нормы 4, а такие все непримитивны.

Далее, все кватернионы нормы 2 имеют вид $(1+i)\varepsilon$, а потому положим $Q=Q_1(1+i)\varepsilon$.

Имеем далее из (18) $L_jQ_1(1+i)\varepsilon=Q_1(1+i)\varepsilon L_i=Q_1N\varepsilon'(1+i)\varepsilon$, ибо каждый кватернион нормы 2 можно представить и как $\varepsilon'(1+i)\varepsilon$ при данном ε.

Отсюда $L_j Q_1 = Q_1 N'$. Здесь уже Q_1 нечетной нормы, а потому $L_j = \alpha' + Q_1 T$, $\alpha'' + L_j = Q_1 T$.

Если α'' нечетно, то $\mathrm{Norm}(T)$ четна, а потому

$$T = (1+i)\varepsilon T' \text{ и } \alpha'' + L_j = Q_1(1+i)\varepsilon T' = QT',$$

что и требуется. Если же α'' четно, то $\alpha'' + q_1$ нечетна и

$$\alpha'' + q_1 + L_j = Q_1(T + \overline{Q}_1) = Q_1 T'',$$
$$T'' = (1+i)\varepsilon T''',$$
$$\alpha'' + q_1 + L_j = Q_1(1+i)\varepsilon T''' = QT''',$$
$$\alpha'' + q_1 + L_i = T'''Q.$$

Теорема доказана.

§ 8

Пусть дан переход $L_i \to L_j$. По теореме 5 ему отвечают целый кватернион Q и целое рациональное число d, такое, что

$$d + L_i = TQ,\ QL_iQ^{-1} = L_j,\ T \text{ — целый.} \tag{18'}$$

Пусть $\mathrm{Norm}(T) = t$; $\mathrm{Norm}(Q) = q$. Составим бинарную квадратичную форму

$$(\overline{T}x + Qy)(Tx + \overline{Q}y) = tx^2 + 2dxy + qy^2. \tag{19}$$

Ее детерминант равен $d^2 - tq = -m$. О такой форме будем говорить, что она управляет переходом $L_i \to L_j$.

Пусть подстановка $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ унимодулярна и переводит форму (14) в приведенную форму $\varphi(x, y) = ax^2 + 2exy + cy^2$ с условием $a \geqslant c \geqslant 2|e|$.

В формуле (14) подставим $x = \alpha x' + \beta y'$, $y = \gamma x' + \delta y'$. Тогда, полагая $A = T\alpha + \overline{Q}\gamma$, $C = \overline{T}\beta + Q\delta$, получим

$$(\overline{A}x' + Cy')(Ax' + \overline{C}y') = ax'^2 + 2ex'y'cy'^2 .$$

Далее, как показано в моей работе (2) (также легко выводится непосредственно),

$$AC = e + L_i, \quad CL_iC^{-1} = L_j. \tag{20}$$

Отсюда выводим важное следствие.

ТЕОРЕМА 6. *Всякий переход $L_i \to L_j$ управляется некоторой приведенной бинарной формой $\varphi(x, y) = ax^2 + 2exy + cy^2$* своей для каждого перехода, где $a \geqslant c \geqslant 2|e|$, и имеют место равенства

$$\left.\begin{aligned} e + L_i = AC,\ \mathrm{Norm}\,A = a,\ \mathrm{Norm}\,C = c,\\ CL_iC^{-1} = L_j.\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Заметим, что всякий переход управляется лишь одной формой. Доказательство см. в работе (2).

§ 9

Пусть m — аномальное число, для которого составлены равенства (5) и (9). Обозначая в (9) $P_{1i} \ldots P_{si} = \mathscr{P}_i$, перепишем их в виде

$$b' + L_i = \mathscr{P}_i Y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(m)). \tag{9'}$$

Здесь $\operatorname{Norm} \mathscr{P}_i = p^s$, $\operatorname{Norm} Y_i = y$, $0 < b' < p^s$.

Подберем целое l с условиями

$$0 \leqslant l < p, \ \operatorname{Norm}(\overline{\mathscr{P}}_i l + Y_i) \not\equiv 0 \pmod p \quad (i = 1, 2, \ldots, r(m)).$$

Это возможно, ибо

$$\operatorname{Norm}(\overline{\mathscr{P}}_i l + Y_i) \equiv y + 2\Re(Y_i \mathscr{P}_i)\, l \pmod p.$$

Последнее число равно $y + 2lb'$ и $b' \not\equiv 0 \pmod p$. Можно, стало быть, считать, что $0 \leqslant l \leqslant 1$.

Положим $\overline{\mathscr{P}}_i l + Y_i = Q_i$, $b' - lp^s = g$. Тогда получим $r(m)$ равенств

$$\left.\begin{gathered} g + L_i = \mathscr{P}_i Q_i, \quad i = 1, 2, \ldots, r(m), \\ |g| < p^s, \ \operatorname{Norm} \mathscr{P}_i = p^s, \quad m^{\frac{1}{2}+\tau} \leqslant p^s < c_4 m^{\frac{1}{2}+\tau}, \\ \operatorname{Norm} Q_i = q. \end{gathered}\right\} \tag{22}$$

Отметим, что $\mathscr{P}_i$ в этих равенствах тождественно так же, как и в (9).

Введем теперь весьма важное понятие **версорного перехода** (versor transition).

Определение. Переход $L_i \to L_j$ называется **версорным**, если в равенствах (22) $\mathscr{P}_j = \overline{\mathscr{P}_i}$, т. е. $g + L_i = \mathscr{P}_i Q_i$, $g + L_j = \overline{\mathscr{P}}_i Q_j$.

§ 10

Положим $\frac{\tau^2}{4} = \eta$. Рассмотрим все приведенные бинарные формы детерминанта $(-m)$

$$\left.\begin{gathered} \varphi_i = (a_i, b_i, c_i), \quad a_i > c_i > 2|b_i|, \quad c_i < 2m^{\frac{1}{2}} \\ i = 1, 2, \ldots, h_1(-m). \end{gathered}\right\} \tag{23}$$

Сюда должны входить как примитивные, так и непримитивные формы.

Все формы (23) разобьем на два типа: систему major forms $\mathfrak{M}$ и систему minor forms $\mathfrak{m}$, определяемые так:

$$\varphi_i \in \mathfrak{M}, \text{ если } 1 \leqslant c_i \leqslant m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)},$$

$$\varphi_i \in \mathfrak{m}, \text{ если } m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)} < c_i < 2m^{\frac{1}{2}}.$$

Если какой-либо переход $L_i \to L_j$ управляется формой $\varphi \in \mathfrak{M}$, то он будет называться **большим переходом** (major transition), если же управляющая форма $\varphi \in \mathfrak{m}$, то он будет называться **малым переходом** (minor transition). Для такого определения существенно, что всякий переход управляется лишь одной формой; это верно, но для наших рассуждений, как мы увидим, несущественно.

ТЕОРЕМА 7. *Не существует двух различных малых версорных переходов от одного и того же L_i, т. е. переходов вида*

$$\left.\begin{array}{c} L_i \longrightarrow L_j, \quad L_i \longrightarrow L_k, \quad j \neq k; \\ g + L_i = \mathcal{P}_i Q_i, \quad g + L_j = \overline{\mathcal{P}}_i Q_j, \quad g + L_k = \overline{\mathcal{P}}_i Q_k, \end{array}\right\} \tag{24}$$

если только число $m = -L_i^2$ достаточно велико: $m > m_1 = m_1(p)$.

Доказательство. Следует показать, что при наличии равенств (24) две приведенные формы φ_1 и φ_2, соответственно управляющие переходами $L_i \longrightarrow L_j$ и $L_i \longrightarrow L_k$, не могут быть обе minor forms. Пусть, напротив, имеем

$$b_1 + L_i = A_1 C_1, \quad b_2 + L_i = A_2 C_2,$$
$$C_1 L_i C_1^{-1} = \overline{A}_1 L_i \overline{A}_1^{-1} = L_j, \quad C_2 L_i C_2^{-1} = \overline{A}_2 L_i \overline{A}_2^{-1} = L_k,$$
$$\text{Norm}\, A_i = a_i, \quad \text{Norm}\, C_i = c_i \quad (i = 1, 2)$$

и обе формы $\varphi_1 = (a_1, b_1, c_1)$ и $\varphi_2 = (a_2, b_2, c_2)$ входят в $\mathfrak{M}$, так что

$$\left.\begin{array}{c} m^{\frac{1}{2} - (\tau - \eta)} < c_1 < 2m^{\frac{1}{2}}; \quad m^{\frac{1}{2} - (\tau - \eta)} < c_2 < 2m^{\frac{1}{2}}, \\ |b_1| < m^{\frac{1}{2}}, \quad |b_2| < m^{\frac{1}{2}}. \end{array}\right\} \tag{25}$$

Имеем $C_1 (g + L_i) C_1^{-1} = g + L_j$, так что из (24)

$$C_1 \mathcal{P}_i Q_i = \overline{\mathcal{P}}_i Q_j C_1. \tag{26}$$

Далее, $\text{Norm}\, Q = q$ не делится на p. Поэтому существуют два кватерниона X и Y такие, что $\overline{\mathcal{P}}_i X + Q_i Y = 1$. Тогда из (26)

$$C_1 \mathcal{P}_i Q_i Y + C_1 \mathcal{P}_i \overline{\mathcal{P}}_i X = \overline{\mathcal{P}}_i Q_j C_1 Y + \overline{\mathcal{P}}_i \mathcal{P}_i C_1 X,$$

или $C_1 \mathcal{P}_i (Q_i Y + \overline{\mathcal{P}}_i X) = \overline{\mathcal{P}}_i C'$, т. е. $C_1 \mathcal{P}_i = \overline{\mathcal{P}}_i C'$. Совершенно аналогично, основываясь на (24), получаем такие же равенства для C_2, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ — всего 4 равенства

$$\left.\begin{array}{cc} C_1 \mathcal{P}_i = \overline{\mathcal{P}}_i C', & \overline{A}_1 \mathcal{P}_i = \overline{\mathcal{P}}_i A', \\ C_2 \mathcal{P}_i = \overline{\mathcal{P}}_i C'', & \overline{A}_2 \mathcal{P}_i = \overline{\mathcal{P}}_i A''. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Отсюда следует, на основании теоремы 4, что C_1, C_2, $\overline{A}_1$, $\overline{A}_2$ принадлежат к левому версорному лучу $\mathfrak{B} \bmod \overline{\mathcal{P}}_i$ слева, и значит

$$2\Re(\mathcal{P}_i C_1) \equiv 2\Re(\mathcal{P}_i C_2') \equiv 2\Re(\mathcal{P}_i \overline{A_1}) \equiv 2\Re(\mathcal{P}_i \overline{A_2}) \equiv 0 \pmod{p^s}. \tag{28}$$

Далее, имеем

$$\text{Norm}\, C_1 = c_1 < 2m^{\frac{1}{2}}, \quad \text{Norm}\, \mathcal{P}_i = p^s < c_4 m^{\frac{1}{2} + \tau}.$$

А потому

$$|2\Re(\mathcal{P}_i C_1)| \leqslant 2(\text{Norm}(\mathcal{P}_i) \cdot \text{Norm}(C_1))^{\frac{1}{2}} < 2c_4^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4} + \frac{\tau}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}} = c_6 m^{\frac{1}{2} + \frac{\tau}{2}}$$

Следовательно, так как $p^s \geqslant m^{\frac{1}{2} + \tau}$, из сравнения (28) заключаем, что при $m > m_1'$

$$2\Re(\mathcal{P}_i C_1) = 0.$$

Так как для $\operatorname{Norm} C_2$ годна та же оценка, то и

$$2\Re(\mathscr{P}_i C_2)=0.$$

Отсюда имеем

$$2\Re(\mathscr{P}_i C_1)=2\Re(\mathscr{P}_i C_2)=0.$$

Теперь оценим сверху числа

$$a_1=\operatorname{Norm}(\overline{A}_1), \quad a_2=\operatorname{Norm}(\overline{A}_2).$$

Имеем $a_1 c_1 = b_1^2+m$; далее $|b_1|<m^{\frac{1}{2}}$, $|c_1|>m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)}$ по условию. Значит

$$a_1=\frac{b_1^2+m}{c_1}<\frac{2m}{m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)}}=2m^{\frac{1}{2}+(\tau-\eta)}.$$

Аналогично $a_2<2m^{\frac{1}{2}+(\tau-\eta)}$. Имеем теперь

$$|2\Re(\mathscr{P}_i\overline{A}_1)|\leqslant 2(\operatorname{Norm}(\mathscr{P}_i)\cdot\operatorname{Norm}\overline{A}_1)^{\frac{1}{2}}<$$
$$<2c_4^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{4}+\frac{\tau}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{4}+\frac{\tau-\eta}{2}}=c_7 m^{\frac{1}{2}+\tau-\frac{\eta}{2}}.$$

И опять в силу (28) и $p^s\geqslant m^{\frac{1}{2}+\tau}$ находим, что при $m>m_1''>m_1'$ будет

$$2\Re(\mathscr{P}_i\overline{A}_1)=0, \quad \Re(\mathscr{P}_i\overline{A}_1)=0.$$

Совершенно аналогично, при $m>m_1''$, $\Re(\mathscr{P}_i\overline{A}_2)=0$.

Итак, при $m>m_1$, все 4 кватерниона $\mathscr{P}_iC_1$, $\mathscr{P}_iC_2$, $\mathscr{P}_i\overline{A}_1$, $\mathscr{P}_i\overline{A}_2$ вырожденные.

Обозначим теперь

$$\mathscr{P}_iC_1=\alpha' i+\beta' j+\gamma' k, \quad \mathscr{P}_i\overline{A}_1=-(\alpha i+\beta j+\gamma k),$$
$$\mathscr{P}_iC_2=\mathfrak{B}, \quad \mathscr{P}_i\overline{A}_2=-\mathfrak{A}, \quad \Re(\mathfrak{B})=\Re(\mathfrak{A})=0.$$

Тогда имеем, беря сопряженные, $A_1\overline{\mathscr{P}}_i=\alpha i+\beta j+\gamma k$.

Далее, $A_1C_1=b_1L_i$, $A_2C_2=b_2L_i$. Отсюда $A_1\overline{\mathscr{P}}_i\cdot\mathscr{P}_iC_1=b_1p^s+p^sL_i$, или

$$(\alpha i+\beta j+\gamma k)(\alpha' i+\beta' j+\gamma' k)=b_1p^s+p^sL_i.$$

Аналогично $\mathfrak{A}\mathfrak{B}=b_2p^s+p^sL_i$.

Будем интерпретировать $\alpha i+\beta j+\gamma k$, $\alpha' i+\beta' j+\gamma' k$, $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ как трехмерные векторы с обычной векторной алгеброй, тогда их векторные произведения попарно равны:

$$[\alpha i+\beta j+\gamma k,\ \alpha' i+\beta' j+\gamma' k]=[\mathfrak{A},\ \mathfrak{B}]=\pm p^sL_i.$$

А потому, если начала их перенести в начало координат, то эти 4 вектора пойдут перпендикулярно вектору p^sL_i, и значит лежат в одной плоскости. Поэтому найдутся такие р е а л ь н ы е числа μ и ν, что

$$\mathfrak{B}=(\alpha i+\beta j+\gamma k)\mu+(\alpha' i+\beta' j+\gamma' k)$$

или

$$\mathscr{P}_iC_2=\mu\cdot A_1\overline{\mathscr{P}}_i+\nu\cdot\mathscr{P}_iC_1.$$

Но $\Re(A_1\overline{\mathcal{P}}_i)$, так что $A_1\overline{\mathcal{P}}_i = -\mathcal{P}_i\overline{A}_1$. Значит $\mathcal{P}_i C_2 = -\mu\cdot\mathcal{P}_i\overline{A}_1 + \nu\cdot\mathcal{P}_i C_1$. Отсюда $C_2 = -\mu\overline{A}_1 + \nu C_1$.

Возьмем теперь равенства

$$\overline{A}_1 L_i = L_j\overline{A}_1, \qquad C_1 L_i = L_j C_1;$$

первое помножим на $-\mu$, второе на ν и сложим, тогда найдем

$$(-\mu\overline{A}_1 + \nu C_1)L_i = L_j(-\mu\overline{A}_1 + \nu C_1),$$

или

$$C_2 L_i = L_j C_2, \qquad C_2 L_i C_2^{-1} = L_j,$$

что невозможно, ибо $C_2 L_i C_2^{-1} = L_k \neq L_j$. Теорема доказана.

§ 11

ТЕОРЕМА 8. *Общее количество малых версорных переходов в равенствах* (22) *не превосходит* $r(m) < c_6' m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$

Доказательство. При заданном L_i, на основании теоремы 7, существует не более одного малого версорного перехода $L_i \to L_j$, а количество L_i равно $r(m) < c_6' m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

Теперь мы должны будем оценить сверху общее количество больших версорных переходов. При этом мы поступим таким образом: задавшись определенной major form φ, оценим, сколькими версорными переходами $L_i \to L_j$ при разных i и j она может управлять, а затем просуммируем полученные оценки по всем major forms, которые могут встретиться при детерминанте $(-m)$.

Пусть дана major form $(r, b, t) = \varphi$. По определению здесь будет $t \leqslant m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)}$. При оценке количества версорных переходов, управляемых ею, по излагаемому способу важна величина t сравнительно с $m^{\frac{1}{2}}$ и то обстоятельство, на какую степень числа p делится t.

ТЕОРЕМА 9. *Пусть дана* major form $\varphi = (r, b, t)$ *детерминанта* $(-m)$ *с условиями*

$$\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu} < t \leqslant m^{\frac{1}{2}-\nu} \leqslant m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)}, \quad t \not\equiv 0 \pmod p). \tag{29}$$

Тогда количество всех возможных версорных переходов в равенствах (22), *которыми она могла бы управлять, будет*

$$< c_8(\varepsilon)\, m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}+\varepsilon} \quad \textit{при} \quad m > m_2 > m_1.$$

Доказательство. Пусть φ управляет некоторым версорным переходом $L_i \to L_j$. Тогда имеем:

$$\left.\begin{aligned} &b + L_i = R_i T_i, \quad T_i L_i T_i^{-1} = L_j,\\ &\mathrm{Norm}(R_i) = r, \quad \mathrm{Norm}(T_i) = t,\\ &g + L_i = \mathcal{P}_i Q_i, \quad g + L_j = \overline{\mathcal{P}}_i Q. \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

Прежде всего отсюда, как и в доказательстве теоремы 7, выводим, что $T_i\mathscr{P}_i = \overline{\mathscr{P}}_i T'_i$. Значит T_i принадлежит версорному лучу mod $\overline{\mathscr{P}}_i$ слева, и так как $t \leqslant m^{\frac{1}{2}-\nu} < 2m^{\frac{1}{2}}$, то точно такое же рассуждение, как в доказательстве теоремы 7, показывает, что при $m > m_1$ имеем $\mathfrak{R}(\mathscr{P}_i T_i) = \mathfrak{R}(T_i\mathscr{P}_i) = 0$. Отсюда $T_i\mathscr{P}_i = -\overline{\mathscr{P}}_i\overline{T}_i$.

Теперь из (30) выводим

$$T_i\mathscr{P}_i Q_i \overline{T}_i = T_i(g + L_i)\overline{T}_i = T_i(g - b + b + L_i)\overline{T}_i =$$
$$= (g - b)T_i\overline{T}_i + T_i R_i T_i \overline{T}_i = t(g - b + T_i R_i) = tA$$

при целом A, т. е. $T_i\mathscr{P}_i Q_i \overline{T}_i = tA$. Далее $T_i\mathscr{P}_i = -\overline{\mathscr{P}}_i\overline{T}_i$, отсюда

$$T_i\mathscr{P}_i Q_i \overline{T}_i = -\overline{\mathscr{P}}_i \overline{T}_i Q_i \overline{T}_i = tA.$$

Умножая последнее равенство слева на $-\mathscr{P}_i$, получим при целом B

$$p^s \overline{T}_i Q_i \overline{T}_i = tB.$$

Подберем a' и b' так, чтобы $a'p^s + b't = 1$ (что возможно). Тогда получим

$$(a'p^s + b't)\ \overline{T}_i Q_i \overline{T}_i = t(a'B + b'\overline{T}_i Q_i \overline{T}_i) = tC,$$

или $\overline{T}_i Q_i \overline{T}_i = tC = \overline{T}_i T_i C$. Отсюда $Q_i\overline{T}_i = T_i C$. Значит Q_i принадлежит версорному лучу mod T_i слева, т. е.

$$2\mathfrak{R}(\overline{T}_i Q_i) = 2\mathfrak{R}(Q_i\overline{T}_i) \equiv 0 \pmod{t}. \tag{31}$$

Далее, $\operatorname{Norm}(Q_i) = q = \frac{g^2 + m}{p^s}$. Но, как видно из (22), $|g| < p^s$, $p^s \geqslant m^{\frac{1}{2}+\tau}$ Поэтому

$$q < \frac{\left(m^{\frac{1}{2}+\tau}\right)^2 + m}{m^{\frac{1}{2}+\tau}} < c_8 m^{\frac{1}{2}+\tau}.$$

Далее, $t < m^{\frac{1}{2}-\nu}$. Поэтому

$$|2\mathfrak{R}(Q_i\overline{T}_i)| \leqslant 2(qt)^{\frac{1}{2}} < 2c_8^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}+\frac{\tau}{2}} m^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}} = c_9 m^{\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-\frac{\nu}{2}}.$$

Из (31) выводим $2\mathfrak{R}(Q_i\overline{T}_i) = dt$ (d — целое).

Так как $t > \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu}$, то

$$|d| < \frac{c_9 m^{\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-\frac{\nu}{2}}}{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu}} = c_{10} m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}}. \tag{32}$$

Положим теперь

$$T_i\mathscr{P}_i = a'i + b'j + c'k = U, \quad \operatorname{Norm} U = u = tp^s,$$
$$Q_i\overline{T}_i = \frac{dt}{2} + a''i + b''j + c''k = V, \quad \operatorname{Norm} V = v = qt.$$

Имеем:

$$UV = T_i \mathcal{P}_i Q_i \overline{T}_i = T_i (g + L_i) T_i^{-1} T_i \overline{T}_i = (g + L_j) T_i \overline{T}_i = gt + L_j t.$$

Составим бинарную форму

$$\mathrm{Norm}\ (\overline{U}x + Vy) = ux^2 + 2gtxy + vy^2,$$

иначе

$$\left(\frac{d}{2}t\right)^2 y^2 + (a'x + a''y)^2 + (b'x + b''y)^2 + (c'x + c''y)^2 = \\ = ux^2 + 2gtxy + vy^2 = \psi(x, y). \qquad (33)$$

Таким образом, от версорного перехода $L_i \longrightarrow L_j$, управляемого нашей major form φ и описываемого равенствами (30), мы переходим к равенствам (33).

Пусть теперь $L_k \longrightarrow L_l$ есть другой версорный переход, управляемый той же φ. Составим для него равенство типа (30) и затем так же, как и раньше, перейдем к равенству (33).

Прежде всего $\psi(x, y)$ будет та же, ибо $u = tp^s$, $v = qt$ — те же. Но величины $d, a', a'', b', b'', c', c''$ будут, вообще говоря, другие.

Объединяя в одну систему $\mathfrak{A}$ все версорные переходы $L_\alpha \longrightarrow L_\beta$, управляемые нашей формой φ, у которых числа $d, a', a'', b', b'', c', c''$ в равенствах (33) одинаковы, рассмотрим, сколько переходов $L_i \longrightarrow L_j$ может быть в одной из таких систем $\mathfrak{A}$.

Прежде всего для каждого такого перехода должно быть

$$U = a'i + b'j + c'k, \qquad V = \frac{d}{2}t + a''i + b''j + c''k.$$

Кватернион U должен быть произведением двух катернионов T_i нормы t и $\mathcal{P}_i$ нормы p^s. Так как t и p^s взаимно просты, то количество различных пар T_i и $\mathcal{P}_i$ при условии $T_i \mathcal{P}_i = U = a'i + b'j + c'k$ не превосходит 24.

Для каждого такого T_i должно быть $Q_i \overline{T}_i = V = \frac{dt}{2} + a''i + b''j + c''k$, откуда Q_i определяется однозначно.

Далее, должно быть $\mathcal{P}_i Q_i = g + L_i$, откуда при данных $\mathcal{P}_i$ и Q_i определяется однозначно L_i.

Наконец, $UV = gt + L_j t$, откуда L_j находим однозначно.

Отсюда следует, что в системе $\mathfrak{A}$ может быть не более 24 переходов $L_i \longrightarrow L_j$.

Теперь подсчитаем, сколько возможно систем $\mathfrak{A}$, т. е. равенств (33). Прежде всего, согласно оценке (32), целое число d может принимать не более $c_{11} m^{\frac{\tau}{2} + \frac{\nu}{2}}$ значений, где $c_{11} = 2c_{10}$ из (32).

Пусть d фиксировано, тогда, умножая равенство (33) на 4, выведем из него

$$4Ux^2 + 2 \cdot 4gtxy + (4V - d^2t^2) y^2 = \\ = (2a'x + 2a''y)^2 + (2b'x + 2b''y)^2 + (2c'x + 2c''y)^2. \qquad (34)$$

Здесь все участвующие числа — целые. Слева стоит фиксированная положительная бинарная форма детерминанта $(4gt)^2 - 4u(4v - g^2t^2)$, а справа — ее представление суммою трех квадратов.

Применим теперь такую теорему: *количество всех представлений данной бинарной формы $f(x, y)$ детерминанта $-D$ суммою трех квадратов* не превосходит $c_{12}(\varepsilon) D^{\varepsilon}$.*

Эту теорему можно вывести, пользуясь соответствующими методами Гаусса. В нашем случае

$$D = (4v - g^2t^2)\,4u - (4gt)^2 < (4v - g^2t^2)\,4u < 16uv = 16t^2qp^s.$$

Далее, $t < m^{\frac{1}{2}-\nu}$, $q < c_8 m^{\frac{1}{2}+\tau}$, $p^s < c_4 m^{\frac{1}{2}+\tau}$. Поэтому $D < c'_{12}m^3$ и количество равенств (34) будет $< c_{12}(\varepsilon)(c'_{12}m^3)^{\varepsilon'} < c''_{12}m^{\varepsilon}$.

Таково число равенств (34) или равенств (33) при данном d. Далее, d принимает не более $c_{11}m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}}$ значений, а потому полное число равенств (33) и систем $\mathfrak{A}$ не превосходит $c_{11}m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}} \cdot c''_{12}m^{\varepsilon}$.

В каждой системе $\mathfrak{A}$ не более 24 переходов $L_i \longrightarrow L_j$, а поэтому полное число переходов $L_i \longrightarrow L_j$, управляемых major form φ, будет

$$< 24c_{11}m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}} \cdot c''_{12}m^{\varepsilon} < c_8(\varepsilon)\,m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}+\varepsilon}$$

§ 12

Предположим, что для major form $\varphi(r, b, t)$ имеют место все условия предыдущего параграфа, кроме $t \not\equiv 0 \pmod p$, так что

$$\frac{1}{2}m^{\frac{1}{2}-\nu} < t \leqslant m^{\frac{1}{2}-\nu} \leqslant m^{\frac{1}{2}(\tau-\eta)}, \quad t \equiv 0 \pmod p.$$

Пусть φ управляет версорным переходом $L_i \longrightarrow L_j$, так что имеют место равенства

$$\left.\begin{array}{ll} b + L_i = R_iT_i, & T_iL_iT_i^{-1} = L_j, \\ g + L_i = \mathscr{P}_iQ_i, & g + L_j = \overline{\mathscr{P}}_iQ_j, \\ \multicolumn{2}{c}{\text{Norm }(T_i) = t'.} \end{array}\right\} \tag{35}$$

Отсюда, как и в доказательстве предыдущей теоремы, находим

$$T_i\mathscr{P}_i = \overline{\mathscr{P}}_iT_i^*. \tag{36}$$

Теперь уже кватернион $T_i\mathscr{P}_i$ может быть и непримитивным; в силу примитивности T_i и $\mathscr{P}_i$ непримитивность его может происходить только от того, что

$$\left.\begin{array}{c} T_i = T'_iP_i, \quad \mathscr{P}_i = \overline{P}_i\mathscr{P}'_i, \\ \text{Norm } P_i = p^{s_1}, \quad s \leqslant s, \quad T'_i\mathscr{P}'_i \text{ примитивно.} \end{array}\right\} \tag{37}$$

Величину p^{s_1} будем называть индексом непримитивности кватерниона $T_i\mathscr{P}_i$ и перехода $L_i \longrightarrow L_j$. Теперь все версорные переходы $L_\alpha \longrightarrow L_\beta$, управляемые major form φ, разобьем на системы $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_l$, согласно индексам их непримитивности $p^{s_1}, p^{s_2}, \ldots, p^{s_l}$. Здесь $s_1 < s_2 < \ldots$ $\ldots < s_l \leqslant s$. Отсюда $l \leqslant s$. Так как $p^s < c_4 m^{\frac{1}{2}+\tau}$, то при $m > m_3 > m_2$ будет $l \leqslant s < \dfrac{\ln m}{\ln p} < c_{16}(\varepsilon)\,m^{\varepsilon}$.

---

* собственных или несобственных, но делитель которых есть наибольший делитель формы.

Возьмем какую-либо систему $\mathfrak{A}_k$ с индексом непримитивности p^{s_k}. Для какого-либо ее перехода $L_i \to L_j$ имеем равенства

$$\left.\begin{array}{c} b + L_i = R_i T'_i P_i, \quad g + L_i = \mathcal{P}_i Q_i, \\ \mathcal{P}_i = \overline{P}_i \mathcal{P}'_i, \quad (T'_i P_i) L_i (T'_i P_i)^{-1} = L_j, \\ g + L_j = \overline{\mathcal{P}}_i Q_j. \end{array}\right\} \tag{38}$$

Из этих равенств имеем

$$P_i L_i P_i^{-1} = L'_i, \quad g + L'_i = \mathcal{P}'_i Q_i \overline{P}_i, \tag{39}$$

L'_i — целый вырожденный и входит в (4).

Далее, $T_i L_i T_i^{-1} = L_j$, или $T'_i P_i L_i P_i^{-1} T_i'^{-1} = L_j$, или

$$T'_i L'_i T_i'^{-1} = L_j.$$

Наконец, из (38) выводим равенство $b + L'_i = P_i R_i T'_i$. Ему мы сопоставляем бинарную форму детерминанта $(-m)$

$$\psi(x, y) = p^{s_k} r x^2 + 2bxy + t' y^2.$$

Здесь $t' = \frac{t}{p^{s_k}}$. Эта форма управляет переходом $L'_i \to L_j$. Назовем ее сопровождающей для φ (очевидно, она есть major form), а переход $L'_i \to L_j$ — сопровождающим для перехода $L_i \to L_j$.

Покажем, что один переход $L'_i \to L_j$, управляемый major form ψ, может сопровождать не более, чем 24 перехода $L_i \to L_j$. В самом деле, имеем

$$P_i L_i P_i^{-1} = L'_i \quad \text{или} \quad L_i = P_i^{-1} L'_i P_i.$$

Здесь P_i — кватернион нормы p^{s_k}. Далее должно быть $b + L'_i = P_i R_i T'_i$, слева стоит примитивный кватернион, а потому P_i может иметь не более 24 значений. Поэтому, при данном L'_i, L_i имеет не более 24 значений, и один переход $L'_i \to L_j$ может сопровождать не более 24 переходов $L_i \to L_j$.

Теперь оценим количество всех переходов $L'_i \to L_j$, которыми могла бы управлять major form $\psi(x, y)$. Прежде всего для каждого такого перехода имеем

$$g + L'_i = \mathcal{P}'_i Q'_i, \quad \text{Norm } \mathcal{P}'_i = p^{s - s_k}, \quad \text{Norm } Q'_i = q p^{s_k}.$$

Здесь $g \not\equiv 0 \pmod p$. Возьмем унимодулярную подстановку $\begin{pmatrix} 1 & \eta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где η таково, что при применении к форме $p^{s-s_k} x^2 + 2gxy + qp^{s_k} y^2$ этой подстановки, получим форму

$$p^{s-s_k} x^2 + 2g'xy + q'y^2 \quad \text{и} \quad |g'| < p^{s-s_k}. \tag{40}$$

Далее, берем подстановку $\begin{pmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, где τ равно 0 либо 1 и таково, что при применении этой подстановки к форме (40) получается форма

$$p^{s-s_k} x^2 + 2g_1 xy + q_1 y^2, \tag{41}$$

где $q_1 \not\equiv 0 \pmod p$.

Применяя подстановку $\begin{pmatrix} 1 & \eta+\tau \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ к форме $p^{s-s_k}x^2+2gxy+qp^{s_k}y^2$, получим форму (41), причем $|g_1|<2p^{s-s_k}$, $|q_1|<4p^{s-s_k}$.

Теперь, заменяя Q'_i на $\overline{\mathscr{P}}'_i(\eta+\tau)+Q'_i=Q''_i$, выведем равенство

$$g_1+L'_i=\mathscr{P}'_iQ''_i, \quad T'_iL'_iT'^{-1}_i=L_j,$$
$$b+L'_i=P_iR_iT'_i, \quad \text{Norm}\,(\mathscr{P}'_i)=p^{s-s_k},$$
$$\text{Norm}\,Q''_i=q_1, \quad \text{Norm}\,T'_i=t'=\frac{t}{p^{s_k}}.$$

Отсюда, как и в предыдущем параграфе, находим $T'_i\mathscr{P}'_i=\overline{\mathscr{P}}'_iT''_i$. Следовательно T'_i принадлежит левому версорному лучу mod $\overline{\mathscr{P}}'_i$ слева, т. е.

$$2\Re(\mathscr{P}'_iT'_i)\equiv 0 \pmod{p^{s-s_k}}.$$

Предположим сперва, что $p^{s_k}\geqslant m^{\tau}$. Имеем

$$2\,|\Re(\mathscr{P}'_iT'_i)|<2\,\frac{c_4^{\frac{1}{2}}m^{\frac{1}{4}+\frac{\tau}{2}}}{p^{\frac{s_k}{2}}}\cdot\frac{m^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}}{p^{\frac{s_k}{2}}},$$

ибо

$$p^{s-s_k}<\frac{c_4m^{\frac{1}{2}+\tau}}{p^{s_k}}, \quad \frac{\frac{1}{2}\,m^{\frac{1}{2}-\nu}}{p^{s_k}}<\frac{t}{p^{s_k}}\leqslant\frac{m^{\frac{1}{2}-\nu}}{p^{s_k}}.$$

Значит $2\,|\Re(\mathscr{P}'_iT'_i)|<c_{17}\,\dfrac{m^{\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-\frac{\nu}{2}}}{p^{s_k}}$.

Далее, $p^{s-s_k}>\dfrac{m^{\frac{1}{2}+\tau}}{p^{s_k}}$, а поэтому, при $m>m_3>m_2$, $\Re(\mathscr{P}'_iT'_i)=0$.

Рассуждая как и в предыдущем параграфе, получим $T'_i\mathscr{P}'_iQ''_i\overline{T}'_i\equiv 0 \pmod{t'}$. Так как $\Re(\mathscr{P}'_iT'_i)=\Re(T'_i\mathscr{P}'_i)$, то $T'_i\mathscr{P}'_i=-\mathscr{P}'_i\overline{T}'_i$, откуда

$$\overline{\mathscr{P}}'_i\overline{T}'_iQ''_i\overline{T}'_i\equiv 0 \pmod{t'}. \qquad (42)$$

Общий наибольший делитель кватернионов $\overline{\mathscr{P}}'_i$ и T'_i справа равен 1, иначе $T'_i\mathscr{P}'_i$ был бы непримитивен. Отсюда следует, что существуют целые A и B такие, что $A\overline{\mathscr{P}}'_i+BT'_i=1$. Тогда, используя (42), выводим

$$A\overline{\mathscr{P}}'_i\overline{T}'_iQ''_i\overline{T}'_i+BT'_i\overline{T}'_iQ''_i\overline{T}'_i\equiv 0 \pmod{t'}$$

или $\overline{T}'_iQ''_i\overline{T}'_i=t'C=\overline{T}'_iT'_iC$ (C — целое).

Отсюда $Q''_i\overline{T}'_i=T'_iC$ или Q'_i принадлежит к левому версорному лучу mod T'_i. Поэтому имеем

$$\Re(Q''_i\overline{T}'_i)\equiv 0 \pmod{t'}.$$

Далее, $\text{Norm}\,Q''_i=q_1=\dfrac{g_1^2+m}{p^{s-s_k}}<\dfrac{4\,(p^{s-s_k})^2\,m}{p^{s-s_k}}$. Но $p^{s_k}>m^{\tau}$, $p^{s-s_k}<$ $<c_4m^{\frac{1}{2}}$ и значит

$$q_1 < p^{s_1} \frac{c_{18} m}{m^{\frac{1}{2}+\tau}} = c_{18} m^{\frac{1}{2}-\tau} p^{s_k}, \quad t' < \frac{m^{\frac{1}{2}-\nu}}{p^{s_1}},$$

$$2 \,|\, \Re (Q_i'' \overline{T}_i') \,| < c_{18}^{\frac{1}{2}} m^{\frac{1}{4}-\frac{\tau}{2}} p^{\frac{s_k}{2}} \frac{m^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}}{p^{\frac{s_k}{2}}} < c_{19} m^{\frac{1}{2}-\frac{\tau}{2}-\frac{\nu}{2}}, \quad t' > \frac{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu}}{p^{\frac{s_k}{2}}}.$$

Отсюда имеем

$$\Re (Q_i'' \overline{T}_i') = \frac{d}{2} t', \quad |\, d \,| < c_{20} m^{\frac{\nu}{2}-\frac{\tau}{2}} p^{s_k}.$$

Поэтому, рассуждая как в доказательстве предыдущей теоремы, получим, что количество переходов $L_i' \longrightarrow L_j$, управляемых $\psi(x, y)$, будет

$$< c_{21}(\varepsilon)\, m^{\frac{\nu}{2}-\frac{\tau}{2}+\varepsilon} p^{s_k}$$

и количество переходов $L_i \longrightarrow L_j$ из системы $\mathfrak{A}_k$ управляемых $\varphi(x,y)$ будет

$$< 24 c_{21}(\varepsilon)\, m^{\frac{\nu}{2}-\frac{\tau}{2}+\varepsilon} p^{s_k} < c_{22}(\varepsilon)\, m^{\frac{\nu}{2}-\frac{\tau}{2}+\varepsilon} p^{s_k}.$$

§ 13

Пусть теперь при прежних обозначениях будет $p^{s_k} < m^{\tau}$. Рассуждая, как и выше, дойдем до места

$$q_1 = \frac{b_1^2 + m}{p^{s-s_k}} < \frac{4\,(p^{s-s_k})^2 + m}{p^{s-s_k}}.$$

Здесь уже $p^{s-s_k} > m$, так что

$$q_1 < c_{23} p^{s-s_k} < \frac{c_{24} m^{\frac{1}{2}+\tau}}{p^{s_k}}.$$

Поэтому

$$2 \Re (Q_i'' \overline{T}_i') < c_{25} \frac{m^{\frac{1}{4}+\frac{\tau}{2}}}{p^{\frac{s_k}{2}}} \cdot \frac{m^{\frac{1}{4}-\frac{\nu}{2}}}{p^{\frac{s_k}{2}}} < c_{25} \frac{m^{\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}-\frac{\nu}{2}}}{p^{s_k}}.$$

Так как $t' > \dfrac{\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu}}{p^{s_k}}$, то

$$\Re (Q_i'' \overline{T}_i') = \frac{d}{2} t', \quad |\, d \,| < c_{26} m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}}.$$

Отсюда, как и ранее, находим, что количество $L_i \longrightarrow L_j$ системы $\mathfrak{A}_k$ будет

$$< 27 m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu}{2}+\varepsilon}.$$

§ 14

ТЕОРЕМА 10. *Общее количество всех больших версорных переходов в равенствах* (22) *не превышает* $c_{28}(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}$

Доказательство. Сегмент $\left[0, m^{\frac{1}{2}(\tau-\eta)}\right] = \overline{AB}$ разделим пополам точкой B_1, отрезок AB_1 — опять пополам точкой B_2 и т. д. до B_n так, что

$$\overline{AB}_n \geqslant \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}\overline{AB}_n < \frac{1}{2}$$

A — B_n — B_2 — B_1 — B

0 — 1 — $m^{\frac{1}{2}-\nu_2}$ — $m^{\frac{1}{2}-\nu_1}$ — $m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)}$

Положим

$$\left.\begin{aligned} &\overline{AB}_1 = m^{\frac{1}{2}-\nu_1} = \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-(\tau-\eta)}, \\ &\overline{AB}_2 = m^{\frac{1}{2}-\nu_2} = \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu_1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\overline{AB}_n = m^{\frac{1}{2}-\nu_n} = \frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu_{n-1}}, \\ &\tau-\eta < \nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots < \nu_n. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Числа t, лежащие в промежутке B_kB_{k-1}, удовлетворяют условию

$$\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}} < t \leqslant m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}}. \tag{44}$$

Число промежутков $\overline{B_kB}_{k-1}$ будет $< c_{29} \ln m < c_{30}(\varepsilon)\, m^{\varepsilon}$ при $m > m_3 > m_4$.

Рассмотрим числа промежутка (44). Все или некоторые из них могут быть последними коэффициентами бинарных major forms вида (r, b, t) детерминанта $(-m)$; каждое из них может служить последним коэффициентом не более, чем $c_{31}(\varepsilon)\, m^{\varepsilon}$ таких форм (ибо все они приведенные). Каждая из этих форм может управлять некоторыми версорными переходами в равенствах (22).

Эти версорные переходы во всей их совокупности разобьем на системы по индексам их непримитивности. Пусть это будут системы $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_{l'}$, $l' \leqslant l$, где индексы непримитивности $p^{s_i} > m^{\tau}$ $(i = 1, 2, \ldots, l')$. Возьмем одну из них, например $\mathfrak{B}_1$. Для нее имеем: количество переходов из $\mathfrak{B}_1$ будет в силу двух предыдущих параграфов

$$< c_{22}(\varepsilon)\, m^{\frac{\nu_{k-1}}{2}-\frac{\tau}{2}+\varepsilon}\, p^{s_k} \frac{m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}}}{p^{s_k}}\, c_{31}(\varepsilon)\, m^{\varepsilon}.$$

В самом деле, каждое число t из (44), порождающее major form $\varphi=(r, b, t)$, управляющую переходом из $\mathfrak{B}_1$, должно удовлетворять условию $t\equiv 0 \pmod{p^{s_k}}$ и в силу (44)

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}}}{p^{s_k}}<\frac{t}{p^{s_k}}\leqslant\frac{m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}}}{p^{s_k}}.$$

А потому существует не более, чем $\dfrac{m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}}}{p^{s_k}}c_{31}(\varepsilon)m^{\varepsilon}$ форм вида (r, b, t). Отсюда общее число переходов из $\mathfrak{B}_1$ будет

$$<c_{32}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}-\frac{\nu_{k-1}}{2}-\frac{\tau}{2}+\varepsilon}<c_{32}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}-\frac{\tau-\eta}{2}-\frac{\tau}{2}+\varepsilon}=c_{32}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon},$$

ибо $\nu_{k-1}>\tau-\eta$.

Теперь возьмем одну из систем $\mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{C}_{l''}$, $l''=l-l'$, где индексы непримитивности $p^{s_i}<m^{\tau}$ $(i=1, 2, \ldots, l'')$. Проведя рассуждения, аналогичные предыдущим, найдем, что количество ее переходов будет

$$<c_{27}(\varepsilon)\,m^{\frac{\tau}{2}+\frac{\nu_{k-1}}{2}+\varepsilon}m^{\frac{1}{2}-\nu_{k-1}}c_{31}(\varepsilon)\,m^{\varepsilon}<c_{33}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}.$$

Полное количество переходов по всем l' системам $\mathfrak{B}_i$ и l'' системам $\mathfrak{C}_i$ будет ввиду $l<c_{16}(\varepsilon)m^{\varepsilon}$

$$<c_{16}(\varepsilon)\,m^{\varepsilon}\left(c_{32}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}+c_{33}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}\right)<c_{34}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}.$$

Наконец, число промежутков $<c_{30}(\varepsilon)m^{\varepsilon}$, так что полное количество больших версорных переходов в равенствах (22) будет

$$<c_{30}(\varepsilon)\,m^{\varepsilon}\cdot c_{34}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}<c_{28}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 11. *Полное количество всех версорных переходов в равенствах* (22) *будет* $<c_{35}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}$.

Доказательство. Согласно последней теореме § 11 количество всех малых версорных переходов в (22) будет $<c_{15}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$. Всех же больших переходов будет $<c_{28}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}$. Всего

$$c_{15}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\varepsilon}+c_{28}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}<c_{35}(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}.$$

§ 15

Пусть теперь m будет аномальное число $>m_3$, удовлетворяющее условиям (2). Тогда, как мы видели ранее, в равенствах (22) будет не более, чем $c_{11}m^{\frac{1}{2}-2\tau^2}$ различных $\mathcal{P}_i$.

Выпишем опять равенства (22), причем пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ суть все различные встречающиеся в них кватернионы $\mathcal{P}_i$, и соберем в n систем $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_n$, у которых $\mathcal{P}_i$ одинаковы. Получим равенства вида

$$\left.\begin{array}{ll} g+L_i=\mathcal{P}_1 Q_i & (i=1, 2, \ldots, a_1), \\ g+L_i=\mathcal{P}_2 Q_i & (i=a_1+1,\ a_1+2, \ldots, a_1+a_2), \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g+L_i=\mathcal{P}_n Q_i & (i=a_1+\ldots+a_{n-1}+1,\ a_1+\ldots+a_{n-1}+a_n). \end{array}\right\} \quad (22')$$

Здесь $a_1+\ldots+a_n=r(m)$, $n < c_{11} m^{\frac{1}{2}-2\tau^2}$.

Теперь по каждой системе $\mathfrak{A}_k$ построим соответствующую систему $\overline{\mathfrak{A}}_k$ следующим образом. Имеем для всех равенств $\mathfrak{A}_k$

$$g+L_i=\mathcal{P}_k Q_i \quad (i=a_1+\ldots+a_{k-1}+1,\ a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k).$$

Возьмем сопряженные $g-L_i=\overline{Q}_i\overline{\mathcal{P}}_k$. Положим $-\overline{\mathcal{P}}_k L_i \overline{\mathcal{P}}_k^{-1}=L_i'$. Для разных L_i, L_i' различны, ибо $L_i=\overline{\mathcal{P}}_k^{-1}L_i'\overline{\mathcal{P}}_k$.

Составим систему $\overline{\mathfrak{A}}_k$ так:

$$g+L_j'=\overline{\mathcal{P}}_k\overline{Q}_i \quad (j=a_1+\ldots+a_{k-1}+1,\ a_1+\ldots+a_{k-1}+a_k).$$

Рассмотрим теперь a_k^2 переходов вида $L_i \to L_j'$, где $L_i \in \mathfrak{A}_k$ и $L_j' \in \overline{\mathfrak{A}}_k$.

Это все — версорные переходы. Для всех n систем $\mathfrak{A}_k$ и $\overline{\mathfrak{A}}_k$ эти переходы различны, ибо у них различны либо L_i' либо L_j'. Полное количество всех этих версорных переходов будет $v=a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2$. Согласно неравенству Шварца, будем иметь

$$v=a_1^2+\ldots+a_n^2 \geqslant \frac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n)^2.$$

Далее, $a_1+\ldots+a_n=r(m) > c_\varepsilon m^{\frac{1}{2}-\varepsilon}$, $n < c_{11} m^{\frac{1}{2}-2\tau^2}$ Так что

$$v \geqslant \frac{c_{\varepsilon'} m^{1-\varepsilon'}}{c_{11} m^{\frac{1}{2}-2\tau^2}} = c_{35}(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}+2\tau^2-\varepsilon} \tag{45}$$

Но по § 14 полное количество версорных переходов в равенствах (22) будет $v < c_{28}(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}+\frac{\eta}{2}+\varepsilon}$ при $m > m_3$. У нас $\eta=\frac{\tau^2}{4}$. Положим $\varepsilon=\frac{\tau^2}{2}$. Тогда из (45) $v \geqslant c_{35} m^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\tau^2}$, и по § 14 $v < c_{28} m^{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\tau^2}$ при $m > m_3$.

Значит, при $m > m_4 > m_3$ получаем противоречие, доказывающее, что число $m > m_4$ не может быть аномальным.

Стало быть, если $m > m_4$ и m удовлетворяет условиям (2), то в равенствах (9) встретятся все кватернионы P из (1), а значит по любому примитивному кватерниону P нормы p можно указать примитивный L с условием $b+L=PY$, $L^2=-m$, b — подходящее целое число.

В дальнейших параграфах показано, что это как раз равносильно представляемости чисел $m > m_4$ каждой формой из рода удобных форм инвариантов $[p, 1]$, если m удовлетворяет условиям (2), т. е. неособенно, и удовлетворяет родовым условиям рода. А затем мы оценим количество этих представлений снизу. Поэтому дальнейшие параграфы содержат одни лишь алгебраические преобразования.

§ 16

Мы воспользуемся следующими сведениями из теории квадратичных форм (Bachman P., Die Arithmetik der quadratischen Formen, 1898, стр. 600—604).

Каждому примитивному представлению целого нечетного числа p суммою четырех квадратов отвечает примитивное представление некоторого класса тернарных форм Φ инвариантов $[1, p]$, содержащихся в некотором роде $\mathfrak{G}$, суммою четырех квадратов, союзное с представлением p. И обратно, каждая форма рода $\mathfrak{G}$ инвариантов $[1, p]$ примитивно представляется суммой четырех квадратов союзно с некоторым представлением числа p.

Далее, известно, что формы рода $\mathfrak{G}$ инвариантов $[1, p]$ не представляют $7p$ по модулю 8, а взаимные к ним формы имеют инвариант $[p, 1]$ и характер $\left(-\frac{1}{p}\right)$ по $\bmod p$, если p простое.

Покажем, что формы рода $\mathfrak{G}$ инвариантов $[1, p]$ суть взаимные к удобным (p—простое), а взаимные к ним — сами удобные.

Пусть $\Phi(x, y, z)$ форма рода $\mathfrak{G}$ инвариантов $[1, p]$. Она примитивно представлена суммой четырех квадратов, так что, полагая

$$\left.\begin{aligned} X &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, \\ Y &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, \\ Z &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, \\ T &= \alpha_4 x + \beta_4 y + \gamma_4 z, \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

найдем

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = \Phi(x, y, z).$$

Иначе говоря, $X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2$ переходит в $\Phi(x, y, z)$ подстановкой

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & 0 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & 0 \end{pmatrix} \tag{47}$$

Обозначая $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$ алгебраические дополнения 1-го, 2-го, 3-го, 4-го элементов последней колонны (47), найдем

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = p, \quad (\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = 1;$$

$$\sum_{i=1}^{4} \rho_i \alpha_i = \sum_{i=1}^{4} \rho_i \beta_i = \sum_{i}^{4} \rho_i \gamma_i = 0. \tag{48}$$

§ 17

Введем в рассмотрение целые кватернионы

$$P=\rho_1-\rho_2 i-\rho_3 j-\rho_4 k;\quad \Xi=X+Yi+Zj+Tk,$$

где X, Y, Z, T взяты из (46). P назовем характеристическим кватернионом формы $\Phi(x, y, z)$; Ξ — переменный кватернион, компоненты которого зависят от трех целочисленных параметров x, y, z.

Рассмотрим произведение $P\Xi$. Его реальная часть равна

$$\rho_1 X+\rho_2 Y+\rho_3 Z+\rho_4 T=x\sum_{i=1}^{4}\rho_i\alpha_i+y\sum_{i=1}^{4}\rho_i\beta_i+z\sum_{i=1}^{4}\rho_i\gamma_i$$

в силу (48). Поэтому

$$P\Xi=L, \tag{49}$$

где L — вырожденный переменный кватернион. Имеем

$$\operatorname{Norm} L=-L^2=p\,(X^2+Y^2+Z^2+T^2)=p\Phi(x, y, z).$$

Далее, из $\rho_1 X+\rho_2 Y+\rho_3 Z+\rho_4 T$ находим $T=-\frac{\rho_1 X+\rho_2 Y+\rho_3 Z}{\rho_4}$, это — целое число. Отсюда (считая $\rho_4\neq 0$)

$$\Phi(x, y, z)=X^2+Y^2+Z^2+\left(\frac{\rho_1 X+\rho_2 Y+\rho_3 Z}{\rho_4}\right), \tag{50}$$

где для целых x, y, z все четыре числа справа, возводимые в квадрат, суть целые.

Пусть теперь даны три любые целые числа X, Y, Z, такие, что и число

$$\frac{\rho_1 X+\rho_2 Y+\rho_3 Z}{\rho_4}=-T$$

есть целое. Полагаем, что можно подобрать целые x, y, z такие, что числа X, Y, Z, T будут выражаться через них по формулам (46). Прежде всего имеем

$$\rho_1 X+\rho_2 Y+\rho_3 Z+\rho_4 T=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & X \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & Y \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & Z \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & T \end{vmatrix}=0.$$

Отсюда следует, что равенствам (46) можно удовлетворить с реальными x, y, z. Далее, легко видим, что числа $\rho_1 x, \rho_1 y, \rho_1 z, \ldots, \rho_4 x, \rho_4 y, \rho_4 z$ суть все целые, и в силу условия $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)=1$, x, y, z тоже суть целые, что и требовалось доказать.

Итак, для существования представления числа n, не делящегося на p, $n=\Phi(x_1, y_1, z_1)$, необходимо и достаточно существование равенства

$$P\,\Xi_1=L_1,\quad L_1^2=-pn. \tag{51}$$

Разным и примитивным L_1 отвечают разные и примитивные (x_1, y_1, z_1). Это легко выводится из равенств (46) и того, что $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4) = 1$.

Так дается интерпретация форм взаимных к удобным с помощью кватернионов. Теперь дадим интерпретацию и самих удобных форм.

§ 18

Пусть дано m, удовлетворяющее условиям (2). Пусть $\Phi(x, y, z)$ — некоторая форма рода $\mathfrak{G}$ и инвариантов $[1, p]$, а $P = \rho_1 - \rho_2 i - \rho_3 j - \rho_4 k$ — ее характеристический кватернион; $\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2 = p$. Тогда, как доказано выше, при $m > m_4$ будет существовать равенство $b + L = P\Xi$, $L^2 = -m$, L примитивно, $(b, p) = 1$.

Здесь Ξ целый, и так как b целое и p нечетное, то Ξ — собственно-целый. Положим $\Xi = X + Yi + Zj + Tk$. Пусть $\rho_4 \neq 0$. Тогда $\rho_4 \not\equiv 0 \pmod p$.

Подберем a и b_1 такие, чтобы $b + pa = b_1\rho_4$. Имеем

$$pa + b + L = pa + P\Xi = P(\bar{P}a + P\Xi) = PW,$$

или

$$b_1\rho_4 + L = PW, \tag{52}$$

где W — собственно-целый.

Положим $W = X' + Y'i + Z'j + T'k$. Имеем

$$\rho_1 X' + \rho_2 Y' + \rho_3 Z' + \rho_4 T' = b_1\rho_4,$$
$$T' = b_1 - \frac{\rho_1 X' + \rho_2 Y' + \rho_3 T'}{\rho_4}.$$

Беря нормы в обеих частях (52), найдем

$$(b_1\rho_4)^2 + m = p\left\{X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \left(b_1 - \frac{\rho_1 X' + \rho_2 Y' + \rho_3 Z'}{\rho_4}\right)^2\right\}, \tag{53}$$

где все четыре числа, возводимые в квадрат, — целые. Здесь $b_1 \neq 0$, иначе $m \equiv 0 \pmod p$, что невозможно.

Рассмотрим выражение

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 + \left(b_1 - \frac{\rho_1 X' + \rho_2 Y' + \rho_3 Z'}{\rho_4}\right)^2.$$

Очевидно его можно привести к виду

$$\Phi\left(x' + \frac{\alpha b_1}{p},\ y' + \frac{\beta b_1}{p},\ z' + \frac{\gamma b_1}{p}\right) + r, \tag{53'}$$

где α, β, γ — целые, r — рациональное число, x', y', z' — целые, связанные с X', Y', Z' первыми тремя из формул (46). Небольшое вычисление показывает, что $r = (b_1\rho_4)^2$, так что подстановка в (53) дает

$$m = p\,\Phi\left(x' + \frac{\alpha b_1}{p},\ y' + \frac{\beta b_1}{p},\ z' + \frac{\gamma b_1}{p}\right),$$

иначе

$$m = \frac{\Phi(px' + \alpha b_1,\ py' + \beta b_1,\ pz' + \gamma b_1)}{p}. \tag{54}$$

Здесь числитель делится на p. Но одно из чисел α, β, γ не должно делиться на p; пусть это будет α. Определим σ и τ при условии

$$\beta \equiv \sigma\alpha \pmod p, \quad \gamma \equiv \tau\alpha \pmod p.$$

Тогда можно написать при $x'' = \alpha b_1 + px'$

$$m = \frac{\Phi(x'', \sigma x'' + py'', \tau x'' + pz'')}{p}. \tag{54'}$$

Пусть $\Psi(x'', y'', z'')$ есть форма, в которую Φ переходит подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \sigma & 1 & 0 \\ \tau & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$m = \frac{\Psi(x'', py'', pz'')}{p}. \tag{55}$$

Заметим, что для всех b_1 в (54) и следовательно для всех b в равенстве $b + L = P\Xi$, несравнимых с $0 \pmod p$, форма $\Psi(x'', y'', z'')$ получается одна и та же, стало быть, при любых x'' числитель (55) делится на знаменатель, т. е. все коэффициенты формы $\Psi(x'', py'', pz'')$ делятся на p. Разделив их на p, получим целочисленную форму $f(x'', y'', z'')$. Ее детерминант будет $\frac{pp^4}{p^3} = p^2$. Поэтому $m = f(x'', y'', z'')$, где f — форма детерминанта p^2. Представление

$$m = f(x'', y'', z'') \tag{56}$$

примитивно. Ибо если x'', y'', z'' все делятся на простое q, то $q \neq p$ и, возвращаясь от (56) к (55) и (53), найдем, что $L \equiv 0 \pmod q$, что невозможно.

Пусть, обратно, задано равенство (56). От него переходим к (55), затем к (54'). Решаем сравнение $\alpha b_1 \equiv x'' \pmod p$ относительно b_1; находим (54), где y' и z' определяются по b_1, y'' и z'', и наконец (53') и (53), т. е. равенство $b + L = P\Xi$.

Отсюда равенства (2) суть родовые условия формы $f(x'', y'', z'')$. Значит, эта форма инвариантов $[p, 1]$ с родовыми условиями $\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$, $f \neq 4^a(8b+7)$.

При данном b и при данном характеристическом кватернионе P из двух равенств

$$b + L_1 = P\Xi_1, \quad b + L_2 = P\Xi_2 \qquad (L_1 \neq L_2) \tag{57}$$

получим два р а з н ы х примитивных представления

$$m = f(x_1'', y_1'', z_1''), \quad m = f(x_2'', y_2'', z_2''). \tag{58}$$

В самом деле, в (53') (x_1', y_1', z_1') и (x_2', y_2', z_2') будут разные, а тогда и (x_1'', y_1'', z_1'') и (x_2'', y_2'', z_2'') при фиксированных σ и τ будут разные.

Наконец, положим, что когда P пробегает все кватернионы нормы p, $f(x'', y'', z'')$ пробегает все удобные формы инвариантов $[p, 1]$. Именно: так как $\Psi(x'', y'', z'')$ эквивалентна $\Phi(x'', y'', z'')$ и $f(x'', y'', z'')$ получается из Ψ подстановкой

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & p & 0\\ 0 & 0 & p\end{pmatrix},$$

легко выводим, используя тот факт, что инварианты f суть $[p, 1]$, что эквивалентным $f(x'', y'', z'')$ отвечают эквивалентные $\Phi(x'', y'', z'')$. Когда P пробегает все кватернионы нормы p, то, как показано в предыдущем параграфе, Φ пробегает ряд форм $\mathfrak{G}$ инвариантов $[1, p]$, а поэтому f должны пробегать все взаимные к ним формы, т. е. все удобные формы, что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что §§ 1—15 доказывают теорему:

Всякое число m, не делящееся на p и удовлетворяющее родовым условиям заданной удобной формы f и превышающее некоторую константу m_0, $m > m_0$, примитивно представляется формой f.

§ 19

Теперь займемся оценкой числа представлений снизу.

Предположим, что в равенствах (22) среди P_{ji} в произведениях

$$\mathcal{P}_i = P_{1i}P_{2i}\ldots P_{si} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r(m))$$

заданный кватернион P из (1) вообще может повторяться при некоторых i, но при фиксированном i он может повторяться не более чем

$$\mu = \frac{\ln m}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)} \quad \text{раз.}$$

Имеем

$$s = \frac{\ln n}{\ln p}, \quad m^{\frac{1}{2}+\tau} \leqslant p^s < c_4 m^{\frac{1}{2}+\tau},$$

$$s \sim \left(\frac{1}{2}+\tau\right)\frac{\ln m}{\ln p} \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Тогда, рассуждая как и в параграфе с равенствами (22), мы придем к выводу, что число различных $\mathcal{P}_i$ в равенствах (22) не превышает

$$c_{36} m^{\frac{1}{2}-2\tau^2}\cdot C_{[\ln m]}^{\left[\frac{\ln m}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)}\right]} \quad (C \text{ — число сочетаний}).$$

Далее

$$C_{[\ln m]}^{\left[\frac{\ln m}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)}\right]} < (\ln m)^{\frac{\ln m}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)}}.$$

Но $(\ln m)^{\frac{\ln m}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)}} < c_{37}(\varepsilon)\, m^{\varepsilon}$, следовательно число различных $\mathcal{P}_i$ в (22) будет

$$< c_{38}(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}-2\tau^2+\varepsilon},$$

откуда, как и в предыдущих параграфах, выводим противоречие в двух различных оценках общего числа версорных переходов в (22) при $m > m_0$.

Поэтому существует хотя одно i такое, что в равенстве

$$g + L_i = P_{1i} P_{2i} \ldots P_{si} Y_i$$

существует не менее μ чисел j таких, что

$$P_{ji} = P.$$

При каждом таком j положим $A_j = P_{1i} \ldots P_{j-1,i}$. Тогда $A_j^{-1} L_i A_j = L_i^{(j)}$ — целое, и $g + L_i^{(j)} = P \Xi_{ji}$.

Сколько различных $L_i^{(j)}$ можно получить таким образом? Если $L_i^{(j)} = L_i^{(j')}$, то имеем

$$A_j^{-1} L_i A_j = A_{j'}^{-1} L_i A_{j'}.$$

Пусть $j > j'$. Тогда мы должны иметь (²), при целых ξ и η, $p^{j-j'} = \xi^2 + m\eta^2$. Отсюда $j - j' \geqslant \frac{\ln m}{\ln p}$, либо $j - j' = 0$. Поэтому, так как $j \leqslant s$, $j' \leqslant s$ и при $m \to \infty$ $s \sim \left(\frac{1}{2} + \tau\right) \frac{\ln m}{\ln p}$, $\tau < \frac{1}{2}$, имеем $j - j' = 0$.

Значит, при $m > m_0$ все $L_i^{(j)}$ будут различными. Отвечающие им представления $m = f(x'', y'', z'')$ также все будут различными. Отсюда имеем

$$r(f, m) > \mu = \frac{\ln m}{\ln \ln m \cdot \ln (\ln \ln m)}.$$

Но можно достичь и большего. Выбросим из $r(m)$ кватернионов L_i s кватернионов, получаемых из L_i преобразованиями вида

$$(P_{1i} \ldots P_{li})^{-1} L_i P_{1i} \ldots P_{li} \quad (l = 1, 2, \ldots, s).$$

Рассмотрим оставшиеся. Так как $r(m) - s > c_\varepsilon m^{\frac{1}{2} - \varepsilon}$, то проводя те же рассуждения, как и раньше, найдем, что существует равенство

$$g + L_{i'} = P_{1i'} P_{2i'} \ldots P_{si'} Y_{i'},$$

где для более чем μ чисел j будет $P_{ji'} = P$. Тогда получим опять $\geqslant \mu$ равенств $g + L_{i'}^{(j)} = P \Xi_{ji'}$. При этом ни разу $L_{i'}^{(j)} \neq L_i^{(j)}$ по их конструкции (²). Значит, получим $\geqslant \mu$ новых представлений вида $m = f(x'', y'', z'')$.

Продолжая ту же операцию выборки и отбрасывания, найдем

$$r(f, m) > \frac{r(m)}{\ln m} \cdot \frac{\ln m}{\ln \ln m \cdot \ln (\ln \ln m)} > c_1 \frac{h(-m)}{\ln \ln m \cdot \ln (\ln \ln m)}.$$

Теорема I доказана.

Часть II

В первой части настоящей работы доказана теорема о представлении больших чисел «удобными» тернарными квадратичными формами. Во второй части мы несколько расширим понятие удобной формы и распространим на них доказанную там теорему.

Мы определяли удобную форму так: если $p \geqslant 3$ простое число, то форма с инвариантами $[p, 1]$ и условиями $\left(\frac{f}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)$; $f \neq 8b+7$ называется удобной.

Пусть теперь k — какое-либо нечетное число с каноническим разложением

$$k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_s^{\alpha_s}.$$

Назовем удобной форму f инвариантов $[k, 1]$ с условиями

$$\left(\frac{f}{p_i}\right)=\left(\frac{-1}{p_i}\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, s), \quad f \neq 8b+7.$$

Эта форма будет иметь в точности такую же интерпретацию кватернионами, как и в случае простого k. Характеристический кватернион ее K будет иметь сложную норму k. Соответствующие доказательства проводятся, как и в части I, и лишь несколько усложняются. Результат получается такой же: если $m > m_0 = m_0(p)$, $(m, k)=1$, m — четное или нечетное, m удовлетворяет родовым условиям f, то m представляется формой f и число представлений

$$r(f, m) > c_1 \frac{h(-m)}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)}.$$

Небольшое уточнение рассуждений дает даже

$$r(f, m) > c_1' \frac{h(-m)}{\ln\ln m}.$$

Здесь мы выскажем еще одну теорему, доказательство которой будет основываться на тех же соображениях, что и теоремы части I.

ТЕОРЕМА II. *Пусть* $k=p_1^{\alpha_1}\ldots p_s^{\alpha_s}$ *нечетно и* ξ, η, ζ — *три целых числа таких, что*

$$\left(\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{p_i}\right)=\left(\frac{-1}{p_i}\right) \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Тогда при $m > m_0 = m_0(p)$; $m \equiv \xi^2+\eta^2+\zeta^2 \pmod{k}$, $m \neq 4^a(8b+7)$ *уравнение*

$$m=(kx+\xi)^2+(ky+\eta)^2+(kz+\zeta)^2$$

разрешимо и число его решений

$$> c_2 \frac{h(-m)}{\ln\ln m\cdot\ln(\ln\ln m)}.$$

Другими словами, среди решений уравнения $m=X^2+Y^2+Z^2$ *найдется достаточно много таких, где* $X\equiv\xi$, $Y\equiv\eta$, $Z\equiv\zeta \pmod{k}$.

Доказательство потребует ряда вводных рассуждений.

§ 1

Мы ограничимся предположением, что $k=p\geqslant 3$—простое число. Пусть заданы ξ, η, ζ с условием $\left(\frac{\xi^2+\eta^2+\zeta^2}{p}\right)=\left(-\frac{1}{p}\right)$ и m с условием $m\neq 4^a(8b+7)$, $m\equiv\xi^2+\eta^2+\zeta^2 \pmod p$ или $\left(\frac{-m}{p}\right)=+1$. Выберем τ (τ определяется по одному только p) и $\eta=\frac{\tau^2}{4}$, точно такие же, как в части I. Как и там, подберем s с условием $m^{\frac{1}{2}+\tau}\leqslant p^s<c_3m^{\frac{1}{2}+\tau}$.

Пусть теперь $L_1, L_2, \ldots, L_{r(m)}$—все примитивные решения уравнения

$$L^2=-m.$$

Пусть b—число, определенное с условием

$$b^2+m\equiv 0 \pmod{p^s},\quad 0<b<c_4p^s,$$

$$\left(\frac{b^2+m}{p^s},\ p\right)=1.$$

Напишем $r(m)$ равенств

$$b+L_i=\mathscr{P}_iX_i \qquad (i=1, 2, \ldots, r(m)) \tag{1}$$
$$\mathscr{P}_i=P_{1i}P_{2i}\ldots P_{si}.$$

Из части I настоящей работы мы знаем, что если количество n различных $\mathscr{P}_i$ в равенствах (1) удовлетворяет условию

$$n<m^{\frac{1}{2}-\mu}, \tag{2}$$

где μ — сколь угодно малое, но фиксированное число, большее нуля, то это возможно лишь при условии $m<m_0=m_0(\mu, p)$; если же $m>m_0$, то неравенство (2) невозможно.

Докажем, что при $m>m_0(p)$ предположение о неразрешимости уравнения

$$m=(px+\xi)^2+(py+\eta)^2+(pz+\zeta)^2 \tag{3}$$

приведет к тому, что в равенстве (1) будет $n<m^{\frac{1}{2}-\mu}$, где $\mu=\mu(p)$ зависит только от p и, значит, эта неразрешимость вероятна лишь при $m<m_0(\mu, p)=m_0(p)$, а при $m>m_0$ уравнение (3) будет разрешимо.

§ 2

Рассмотрим кватернион $b+\xi i+\eta j+\zeta k=K$ и будем считать, что $b^2+\xi^2+\eta^2+\zeta^2=\text{Norm } K\equiv b^2+m\equiv 0 \pmod p$, но $\not\equiv 0 \pmod{p^2}$.

Имеем $K=P_1K$, $\text{Norm } K_1\not\equiv 0 \pmod p$. Составим кватернион $P_1(K_1+\overline{P}X)\equiv K \pmod p$. Подберем P такой, что $K_1P=P_1K$. Тогда, при любом Y, $Y\overline{P}P\equiv 0 \pmod p$ и следовательно $Y\overline{P}P\equiv 0$ (mod $\overline{P_1}$ слева), а

отсюда, по общей теории лучей, $Y\overline{P}=\alpha K_1+\overline{P}_1 z$ при целом рациональном P_1. Если $Y\overline{P}\equiv 0$ (mod $\overline{P}_1$ слева), то $\alpha\not\equiv 0 \pmod p$.

Рассмотрим два случая.

Случай 1. $P\neq P_1\varepsilon$, где ε — единица.

Предположим, что в равенствах (1) одно из них имеет вид

$$b+L_i=\overline{P}P_1P_{3i}\ldots P_{si}X, \tag{4}$$

т. е. $P_{1i}=P$, $P_{2i}=P_1$. Это допустимо, ибо $\overline{P}\neq\varepsilon\overline{P}_1$. Тогда из (4) получим, полагая, что $\overline{P}^{-1}L_i\overline{P}=L_i'$ — целое,

$$b+L_i'=P_1P_{3i}\ldots P_{si}X_i,$$

или

$$b+L_i'=P_1Y\overline{P},$$

где $Y=P_{3i}\ldots P_{si}$.

Отсюда по изложенному выше находим

$$b+L_i'=P_1\,(\alpha K_1+\overline{P}_1Z)\equiv\alpha P_1K\equiv\alpha K \pmod p,$$

т. е.

$$b+L_i'\equiv\alpha\,(b+\xi i+\eta j+\zeta k) \pmod p,$$

откуда $b\equiv\alpha b \pmod p$. Так как $b\not\equiv 0 \pmod p$, то $\alpha\equiv 1 \pmod p$ или

$$L_i'\equiv\xi i+\eta j+\zeta k \pmod p.$$

Очевидно, что если вообще в равенстве $b+L_i=P_{1i}P_{2i}\ldots P_{si}X_i$ будет $P_{ni}=\overline{P}$, $P_{n+1,\,i}=P_1$, то, полагая $(P_{1i}\ldots P_{n-1,\,i})^{-1}L_i\,(P_{1i}\ldots P_{n-1,\,i})=L_i''$ (целый), получим $b+L_i''=\overline{P}P_1Y_i$, откуда снова

$$L_i'\equiv\xi i+\eta j+\zeta k \pmod p.$$

Далее, если предположить, что ни в одном из уравнений (1) нет пар $P_{n,i}$, $P_{n+1,\,i}$ с условием $P_{n,\,i}=\overline{P}$, $P_{n+1,\,i}=P_1$, то, как и в части I, придем к выводу $n<m^{\frac{1}{2}-\mu}$, $\mu=\mu(p)$, откуда $m<m_0(\mu,\,p)$, что доказывает разрешимость (3).

Случай 2. $P=P_1\varepsilon$.

Тогда $K_1P_1=\overline{P}_1K'$. Из теории версорных лучей следует, что $\Re(K_1P_1)\equiv 0 \pmod p$ и $\Re(P_1K_1)\equiv 0 \pmod p$. Отсюда $\Re(K)\equiv 0 \pmod p$, но $\Re(K)\equiv b\equiv 0 \pmod p$, и это невозможно.

Количество представлений оценивается так же, как и в части I.

Замечание. Мы говорили: «подберем P так, что $K_1P=\overline{P}_1K'$». Покажем, что это вполне возможно.

Пусть $P^{(1)}, P^{(2)}, \ldots, P^{(q)}$ — все кватернионы нормы p, не связанные с равенствами $P^{(i)}\varepsilon=P^{(j)}$. Тогда равенства $K_1P^{(i)}=P_i'K'$, $K_1P^{(j)}=P_i'K''$ невозможны.

В самом деле, подбирая X и Y так, что $P^{(i)}X+P^{(j)}Y=1$, мы получили бы $K_1P^{(i)}X+K_1P^{(j)}Y=P_i'Z$ при целом Z, или $K_1=\overline{P}_i'Z$,

Norm $K_1 \equiv 0 \pmod p$), что невозможно. Значит перебрасывание K_1 через разные $P^{(i)}$ дает разные P'_i, и следовательно при некотором $P^{(h)} = P$ получится $\bar{P}_1$.

§ 3

В предыдущих параграфах исследовались формы и полиномы специального вида, представлявшие особые удобства для исследования описанным методом. Сам по себе метод применим ко всем тернарным формам вообще, но при этом встречаются неудобства, о которых будет сказано далее.

Здесь мы приложим его к тернарным формам довольно общего вида и докажем следующую теорему.

ТЕОРЕМА III. *Пусть Ω нечетное число. Рассмотрим все тернарные формы F инвариантов $[\Omega, 1]$. Существует $m = m_0(\Omega)$ с условием: если m неособенное число, большее m_0, $m > m_0$, $(m, 2\Omega) = 1$, то m примитивно представляется каждой формой F, родовым условиям которой оно удовлетворяет, кроме, может быть, одного исключительного рода форм F с условием $\left(\frac{F}{\omega}\right) = (-1)^{\frac{\omega+1}{2}}$ для всех простых $\omega \mid \Omega$.*

§ 4

Здесь будут широко использованы работы автора (2) и (5).

Пусть $\Phi(x, y, z)$ — некоторая тернарная форма инвариантов $[\Lambda, 1]$. Рассмотрим алгебру «эрмитионов» $\mathfrak{A}_\Phi$, определенную равенствами § 2 работы (2).

Пусть Π — некоторый эрмитион нормы p^t, где $p \nmid \Lambda$ — простое число, а L — некоторый вектор $\mathfrak{A}_\Phi$ нормы m. Тогда равенство

$$b + L = \Pi X \tag{5}$$

(если оно существует) означает, что m представляется некоторой формой $F_1(x, y, z)$, инварианты которой суть $[\Lambda p^t, 1]$, а род определяется равенством $\left(\frac{F_1}{\omega}\right) = \left(\frac{\Phi}{\omega}\right)$ при $\omega \mid \Lambda$;

$$\left(\frac{F_1}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Это доказывается, как и аналогичное предложение в части I, но здесь мы уже не в состоянии утверждать, что и все остальные формы этого рода можно выразить таким образом.

Нам нужно однако подойти и к их трактовке. Пусть $F_1, F_2, \ldots, F_h$ — все формы рода и инвариантов F_1. Тогда, как известно (5), существуют унимодулярные подстановки вида

$$S_i = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_{1i}}{n_i} & \frac{\alpha_{2i}}{n_i} & \frac{\alpha_{3i}}{n_i} \\ \frac{\beta_{1i}}{n_i} & \frac{\beta_{2i}}{n_i} & \frac{\beta_{3i}}{n_i} \\ \frac{\gamma_{1i}}{n_i} & \frac{\gamma_{2i}}{n_i} & \frac{\gamma_{3i}}{n_i} \end{pmatrix},$$

переводящие F_i в F_1, причем $\alpha_{1i}, \ldots, \gamma_{3i}$—целые, а n_i—число взаимно простое с любым заданным числом и простые делители которого имеют наперед заданный квадратичный характер по заданным модулям.

Пусть n_i выбрано так, что из сравнения $F_i(0, y, z) \equiv 0 \pmod{n_i^s}$ при достаточно большом s следует $y \equiv z \equiv 0 \pmod{n_i}$ (из § 5 работы [5] выведем, что можно взять $s \leqslant 2$).

Пусть ξ, η, ζ выбраны так, что

$$\alpha_{1i}\xi + \alpha_{2i}\eta + \alpha_{3i}\zeta = 0 \pmod{n_i^2}. \tag{6}$$

Тогда в силу равенства

$$F_i(\alpha_{1i}\xi + \alpha_{2i}\eta + \alpha_{3i}\zeta,\ \beta_{1i}\xi + \beta_{2i}\eta + \beta_{3i}\zeta,\ \gamma_{1i}\xi + \gamma_{2i}\eta + \gamma_{3i}\zeta) = n_i^2 F_1(\xi, \eta, \zeta)$$

выведем

$$\beta_{1i}\xi + \beta_{2i}\eta + \beta_{3i}\zeta \equiv \gamma_{1i}\xi + \gamma_{2i}\eta + \gamma_{3i}\zeta \pmod{n_i},$$

т. е. $F_1(\xi, \eta, \zeta) = F_i(x', y', z')$ при целых x', y', z'.

Пусть теперь дано число m (взаимно простое с n_i). Сравнения

$$m \equiv F(\xi, \eta, \zeta), \quad \alpha_{1i}\xi + \alpha_{2i}\eta + \alpha_{3i}\zeta \equiv 0 \pmod{n_i^2} \tag{7}$$

всегда совместно разрешимы. Пусть ξ', η', ζ' — их решения. Если существует представление

$$m = F_1(x, y, z), \quad x \equiv \xi', \quad y \equiv \eta', \quad z \equiv \zeta' \pmod{n_i^2}, \tag{8}$$

то m представимо и формой $F_i'(x, y, z)$.

Условие (8) может быть в эрмитионной форме выражено так:

$$b + L = \Pi X, \quad L^2 = -m, \quad L \equiv \Xi \pmod{n_i^2}, \tag{9}$$

где Ξ — эрмитион, определенный по модулю n_i^2 из условий (8). Так как $\Xi^2 \equiv -m \pmod{n_i^2}$, то, как легко усмотреть, если L' — любой вектор нормы m, существует Q с условием

$$QL'Q^{-1} \equiv \Xi \pmod{n_i^2}.$$

Далее, можно подобрать эрмитион Π' нормы $p^{t'}$, сравнимый с Q по модулю n_i^2, так, что будет $\Pi' L' \Pi'^{-1} \equiv \Xi \pmod{n_i^2}$.

Отсюда, наконец, следует, что равенство вида

$$b + L' = \overline{\Pi}' \Pi X, \quad L'^2 = -m \tag{10}$$

дает представление числа m формой $F_i(x, y, z)$, ибо $\Pi'(b + L_i')\Pi'^{-1} = \Pi X \overline{\Pi}'$, или

$$b + L'' = \Pi Y, \quad L'' \equiv \Xi \pmod{n_i^2}.$$

§ 5

Теперь мы можем сформулировать теорему § 3 в эрмитионной форме.

Пусть дан род формы F инвариантов $[\Omega, 1]$ и не для всех $\omega(\Omega)$

будет $\left(\frac{F}{\omega}\right)=(-1)^{\frac{\omega+1}{2}}$. Тогда найдется p с условием $\Omega=\Omega_1 p^q$, $(\Omega_1, p)=1$, $\left(\frac{F_1}{p}\right)=\left(\frac{-1}{p}\right)$. Рассмотрим род форм инвариантов $[\Omega_1, 1]$ с родовыми условиями, как и у F. Пусть $\Phi_1(x, y, z)$—какая-либо его форма и $\mathfrak{A}_{\Phi_1}$—ее алгебра; пусть p^q есть норма некоторого эрмитиона $\Pi \in \mathfrak{A}_{\Phi_1}$. Равенство

$$b+L=\Pi X; \qquad L_i^2=-m \tag{11}$$

означает представление m некоторой формой $F_1(x, y, z)$ нашего рода. Если $F_i(x, y, z)$ — некоторая другая форма того же рода, то в зависимости от вычета L по модулю n_i^2 существует Π' нормы p^t такое, что равенство

$$b+L=\overline{\Pi}'\Pi X', \qquad L^2=m \tag{12}$$

обеспечивает представление m формой $F_i(x, y, z)$. Обозначим $\overline{\Pi}'\Pi=\Pi''$, считая форму $F_i(x, y, z)$ фиксированной. Известно, что число представлений числа m родом форм $\Phi_1(x, y, z)$ будет $N_0>c_1 h(-m)$; если k — число форм этого рода, то хотя бы для одной формы этого рода число представлений (примитивных) будет

$$N>\frac{c_1}{k}h(-m)=c_2 h(-m).$$

Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_N$ соответствующие эрмитионы. Среди них найдется по крайней мере $N_1=\frac{N}{n_i^6}>c_3 h(-m)$ сравнимых с определенным $\Xi \pmod{n_i^2}$. Пусть это суть $L_i, \ldots, L_{N_1}$. Тогда задача состоит в том, чтобы показать, что при подходящем b среди эрмитионов $b+L_1$, $b+L_2, \ldots, b+L_{N_1}$ будет такой, что

$$b+L_i=\Pi''X, \qquad \Pi''\overline{\Pi}''=p^t.$$

§ 6

Для того чтобы провести рассуждение по схеме части I, необходимо следующее:

1° среди наших N_1 эрмитионов надо разыскать $N_2>c_4 h(-m)$ таких, которые при подходящем b' удовлетворяли бы равенствам

$$b'+L_1=\mathscr{P}_i X_i, \tag{13}$$

где $\mathscr{P}$—эрмитионы нормы $c_4 m^\rho$ $\left(0<\rho\leqslant\frac{1}{2}\right)$;

2° показать, что если ни один эрмитион $\mathscr{P}_i$ не распадается по формуле $\mathscr{P}_i=A\Pi''B$, то количество их $<c_5 m^{\rho-\eta}$ $(0<\eta<\rho)$.

Если бы все левые и правые идеалы области были главными, то задачи 1° и 2° были бы тривиальными. Но поскольку это не так, в этом и лежит основная трудность задачи.

Предположим сперва, что 1° и 2° выполнены и ни один из $P_i \neq A\Pi''B$. Покажем, как по схеме части I притти к противоречию, доказывающему теорему § 3.

§ 7

ЛЕММА («версорные лучи»). *Если V — примитивный эрмитион и $AV = \overline{V}A'$, то* $2\Re(AV) \equiv 0 \pmod{v}$, где $v = \mathrm{Norm}\ V$.

Доказательство. Имеем

$$2\Re(AV) = AV + \overline{V}\overline{A} = \overline{V}A' + \overline{V}\overline{A} = \overline{V}B.$$

Отсюда, в силу примитивности $\overline{V}$, $2\Re(AV) \equiv 0 \pmod{v}$. Среди эрмитионов (13) отберем N_3 эквивалентных в смысле § 7 работы (²), т. е. таких, что если

$$L = xi_1 + yi_2 + zi_3 \quad \text{и} \quad L' = x'i_1 + y'i_2 + z'i_3$$

два из них, то

$$\frac{\partial\Phi(x, y, z)}{\partial x} - \frac{\partial\Phi(x', y', z')}{\partial x'} \equiv 0 \pmod{\mathfrak{Q}_1}.$$

Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ — все различные эрмитионы в (13),

$$n < c_5 m^{\rho - \eta}.$$

Как в части I, составляем системы

$$\begin{array}{lll}
b' + L_i = \mathcal{P}_1 X_i & (i = 1, 2, \ldots, a_1) & \mathfrak{A}_1, \\
b' + L_i = \mathcal{P}_n X_i & (i = a_1 + \ldots + a_{n-1} + 1, \ldots, N_3) & \mathfrak{A}_n, \\
b' + L_i = \overline{\mathcal{P}}_1 X'_i & (i = 1, 2, \ldots, b_1) & \mathfrak{B}_1, \\
b' + L_i = \overline{\mathcal{P}}_n X'_i & (i = b_1 + \ldots + b_{n-1} + 1, b_1 + \ldots + b_n) & b_n,
\end{array}$$

$$b_j \geqslant \frac{a_i}{24}.$$

Количество различных версорных переходов $L_i \rightarrow L_j$ будет

$$v > \frac{1}{24}(a_1^2 + \ldots + a_n^2) > \frac{1}{24}\frac{(a_1 + \ldots + a_n)^2}{n} > c_5 \frac{\{h(-m)\}^2}{m^{\rho-\eta}} > c_6(\varepsilon) m^{1-\rho+\eta-\varepsilon}.$$

Рассматриваем все приведенные бинарные формы детерминанта $-m$, $\varphi_i = (a_i, b_i, c_i)$, $a_i \geqslant c_i \geqslant |b_i|$; сегмент $\left[1, 2m^{\frac{1}{2}}\right]$ делим пополам, левую половину опять пополам и т. д. Так получим $\nu < c_7 \ln m$ сегментов изображенного вида.

Полагаем $OA_k = m^{\frac{1}{2} - \nu_k}$; $\nu_k > \nu_{k+1}$ и наши формы разбиваем на системы $\mathfrak{C}_j$, смотря по тому, в каком сегменте лежит c_i. Если $\varphi_i \in \mathfrak{C}_j$, то

$$\frac{1}{2} m^{\frac{1}{2} - \nu_{j-1}} \leqslant c_i \leqslant m^{\frac{1}{2} - \nu_{j-1}}.$$

§ 8

ТЕОРЕМА. *Полное количество версорных переходов, управляемых формой* $\varphi=(a, g, c)\in\mathfrak{C}_j$, *не превышает* $c_7(\varepsilon)\,m^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon}$

Доказательство. Пусть $L_i \to L_j$ — версорный переход, управляемый φ. Имеем

$$b+L_i=\mathscr{P}X,\quad b+L_j=\overline{\mathscr{P}}X',\quad g+L_i=AC,\quad CL_iC^{-1}=L_j.$$

Отсюда, как и в части I, выводим, что

$$C\mathscr{P}=\overline{\mathscr{P}}C' \quad \text{и} \quad 2\Re(C\mathscr{P})\equiv 0 \pmod{p^s},$$

где $p^s=\operatorname{Norm}\mathscr{P}$,

$$p^s=c_4m^\rho,\ 2\Re(\overline{A}\mathscr{P})\equiv 0 \pmod{p^s}.$$

Следовательно

$$2\Re(A\overline{\mathscr{P}})\equiv 2\Re(\mathscr{P}C)\equiv 0 \pmod{p^s}.$$

Полагая

$$A\overline{\mathscr{P}}=U=\frac{d}{2}p^s+\alpha i_1+\beta i_2+\gamma i_3,\ \ \mathscr{P}C=\frac{d'}{2}p^s+\alpha' i_1+\beta' i_2+\gamma' i_3,$$

легко получить

$$|d|<c_8m^{\frac{1}{4}+\frac{\nu_{j-1}}{2}-\frac{\rho}{2}},\quad |d'|<c_8m^{\frac{1}{4}-\frac{\nu_{j-1}}{2}-\frac{\rho}{2}}. \tag{14}$$

Далее, $A\mathscr{P}\overline{\mathscr{P}}C=gp^s+p^sL_i$, откуда

$$(\overline{U}x+Vy)\ (Ux+\overline{V}y)=p^s\varphi(x, y)$$

или

$$p^s\varphi(x, y)-\left(\frac{d}{2}p^sx+\frac{d}{2}p^sy\right)^2=\psi(x, y)=\Phi(\alpha x+\alpha' y,\ \beta x+\beta' y,\ \gamma x+\gamma' y).$$

Обозначая $p^s\varphi(x, y)-\left(\frac{d}{2}p^sx+\frac{d'}{2}p^sy\right)^2=\psi(x, y)$, получим, что тем версорным переходам $L_i\to L_j$, которые управляются формой $\varphi(x, y)$ и имеют одинаковые d и d', отвечает представление одной и той же формы $\psi(x, y)$ формой $\Phi(\xi, \eta, \zeta)$, а одному и тому же представлению $\psi(x, y)$ этой формой отвечает не более 24^2 таких переходов. Далее, хотя эти представления несобственные, количество их не превышает $c_9(\varepsilon)(mp^s)^\varepsilon=c_{10}(\varepsilon)m^\varepsilon$ (см. § 11). Наконец, количество возможных значений пары $\{d, d'\}$ будет в силу (14)

$$<c_8m^{\frac{1}{4}+\frac{\nu_{j-1}}{2}-\frac{\rho}{2}}\cdot c_8m^{\frac{1}{4}-\frac{\nu_{j-1}}{2}-\frac{\rho}{2}}=c_{10}m^{\frac{1}{2}-\rho},$$

откуда количество версорных переходов $L_i \to L_j$, управляемых $\varphi(x, y)$, будет

$$< c_7(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon},$$

что и требовалось доказать.

Эта оценка не зависит от системы $\mathfrak{C}_j$, а потому полное количество версорных переходов будет

$$< c_{10} h(-m)\cdot c_7(\varepsilon)\, m^{\frac{1}{2}-\rho+\varepsilon} < c_{11}(\varepsilon)\, m^{1-\rho+\varepsilon},$$

а по § 7 оно $> c_6(\varepsilon)\, m^{1-\rho+\eta-\varepsilon}$, $\eta > 0$ — фиксированное число. Это и приводит к противоречию, доказывающему теорему § 3.

Итак, для ее доказательства надо обосновать пункты 1° и 2° § 6.

§ 9

Дадим обоснование пункта 1°. Пусть искомое число эрмитионов есть m и найдена соответствующая форма $\Phi(x, y, z)$ (§ 6), так что число различных эквивалентных L_i с условием $L_i^2 = -m$ будет $N_3 > c_{11} h(-m)$.

Пусть сперва $m \equiv 1 \pmod 4$. Тогда согласно сказанному в §§ 7 и 10 работы (2) каждый из переходов $L_i \to L_j$ управляется собственно-примитивными формами.

Рассмотрим таблицу в § 16 работы (2).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Векторы} & \text{Индексы} \\ L & 0, a_1, \ldots, a_{N_3-1}; \\ L_1 & 0-a_1,\ a_1-a_1, \ldots, a_{N_3-1}-a_1, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots \\ L_{N_3-1} & 0-a_{N_3-1}, \ldots, a_{N_3-1}-a_{N_3-1}. \end{array}\right\} \qquad (15)$$

Выберем степень s с условием

$$l_0 = p^s \leqslant m^{\frac{1}{8}}, \quad p^{s+1} > m^{\frac{1}{8}} c'_{10}.$$

Имеем $N_3 > c_{11} h(-m) > \frac{4h(-m)}{t}$ при фиксированном целом $t \mid \frac{s}{2}$. Пусть $p_1 = p^{\frac{s}{2t}}$.

Положим $l_1 = p_1 l_0$, $l_2 = p_1 l_1, \ldots, l_t = p_1 l_{t-1}$, $l_{-1} = 1$. Предположим, что количество всех вообще примитивных $L^{(i)}$ с условием $L^{(i)2} = -m$, для которых имеют место равенства

$$b + L^{(i)} = \mathscr{P}_i X_i,$$

где $\operatorname{Norm} \mathscr{P}_i = l_j l_k^{-1}$, $j > k$, j и k равны одному из чисел $-1, 0, 1, \ldots, t$, меньше $\frac{h(-m)}{2t}$.

Обозначим $c_1, c_2, \ldots, c_t$ индексы бинарных форм детерминанта $-m$ с первыми коэффициентами $l_1, \ldots, l_t$ и составим таблицу [§ 16 (²)]

$$\left.\begin{array}{l} 0,\ a_1,\ \ldots,\ a_{N_3-1}, \\ 0+c_1,\ \ldots,\ a_{N_3-1}+c_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0+c_t,\ \ldots,\ a_{N_3-1}+c_t. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Количество различных индексов в этой таблице будет

$$> N_3 t - \frac{h(-m)}{2t} t = N_3 t - \frac{h(-m)}{2}.$$

В самом деле, из $a_j + c_u = a_i + c_t$ вытекает $c_u - c_t = a_i - a_j$, а таких равенств по принципам § 16 работы (²) может быть не более $\frac{h(-m)}{2t} t = \frac{h(-m)}{2t}$, ибо каждая форма может повторяться не более t раз.

Отсюда имеем $N_3 t - \frac{h(-m)}{2} < h(-m), N_3 < \frac{3h(-m)}{2t}$, что невозможно, ибо $N_3 > \frac{4h(-m)}{t}$.

Поэтому хотя бы для одной из наших бинарных форм с коэффициентом $l_j l_k^{-1}$ будет наверно больше, чем $\frac{h(-m)}{2t(t+1)^2}$ равенств вида

$$b + L_i = \mathscr{P}_i X_i, \ \text{Norm}\ \mathscr{P}_i = l_j l_k^{-1}, \qquad j < k, \qquad (17)$$

а это и есть утверждение 1° § 6, причем ρ равно одному из чисел $\frac{k}{8t}$, $0 < k < 2t$, k — целое.

Мы предполагали, что $m \equiv 1 \pmod 4$. Если это не так, т. е. $m \equiv -1 \pmod 4$, то вместо собственно примитивных форм переходами $L_i \to L_j$ управляют несобственно примитивные. В этом случае аналогичными рассуждениями придем к равенству типа

$$2b + 2L_i = \mathscr{P}_i X_i, \quad \text{Norm}\ \mathscr{P}_i = p^s = c_{12} m^{\rho}.$$

Отсюда заключаем, что $X_i = 2X_i'$ и по сокращении на 2 приходим к равенствам типа (17).

§ 10

Обратимся к пункту 2° § 6. Пусть $\mathfrak{A}_\Phi$ — наша алгебра; будем рассматривать в ней целые эрмитионы. Пусть A — эрмитион нормы rs, где r и s — целые числа; тогда либо $A = RS$, Norm $R = r$, либо это не имеет места, но согласно §§ 7 и 8 работы (⁵) существуют эрмитионы T, норма которых есть любое достаточно большое число при условии $TA = R'C$, где R' — любой фиксированный эрмитион нормы r.

Пусть p — простое, не делящее детерминанта $\Phi(x, y, z)\ \Omega_1$. Рассмотрим все примитивные эрмитионы $\xi + xi_1 + yi_2 + zi_3$, несравнимые (mod p)

и норма которых делится на p, но не делится на p^2. Пусть это будут

$$A_1, A_2, \ldots, A_l; \tag{18}$$

при этом $l = (p+1)(p^2-1)$.

Пусть R — фиксированный эрмитион нормы r. Тогда по каждому A_i можно подобрать T_i такое, что $T_i A_i = RA_i'$. Для некоторых A_i можно взять T_i одинаковыми. Количество таких A_i будет для данного T равно p^2-1. Так все эрмитионы (18) распределяются на $p+1$ систем с представителями

$$B_1, B_2, \ldots, B_{p+1}. \tag{19}$$

Пользуясь §§ 7 и 8 ([5]), можем доказать, что каждый из представителей (19) может быть выбран так, что его норма $< c_{15}p$, где c_{15} зависит только от Ω_1.

Такие же рассуждения годны для случая степени простого числа $r = p^s$, причем получаем $q = p^s\left(1+\frac{1}{p}\right)$ представителей

$$B_1, \ldots, B_q. \tag{20}$$

Применяя к ним в случае нужды пермутацию Венкова справа, можно считать, что нормы всех их одинаковы и равны $p^{s+\mu}$, $p^\mu = c_{16} = c_{16}(\Omega_1)$.

Рассмотрим теперь эрмитионы нормы $\mathscr{P}_i$ при большом u и подсчитаем, сколько из них не распадается по формуле $\mathscr{P}_i = A\Pi'' B$, где Π'' — эрмитион нормы p^t из § 6. Принимая в расчет представители (20) нормы $p^{s+\mu}$, где s меняется от 0 до u, мы найдем, что число их $n < c_{17}p^u\left(1-\frac{1}{p^{t+\mu}}\right)^u$. Если $p^u = c_{17}m^\rho$, то $n < c_{17}m^{\rho-\eta}$, $\eta = \eta(\Omega, p, \mu, t) = \eta(\Omega) > 0$ фиксированное число, что и требовалось доказать.

§ 11

Укажем путь, каким надлежит пользоваться, если для формы $f(x, y, z)$ нет простого числа p при условии $\left(\frac{f}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$. Если проследить сущность всех предыдущих рассуждений, то заметим, что для доказательства равенства в эрмитионах типа $b + L = \Pi X$, Norm $\Pi = p^t$ рассматриваются равенства вида $b' + L_i = P_i Y$, доказывается, что хотя один из эрмитионов расщепляется по формуле $\mathscr{P}_i = A\Pi B$ и затем используется тождество $b' + A^{-1}L_i A = \Pi BA$, если $b' + L = A\Pi B$.

Можно показать, что решение проблемы представлением чисел для форм самого общего вида $f(x, y, z)$ сводится к доказательству равенства типа $L = \alpha S + \Pi X$, где L, Π и S — вектор и эрмитион подходящей алгебры, подобранные подходящим образом. Рассматривая вспомогательные равенства $L_i = \alpha S + \mathscr{P}_i X_i$, возможно, повидимому, установить, что хотя бы один из $\mathscr{P}_i$ распадается по формуле $\mathscr{P}_i = A\Pi B$, но здесь уже $A^{-1}L_i A$ не обязан быть целым эрмитионом.

Пусть Norm $A\Pi = p^k$; введем пять целочисленных параметров λ, μ, ν, ρ, η и постараемся дать им такие значения, что $\lambda \not\equiv 0 \pmod p$ и $\lambda B + \mu \bar{\Pi} \bar{A} + \nu \bar{\Pi} \bar{A} S + \rho + \eta S = 0$. Полагая тогда $\lambda B + \mu \bar{\Pi} \bar{A} + \bar{\Pi} \bar{A} \bar{S} = T$, из равенства $L = \alpha S + A \Pi B$ получим $\lambda L' = \beta S + \Pi C$ при подходящих β и C; $L' = TLT^{-1}$—целый вектор. Отсюда, в силу $\lambda \not\equiv 0\ (p)$ легко выведем нужное нам равенство $L = \beta' S + \Pi C'$.

Такова схема этих рассуждений. Однако детальное проведение их чрезвычайно затрудняется присутствием неглавных правых и левых идеалов соответствующей алгебры.

Ленинградский гос. университет

Поступило
26. V. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Venkov B., Sur l'arithmétique des quaternion, Изв. Ак. Наук, VI серия, XVI (1922), 205—246.

[2] Linnik U. V., On certain results relating to positive ternary quadratic forms, Матем. сб., 5 (47) : 3, (1939), 453—470.

[3] Landau E., Über einige neuere Fortschritte der additiven Zahlentheorie (Anhang der Siegelsche Satz), Cambridge, 1935.

[4] Венков Б. А., Über die Klassenanzahl positiver binärer quadratischen Formen, Mathem. Zeitschr., B. 33 (1931), 350—374.

[5] Линник Ю. В., Одна общая теорема о представлении чисел отдельными тернарными квадратичными формами, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем. (1939), № 1, 87—108.

U. LINNIK. ÜBER DIE DARSTELLUNG GANZER ZAHLEN DURCH POSITIVE TERNÄRE QUADRATISCHE FORMEN

ZUSAMMENFASSUNG

Im ersten Teil dieses Artikels beweise ich den folgenden Satz:

Es sei $f(x, y, z)$ eine positive ternäre quadratische Form von den Invarianten $[p, 1]$ und mit den geschlechtlichen Kongruenzbedingungen $\left(\frac{-f}{p}\right) = +1$. Dann gibt es eine Konstante m_0 von der folgenden Eigenschaft: jede ganze Zahl $m > m_0$, die nicht durch p teilbar ist, und der geschlechtlichen Kongruenzbedingungen der Form f genügt, ist durch f primitiv darstellbar und für die Anzahl der Darstellungen gibt es die folgende Abschätzung:

$$r(f; m) > c_1 \frac{h(-m)}{\ln \ln m \cdot \ln (\ln \ln m)}.$$

Im zweiten Teil werden die allgemeinere Formen untersucht und der folgende Satz bewiesen:

Es sei Ω eine ungerade Zahl; $\mathfrak{G}$ das Geshlecht der Formen von den Invarianten $[\Omega, 1]$ und mit der Eigenschaft, dass nicht für alle Prim-

zahlen $p|\Omega$ *die Bedingung* $\left(\frac{\mathfrak{G}}{p}\right)=(-1)^{\frac{p+1}{2}}$ *erfüllt ist. Dann gibt es eine Konstante* m_0 *von der folgenden Eigenschaft: jede Zahl* $m > m_0$, *die zu* 2Ω *prim ist und den geschlechtlichen Kongruenzbedingungen von* $\mathfrak{G}$ *genügt, ist durch jede Form von* $\mathfrak{G}$ *primitiv darstellbar.*

Gegen das Ende des Artikels zeige ich, dass man die beschriebene Methoden auch auf die allgemeine Form

$$f\ (x,\ y,\ z)=ax^2+by^2+cz^2+2exy+2gxz+2hyz$$

anwenden kann, aber die zugehörigen Entwicklungen sind ungemein kompliziert.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 403—410 Série mathématique

В. Я. АРСЕНИН

ПРИРОДА ПРОЕКЦИЙ НЕКОТОРЫХ B-МНОЖЕСТВ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе показано, что при непрерывных отображениях B-множеств множества тех точек, прообразы которых суть F_σ, являются CA-множествами.

Целью настоящей статьи является установление некоторых новых случаев, когда проекция на ось OX плоских B-множеств есть B-множество. Именно: *если плоское B-множество пересекается всеми параллелями к оси OY по множествам типа F_σ, то его проекция на OX есть B-множество.*

Работа эта выполнена под руководством П. С. Новикова, которому выражаю глубокую благодарность. Краткое сообщение о ней дано в Докладах Академии Наук СССР.

Обозначим через F совокупность всех точек плоского множества E, расположенных на прямых $x = \text{const}$, пересекающих множество E по замкнутым множествам. П. С. Новиков показал ([1]), что множество F и его ортогональная проекция $\Pi_x F$ на ось OX суть CA-множества, когда E есть произвольное B-множество. Из этой теоремы следует, что если плоское B-множество E пересекается со всеми прямыми $x = \text{const}$ по замкнутым множествам, то его ортогональная проекция на ось OX есть B-множество.

Естественно возникает следующий вопрос ([2]). Обозначим через P совокупность всех точек плоского B-множества E, расположенных на прямых $x = \text{const}$, пересекающих множество E по множествам типа F_σ. Спрашивается, какова природа множества P и его проекции на ось OX?

Kunugui показал ([2]), что P есть CA-множество, но не решил полностью вопроса о природе проекции этого множества на ось OX, показав лишь, что эта проекция будет CA-множество в том случае, если E есть B-множество весьма специального типа.

В настоящей работе доказывается

ТЕОРЕМА. *Пусть E есть произвольное B-множество и H множество всех точек x_0 таких, что пересечение множества E с прямой $x = x_0$ есть непустое множество типа F_σ. Тогда H есть CA-множество.*

Предварительно должна быть доказана следующая

ЛЕММА. *Пусть M есть множество типа F_σ, расположенное на оси OX. Пусть, далее, V есть плоское элементарное G_δ, проекция*

которого на ось OX совпадает с множеством M. Тогда среди прямоугольников, определяющих множество V, найдется такой прямоугольник, что замыкание проекции на ось OX части множества V, содержащейся в этом прямоугольнике, принадлежит множеству M.

В случае, когда хотя бы одно из упомянутых замыканий содержит изолированные точки, лемма очевидна. Поэтому рассмотрим случай, когда все замыкания суть совершенные множества.

Будем называть замыканиями 1-го ранга и обозначать через K_{n_1} замыкания, соответствующие прямоугольникам 1-го ранга. Если определены замыкания k-го ранга (k — произвольное фиксированное натуральное число), то замыканиями $k+1$-го ранга, подчиненными одному и тому же замыканию k-го ранга, будем называть замыкания, соответствующие прямоугольникам $k+1$-го ранга, содержащимся в соответствующем прямоугольнике k-го ранга. Будем обозначать их через $K_{n_1 \ldots n_k n_{k+1}}$. Заметим, что сумма замыканий $k+1$-го ранга, подчиненных одному и тому же замыканию k-го ранга, всюду плотна на последнем. Обозначим через $H_{n_1 \ldots n_k}$ часть множества $K_{n_1 \ldots n_k}$, принадлежащую множеству M, это есть множество типа F_σ. Среди множеств $H_{n_1 \ldots n_k}$ найдутся такие, которые будут 2-й категории на соответствующих им замыканиях $K_{n_1 \ldots n_k}$. Допустим противное, т. е. что все множества $H_{n_1 \ldots n_k}$ суть 1-й категории на соответствующих им множествах $K_{n_1 \ldots n_k}$.

Рассмотрим решето C, элементами которого являются дополнения к множествам $H_{n_1 \ldots n_k}$, относительно соответствующих им множеств $K_{n_1 \ldots n_k}$*, перемещенные параллельно оси OY на верхние стороны соответствующих им прямоугольников. Обозначим через C' решето, определяющее множество M, элементами которого являются верхние стороны прямоугольников, определяющих множество V. Обозначим через C'' решето, получающееся из решета C', если из него выбросить все точки, проектирующиеся на ось OX в точки множества M. Тогда A-множество, определяемое решетом C'', пусто ([3]). Так как решето C является частью решета C'', то A-множество, определяемое решетом C, также пусто.

С другой стороны, покажем, что при сделанном предположении A-множество, определяемое решетом C, не пусто.

На оси OX возьмем интервал Δ, содержащий замыкания 1-го ранга. Отметим одно из этих замыканий K_{n_1}. Ему соответствует содержащееся в нем множество H_{n_1} типа F_σ,

$$H_{n_1} = F_{n_1}^1 + F_{n_1}^2 + F_{n_1}^3 + \ldots,$$

где $F_{n_1}^i$ — замкнутые множества ($i = 1, 2, \ldots$). Согласно предположению H_{n_1} 1-й категории на множестве K_{n_1}. Следовательно внутри Δ найдется интервал Δ_1, содержащий точки множества K_{n_1} и не содержащий точек множества $F_{n_1}^1$ и $\sup K_{n_1}$ и $\inf K_{n_1}$. В Δ_1 попадут замыкания 2-го ранга, подчиненные множеству K_{n_1}. Отметим одно из них $K_{n_1 n_2}$.

* Из элементов решета C выбросим также верхние и нижние грани соответствующих им замыканий $K_{n_1 \ldots n_k}$.

Пусть

$$H_{n_1n_2} = F^1_{n_1n_2} + F^2_{n_1n_2} + \ldots,$$

где $F^i_{n_1n_2}$ — замкнутые множества ($i = 1, 2, \ldots$), есть соответствующее ему и содержащееся в нем множество типа F_σ. Согласно предположению $H_{n_1n_2}$ 1-й категории на множестве $K_{n_1n_2}$. Множество H_{n_1} также 1-й категории на множестве $K_{n_1n_2}$, так как пересечение множеств H_{n_1} и $K_{n_1n_2}$ совпадает с множеством $H_{n_1n_2}$, $H_{n_1n_2} \subset H_{n_1}$. Следовательно внутри Δ_1 найдется интервал Δ_2, содержащий точки множества $K_{n_1n_2}$ и не содержащий точек множества $F^2_{n_1} + F^1_{n_1n_2}$ и точек $\sup K_{n_1n_2}$ и $\inf K_{n_1n_2}$ и т. д.

Предположим, что мы определили множества $H_{n_1} \supset H_{n_1n_2} \supset \ldots \ldots \supset H_{n_1\ldots n_k}$ и соответствующие им множества $K_{n_1} \supset K_{n_1n_2} \supset \ldots \supset K_{n_1\ldots n_k}$ и интервалы $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_k$ такие, что

$$H_{n_1} \subset K_{n_1}, \ldots, H_{n_1\ldots n_k} \subset K_{n_1\ldots n_k},$$
$$\Delta_i \cdot K_{n_1\ldots n_i} \neq 0, \quad \Delta_i \cdot \sum_{m+j=i+1} F^m_{n_1\ldots n_j} = 0$$

(сумма берется по всем m и j таким, что $m+j=i+1$, где i — постоянное)

$$\sup K_{n_1\ldots n_i} \text{ и } \inf K_{n_1\ldots n_i} \not\subset \Delta_i \quad (i = 1, 2, \ldots).$$

Тогда в интервал Δ_k попадут замыкания $k+1$-го ранга, подчиненные множеству $K_{n_1\ldots n_k}$. Отметим одно из них $K_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$. Пусть

$$H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} = \sum_i F^i_{n_1\ldots n_k n_{k+1}},$$

где $F^i_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$ — замкнутые множества ($i = 1, 2, \ldots$), есть соответствующее ему и содержащееся в нем множество типа F_σ. Согласно предположению $H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$ 1-й категории на множестве $K_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$, равно как и множества $H_{n_1}, H_{n_1n_2}, \ldots, H_{n_1\ldots n_k}$ (ибо $H_{n_1\ldots n_i} \cdot K_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} = H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$, $i \leqslant k$); $H_{n_1\ldots n_k n_{k+1}} \subset H_{n_1\ldots n_k}$. Следовательно внутри Δ_k найдется интервал Δ_{k+1}, содержащий точки множества $K_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$ и не содержащий точек множества $\sum\limits_{m+j=k+2} F^m_{n_1\ldots n_j}$ (сумма берется по всем m и j таким, что $m+j=k+2$) и точек $\sup K_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$ и $\inf K_{n_1\ldots n_k n_{k+1}}$. Таким образом мы определим последовательность интервалов $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \ldots \supset \Delta_k \supset \ldots$ и системы множеств

$$K_{n_1} \supset K_{n_1n_2} \supset \ldots \supset K_{n_1\ldots n_k} \supset \ldots$$
$$H_{n_1} \supset H_{n_1n_2} \supset \ldots \supset H_{n_1\ldots n_k} \supset \ldots$$

таких, что

$$\Delta_k \cdot K_{n_1\ldots n_k} \neq 0 \quad \text{и} \quad H_{n_1\ldots n_k} \subset K_{n_1\ldots n_k}.$$

Из приведенной конструкции видно, что $\prod\limits_{k=1}^{\infty} H_{n_1\ldots n_k} = 0$, а

$\prod\limits_{k=1}^{\infty} K_{n_1 \dots n_k} \cdot \Delta_k$ не пусто и содержит точку x_0. Точка x_0 будет общей для множеств

$$CH_{n_1 \dots n_k} \cdot K_{n_1 \dots n_k} - \{\sup K_{n_1 \dots n_k}, \inf K_{n_1 \dots n_k}\} \quad (k = 1, 2, \dots)$$
$$(CH_{n_1 \dots n_k} \cdot K_{n_1 \dots n_k} \supset CH_{n_1 \dots n_k n_{k+1}} \cdot K_{n_1 \dots n_k n_{k+1}}).$$

Следовательно пересечение прямой $x = x_0$ с решетом C содержит падающую последовательность точек, что означает, что A-множество, определяемое решетом C, содержит точку x_0, т. е. не пусто. Действительно, рассмотрим те прямоугольники, определяющие множество V, которым соответствуют выбранные нами множества $H_{n_1 \dots n_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$. Так как множества $H_{n_1 \dots n_k}$ подчинены друг другу в порядке возрастания их рангов, то рассматриваемые прямоугольники будут вложены друг в друга также в порядке возрастания их рангов; поскольку, далее, множества $K_{n_1 \dots n_k}$ $(k = 1, 2, \dots)$ имеют общую точку x_0, то отмеченные прямоугольники будут также иметь общую точку, расположенную на прямой $x = x_0$ (см. определение множеств $K_{n_1 \dots n_k}$). Так как вместе с этим точка x_0 принадлежит множествам $CH_{n_1 \dots n_k} \cdot K_{n_1 \dots n_k}$, то, по самому определению решета C, пересечение прямой $x = x_0$ с решетом C содержит падающую последовательность точек.

Значит среди множеств $H_{n_1 \dots n_k}$ найдутся такие, которые будут 2-й категории на соответствующих им множествах $K_{n_1 \dots n_k}$. А тогда найдется прямоугольник с указанным в лемме свойством. Действительно, пусть

$$H_{n_1 \dots n_i} = \sum_j F^j_{n_1 \dots n_i}$$

(где сумма берется по j) 2-й категории на множестве $K_{n_1 \dots n_i}$. Тогда найдется такое замкнутое множество $F^j_{n_1 \dots n_i}$, которое будет содержать в себе целую порцию длины ε множества $K_{n_1 \dots n_i}$. Следовательно любой прямоугольник, содержащийся внутри прямоугольника, соответствующего замыканию $K_{n_1 \dots n_i}$ и попавший в вертикальную полосу ширины ε, содержащую отмеченную порцию, будет обладать указанным в лемме свойством. Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Известно, что плоское B-множество E есть ортогональная проекция на плоскость XOY униформного относительно этой плоскости пространственного элементарного G_δ. Обозначим это G_δ через T.

Занумеруем в каком-нибудь порядке все параллелепипеды, определяющие множество T. Обозначим через E_n проекцию на плоскость XOY части множества T, заключенной в параллелепипеде номера n. Тогда множество E представится в виде суммы

$$E = \sum_{n=1}^{\infty} E_n.$$

Обозначим через $E_n^{(y)}$ множество, получающееся из множества E_n путем замыкания его в направлении оси OY.

$E_n^{(y)}$ есть A-множество (4). Дальше доказательство проходит совершенно аналогично доказательству П. С. Новикова (1). Будем считать, что множество E расположено в единичном квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Пусть I_{ki} замкнутая полоса единичного квадрата такая, что $\frac{i-1}{k} \leqslant \leqslant y \leqslant \frac{i}{k}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Пусть $Q_{ki}^{(n)}$ есть проекция множества $E_n^{(y)} \cdot I_{ki}$ на прямую $y = \frac{i-1}{k}$, а $\mathscr{E}_{ki}^{(n)}$ — гребенка, образованная всеми точками полосы I_{ki}, проектирующимися в точки множества $Q_{ki}^{(n)}$.

Пусть $\mathscr{E}_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} \mathscr{E}_{ki}^{(n)}$; $\mathscr{E}_k^{(n)} \supset E_n^{(y)}$; $\mathscr{E}_{ki}^{(n)}$ и $\mathscr{E}_k^{(n)}$ суть A-множества и

$$E_n^{(y)} = \prod_{k=1}^{\infty} \mathscr{E}_k^{(n)}.$$

Рассмотрим множества $\mathscr{E}_k^{(n)} - E_n^{(y)}$. Согласно теореме отделимости, доказанной П. С. Новиковым (5), существует счетная система CA-множеств $R_1^{(n)}, R_2^{(n)}, \ldots, R_k^{(n)}, \ldots$ таких, что $R_k^{(n)} \supset \mathscr{E}_k^{(n)} - E_n^{(y)}$ и $\prod_{k=1}^{\infty} R_k^{(n)} = 0$.

Обозначим, далее, через $U_{ki}^{(n)}$ множество всех точек полосы I_{ki}, которая проектируется на ось OX в дополнение к проекции на ось OX множества $I_{ki} - (R_k^{(n)} + P)$. Очевидно, что все $U_{ki}^{(n)}$ суть CA-множества. Действительно, проекция на ось OX дополнения к множеству $U_{ki}^{(n)}$ относительно I_{ki} совпадает с проекцией на эту ось дополнения к множеству $R_k^{(n)} + P$ относительно I_{ki}, т. е. есть A-множество. Следовательно гребенка, построенная на множестве $C\Pi_x (CU_{ki}^{(n)} \cdot I_{ki})$, есть CA-множество; $U_{ki}^{(n)}$ есть пересечение этой гребенки с множеством I_{ki}, т. е. CA-множество. Следовательно и $U_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k} U_{ki}^{(n)}$ суть CA-множества. Поскольку $U_k^{(n)} \subset R_k^{(n)} + P$, то

$$U^{(n)} = \prod_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)} \subset \prod_{k=1}^{\infty} (R_k^{(n)} + P) = P,$$

$U^{(n)}$ есть CA-множество.

Обозначим через P_n совокупность точек множества $E_n^{(y)}$, лежащих на прямых $x = \text{const}$, пересекающих это множество по замкнутым множествам, *принадлежащим множеству* P; $P_n \subset U_k^{(n)}$. Действительно, пусть точка $(x_0, y_0) \subset P_n$. Пусть эта точка расположена в полосе I_{ki_0}. Тогда часть прямой $x = x_0$, расположенная в полосе I_{ki_0} (обозначим этот сегмент через δ_{ki_0}), будет содержаться во множестве $\mathscr{E}_{ki_0}^{(n)} \subset \mathscr{E}_k^{(n)}$.

Общая часть множеств $\mathscr{E}_k^{(n)} - E_n^{(y)}$ и δ_{ki_0} получится из сегмента δ_{ki_0} удалением множества $P_n \cdot \delta_{ki_0}$. Но так как $P_n \subset P$ и $R_k^{(n)} \supset \mathscr{E}_k^{(n)} - E_n^{(y)}$, то множество $R_k^{(n)} + P$ будет содержать сегмент δ_{ki_0}, ибо ему возвращено все, что до того из него было удалено. Таким образом, этот сегмент (вместе с точкой (x_0, y_0)) будет принадлежать множеству $U_k^{(n)}$. Следовательно $P_n \subset U_k^{(n)}$.

Согласно доказанной выше лемме для всякой прямой $x = \text{const}$, пересекающей множество P, найдется такое множество $E_n^{(y)}$, пересечение которого с этой прямой принадлежит множеству P. Поэтому

$$H = \Pi_x P = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_x P_n .$$

Но так как $P_n \subset U^{(n)} \subset P$, то

$$H = \Pi_x P = \sum_{n=1}^{\infty} \Pi_x U^{(n)},$$

проекция же на ось OX множества $U^{(n)}$ есть CA-множество [1]. Действительно, $U^{(n)} = \prod_{k=1}^{\infty} U_k^{(n)}$. Каждое из CA-множеств $U_k^{(n)}$ пересекается с прямыми, параллельными оси OY по конечному числу отрезков. Докажем, что проекция на ось OX множества $U_k^{(n)}$ есть CA-множество. Для этого возьмем на отрезке $[0,1]$ оси OY всюду плотное на нем счетное множество точек и проведем через каждую из них параллель оси OX. Эти параллели пересекаются с $U_k^{(n)}$ по CA-множествам. $\Pi_x U_k^{(n)}$ равна сумме проекций на ось OX этих пересечений, т. е. есть CA-множество. Так как множества $U_k^{(n)}$ вложены друг в друга и с параллелями оси OY пересекаются по конечному числу отрезков, то проекция на ось OX их пересечения равна пересечению проекций этих множеств. Следовательно $\Pi_x U^{(n)}$ есть CA-множество. А тогда и H есть CA-множество. Теорема доказана.

Следствие. *Ортогональная проекция на ось OX плоского B-множества E, пересекающегося с прямыми $x = \text{const}$ по множествам типа F_σ, есть B-множество.*

Дальнейшие обобщения этой теоремы в этом направлении невозможны, так как известно, что если плоское B-множество пересекается с прямыми $x = \text{const}$ по множествам типа G_δ, то его ортогональная проекция на ось OX есть, вообще говоря, A-множество, неявляющееся CA-множеством, т. е. не B-множество.

Из доказанной теоремы немедленно следует ряд утверждений, доказанных ранее другими методами:

I. Пусть E есть плоское B-множество и D_1 множество всех точек x оси OX таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают E в одной только точке. Тогда D_1 есть CA-множество (Н. Н. Лузин).

II. Пусть E есть плоское B-множество и D_2 совокупность всех точек x оси OX таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают множество E по счетным или конечным множествам. Тогда D_2 есть CA-множество (S. Braun).

III. Пусть E есть плоское B-множество и D_3 совокупность точек x оси OX таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают множество E по непустым замкнутым множествам. Тогда D_3 есть CA-множество (П. С. Новиков).

Доказательство утверждений I, II и III. Известно, что множества $E - D_1 \times OY$ (Н. Н. Лузин), $E - D_2 \times OY$ (Серпинский) и $E - D_3 \times OY$ (П. С. Новиков) суть A-множества. Поэтому

$$D_i = \Pi_x P - \Pi_x (E - D_i \times OY)$$

является CA-множеством.

IV. Пусть E есть плоское множество типа $G_{\delta\sigma}$ и $F_{\sigma\delta}$ и R — совокупность точек x оси OX таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают множество E по непустым множествам типа F_σ. Тогда R есть CA-множество (Kunugui).

V. Будем обозначать через F_B B-множества, расположенные на оси OX, и через G открытые множества, расположенные на оси OY. Пусть E есть плоское множество типа $(F_B \times G)_{\sigma\delta\sigma}$ и $(F_B \times G)_{\sigma\delta\sigma\delta}$* одновременно и M совокупность точек x оси OX таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают множество E по непустым множествам типа F_σ. Тогда M есть CA-множество (Kunugui) ([6]).

VI. Ортогональная проекция на ось OX плоского B-множества E униформного относительно оси OY есть B-множество (Н. Н. Лузин).

VII. Ортогональная проекция на ось OX плоского B-множества E, которое с прямыми $x = \text{const}$ пересекается по счетным или конечным множествам, есть B-множество (П. С. Новиков).

VIII. Ортогональная проекция на ось OX плоского B-множества E, которое с прямыми $x = \text{const}$ пересекается по замкнутым множествам, есть B-множество (П. С. Новиков).

IX. Ортогональная проекция на ось OX плоского множества E типа $F_{\sigma\delta}$ и $G_{\delta\sigma}$, которое с прямыми $x = \text{const}$ пересекается по множествам типа F_σ, есть B-множество (Kunugui).

Утверждения IV — IX следуют из нашей теоремы или из I — III непосредственно.

X. Пусть E есть плоское B-множество и D_4 множество точек x оси OX таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают E по множествам первого класса (F_σ и G_δ одновременно). Тогда D_4 есть CA-множество.

---

* Множества $(F_B \times G)_{\sigma\delta\sigma\delta}$ суть множества, дополнительные к множествам типа $(F_B \times G)_{\sigma\delta\sigma}$.

Доказательство. Обозначим соответственно через H_1 и H_2 множества точек x таких, что параллели к оси OY, проходящие через точки x, пересекают E и соответственно CE по множествам типа F_σ. По доказанному H_1 и H_2 суть CA-множества. Однако

$$D_4 = H_1 \cdot (H_2 + C\Pi_x CE).$$

Таким образом D_4 также есть CA-множество.

Педагогический институт
им. К. Либкнехта
Москва

Поступило
14.IV.1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Новиков П. С., О проекциях некоторых B-множеств, Докл. Ак. Наук СССР, XXIII, № 9, (1939), 863—864.

[2] Kunugui K., Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analitiques, I, Journ. of the faculty of sci. Hokkaido Imper. University, serie I, Mathematics, VII, № 3—4, (1939), 187—189.

[3] Lusin N., Leçons sur les ensembles analitiques et leurs appliquations, 1930, Paris, pp. 193—194.

[4] Новиков П. С., К теории релятивного континуума, Докл. Ак. Наук СССР, III, № 1, (1934), 19.

[5] Новиков П. С., Обобщение второго принципа отделимости, ibid., IV, № 1—2 (1934), 10.

[6] Kunugui K., Contribution à la théorie des ensembles boreliens et analitiques, II, Journ. of the faculty of sci. Hokkaido Imper. University, serie I, Mathematics, VIII, № 1, (1939), 1—25.

V. ARSENIN. SUR LA NATURE DES PROJECTIONS DE CERTAINS ENSEMBLES MESURABLES B

RÉSUMÉ

Nous démontrons dans le présent article le théorème suivant *:

Théorème. *Soit E un ensemble plan mesurable B et H l'ensemble de tous les points x de l'axe OX tels que la droite $x = x_0$ coupe E suivant des ensembles F_σ non vides. Alors H est un ensemble CA. En particulier, si chaque droite $x = x_0$ coupe E suivant un F_σ, alors la projection de E sur OX est mesurable B.*

Ce théorème présente la solution d'un problème posé par P. Novikoff.

Deux théorèmes de la même nature démontrés récemment par Kunugui sont des cas très particuliers du théorème énoncé, tandis que les résultats bien connus de N. Lusin, P. Novikoff et S. Braun peuvent être immediatement obtenus à partir du théorème en question.

---

* Nous avons énoncé ce théorème dans les C. R. URSS (Doklady).

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 411—416 Série mathématique

В. М. ДУБРОВСКИЙ

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе рассматривается задача определения вероятности того, что в какой-либо момент из данного промежутка времени состояние некоторой системы будет принадлежать множеству, изменяющемуся с течением времени и соответствующему данному моменту.

Мы будем рассматривать процесс изменения некоторой системы, обладающий тем свойством, что каждый ограниченный промежуток времени $t < s \leqslant \tau$, если в нем состояние системы не остается одним и тем же, распадается на конечное число интервалов

$$t_{i-1} < s \leqslant t_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1; \quad t_{n+1} = \tau),$$

в каждом из которых состояние неизменно, но отлично от состояний в соседних интервалах.

Относительно числа моментов $t_1, t_2, \ldots, t_n$, при которых система претерпевает изменение, мы допустим, что оно, будучи конечным, может быть сколь угодно большим.

Предположим, кроме того, что для любого t вероятность изменения состояния за промежуток времени $t \leqslant s < \tau$, если $\tau \to t$, пропорциональна разности $\tau - t$ с точностью до бесконечно малой более высокого порядка, причем коэффициент пропорциональности $p(t, x)$ зависит от начального момента t и состояния x, в котором система в этот момент находится.

Для такого рода процессов в этой работе дается общее решение одной задачи, решенной ранее лишь для некоторых частных случаев, и состоящей в определении вероятности $\omega(t, x, \tau)$ того, что система, находящаяся в момент t в состоянии x по крайней мере в один из моментов s интервала времени $t < s < \tau$ окажется в состоянии, принадлежащем множеству $e(s)$, где $e(s)$ обозначает зависящее от s подмножество множества A всех возможных состояний системы. При этом предполагаются известными коэффициент $p(t, x)$, а также функция $P(t, x, \mathcal{E})$, выражающая условную вероятность того, что система, находящаяся в момент t в состоянии x и претерпевающая в этот момент изменение, перейдет в результате последнего в какое-либо состояние из множества $\mathcal{E}$. В отличие от условий Феллера* функции $p(t, x)$ и $P(t, x, \mathcal{E})$ непре-

* W. Feller, Zur Theorie der stochastischen Prozesse, Mathem. Ann., 113, (1936), 113—160. Перевод этой статьи напечатан в Усп. матем. наук, т. 5 (1938).

рывными по t не предполагаются. Что касается множества A всех возможных состояний рассматриваемой системы, то о нем мы предположим лишь, что определено семейство $\mathfrak{M}$ его подмножеств, содержащее какие угодно разности и конечные или счетные суммы своих элементов, отдельные элементы A, все множество A и пустое множество.

Относительно этого семейства определяются рассматриваемые в последующем абстрактные интегралы, которые понимаются в смысле Лебега-Стильтьеса.

Переменные, выражающие моменты времени, мы будем считать изменяющимися в интервале $(-T, T)$, где T — некоторое положительное число, которое можно рассматривать либо как постоянное, либо как переменное, могущее принимать сколь угодно большие значения.

§ 1

Пусть вероятность $p(t, x, \tau)$ того, что система, находясь в момент t в состоянии x, изменит последнее до момента τ, и при том лишь один раз, определяется равенством

$$p(t, x, \tau) = p(t, x)(\tau - t) + \varepsilon(t, x, \tau), \tag{1}$$

где функция $p(t, x)$ определена для всех t и x, удовлетворяющих условиям $|t| < T$, $x \subset A$, неотрицательна, не превосходит постоянной $K(T)$, интегрируема в смысле Римана по t в интервале $|t| < T$ и измерима по x относительно $\mathfrak{M}$, а $\varepsilon(t, x, \tau)$, когда $\tau \to t+$, стремится к нулю и при том равномерно относительно t в промежутке $|t| < T$.

Пусть затем функция $P(t, x, \mathscr{E})$, имеющая указанный выше теоретико-вероятностный смысл и, следовательно, неотрицательная, вполне аддитивная и удовлетворяющая условию $P(t, x, A) = 1$, определена для любого $\mathscr{E}$, содержащегося в $\mathfrak{M}$, а по отношению к переменным t и x обладает теми же свойствами, что и функция $p(t, x)$.

Предположим теперь, что каждому моменту t из промежутка времени $|t| < T$ по определенному закону приведено в соответствие множество $e(t)$, содержащееся в A, и обозначим через $e(t, \tau)$ общую часть множеств $e(s)$, соответствующих всевозможным s, удовлетворяющим условию $t < s < \tau$.

Обозначим, кроме того, через $e^*(t)$ множество всех содержащихся в A элементов x, обладающих тем свойством, что сколь бы мало ни было положительное число ε, $x \subset A - e(s)$ по крайней мере для одного значения s, удовлетворяющего условию $t < s < t + \varepsilon$. Полагая $E(x, \mathscr{E})$ равным единице, если $x \subset \mathscr{E}$, и нулю в противном случае, допустим, что операция $e(t)$ такова, что при любом x, содержащемся в A, функция $E[x, e^*(t)]$ интегрируема в смысле Римана по t в интервале $|t| < T$, а функция $E[x, e(t, \tau)]$ обладает таким же свойством по отношению к каждой из переменных t и τ, и кроме того измерима по x относительно

семейства $\mathfrak{M}$ при любых t и τ, удовлетворяющих условию $-T < t < \tau < T$. Так как, очевидно, имеет место соотношение

$$1 - \lim_{\tau \to t+} E[x, e(t, \tau)] = E[x, e^*(t)],$$

то и функция $E[x, e^*(t)]$ измерима по x относительно $\mathfrak{M}$ (для каждого t из промежутка $|t| < T$).

Обозначим, наконец, через $\tau^*(t, x)$ верхнюю грань значений τ, обладающих тем свойством, что $x \subset e(s)$ для любого s, удовлетворяющего условию $t \leqslant s \leqslant \tau$, полагая при этом $\tau^*(t, x) = t$, если такие значения τ отсутствуют, и введем в рассмотрение функцию $P[t, x, e^*(t)]$, допуская, что она определена при каждом t из интервала $|t| < T$ и интегрируема в нем в смысле Римана при любом x из множества A. Относительно этих функций мы предположим, что они измеримы по x относительно семейства $\mathfrak{M}$ при любом t из промежутка $|t| < T$.

§ 2

Обозначим через $\pi_0(t, x, \tau)$ вероятность того, что рассматриваемая система будет пребывать в промежутке времени $t \leqslant s < \tau$ в неизменном состоянии x, в котором она находится в начальный момент t.

Нетрудно убедиться с помощью равенства (1), что при условии $0 \leqslant (\tau - t) < \frac{1}{L} < T$, где L — постоянная, превосходящая как верхнюю грань $|p(t, x)|$, так и верхнюю грань $|\varepsilon(t, x, \tau)|$, будет иметь место соотношение

$$1 - \pi_0(t, x, \tau) \leqslant p(t, x)(\tau - t) + \varepsilon(t, x, \tau)(\tau - t) + \\ + L^2(\tau - t)^2 [1 + L(\tau - t) + L^2(\tau - t)^2 + \ldots];$$

с другой стороны, легко видеть также, что справедливо тождество

$$\pi_0(t, x, \tau) = \pi_0(t, x, \tau + \Delta\tau) + \pi_0(t, x, \tau)[1 - \pi_0(\tau, x, \tau + \Delta\tau)],$$

откуда вытекает, что функция $\pi_0(t, x, \tau)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \pi_0(t, x, \tau)}{\partial \tau} = -p(\tau, x)\, \pi_0(t, x, \tau)$$

и следовательно определяется равенством

$$\pi_0(t, x, \tau) = e^{-\int\limits_t^\tau p(s, x)\, ds}. \tag{2}$$

Условимся говорить, что в момент t происходит событие C, если сколь бы мало ни было положительное число ε, в промежутке времени $t \leqslant s < t + \varepsilon$, найдутся моменты s, в которые состояние системы будет содержаться в множестве $A - e(s)$. Очевидно, что множество всех мо-

ментов s интервала $t \leqslant s < \tau$, при которых происходит событие C, если последние вообще существуют, имеет первый элемент, и что их существование является необходимым и достаточным условием того, чтобы в какой-либо момент s из этого интервала состояние системы принадлежало множеству $A - e(s)$.

Предполагая, что в момент t система находится в состоянии x, причем x содержится в $e(t)$, и обозначая через $\pi_1(t, x, \tau)$ вероятность того, что событие C произойдет впервые либо в момент первого изменения состояния, либо до него и при том в обоих случаях в промежутке времени $t \leqslant s < \tau$, легко видеть, что для этой вероятности имеют место соотношения

$$\pi_1(t, x, \tau) = \int_t^\tau \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, P[s, x, e^*(s)]\, ds, \tag{3}$$

если $\tau \leqslant \tau^*(t, x)$;

$$\pi_1^*(t, x, \tau) = \pi_0[t, x, \tau^*(t, x)] + \\ + \int_t^{\tau^*(t, x)} \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, P[s, x, e^*(s)]\, ds, \tag{3'}$$

если $\tau > \tau^*(t, x)$.

Последние две формулы, как нетрудно убедиться, можно объединить в одну следующую:

$$\pi_1(t, x, \tau) = \{1 - E[x, e(t, \tau)]\}\, \pi_0[t, x, \tau^*(t, x)] + \\ + \int_t^\tau \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, P[s, x, e^*(s)]\, E[x, e(t, s)]\, ds, \tag{4}$$

откуда вытекает, что функция $\pi_1(t, x, \tau)$ измерима по x относительно $\mathfrak{M}$ и интегрируема в смысле Римана в интервале $(-T, T)$ как по t, так и по τ.

Аналогично, для вероятности $\pi_2(t, x, \tau)$ того, что событие C произойдет в промежутке времени $t \leqslant s < \tau$ и при том произойдет впервые в момент второго изменения состояния или в промежутке времени после первого изменения и до второго, как нетрудно убедиться, имеет место равенство

$$\pi_2(t, x, \tau) = \int_t^{\tau^*(t, x, \tau)} \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, ds \int_{A - e^*(s)} P(s, x, dA_y)\, \pi_1(s, y, \tau), \tag{5}$$

где $\tau^*(t, x, \tau)$ означает то из чисел τ и $\tau^*(t, x)$, которое не превосходит другое.

Формулу (5) можно, очевидно, представить также в виде

$$\pi_2(t, x, \tau) = \int_t^{\tau} \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, ds\, E[x, e(t, s)] \times$$
$$\times \int_A P(s, x, dA_y)\, \pi_1(s, y, \tau)\, E[y, A - e^*(s)], \tag{6}$$

откуда, как легко видеть, вытекает, во-первых, существование абстрактного интеграла, входящего в формулу (5), и интегрируемость его в смысле Римана по параметру s, а во-вторых, что функция $\pi_2(t, x, \tau)$ обладает в отношении измеримости и интегрируемости теми же свойствами, что и функция $\pi_1(t, x, \tau)$.

Обозначая вообще через $\pi_n(t, x, \tau)$ вероятность того, что событие C произойдет до момента τ, и притом произойдет впервые в момент n-ого изменения состояния системы или до него, но после $n-1$-ого изменения состояния, нетрудно убедиться, что функции $\pi_n(t, x, \tau)$ и $\pi_{n-1}(t, x, \tau)$ связаны следующим, позволяющим определить всех их последовательно, рекуррентным соотношением:

$$\pi_n(t, x, \tau) = \int_t^{\tau^*(t, x, \tau)} \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, ds \int_{A - e^*(s)} P(s, x, dA_y)\, \pi_{n-1}(s, y, \tau). \tag{7}$$

Последнее, очевидно, эквивалентно формуле

$$\pi_n(t, x, \tau) = \int_t^{\tau} \pi_0(t, x, s)\, p(s, x)\, E[x, e(t, s)]\, ds \times$$
$$\times \int_A P(s, x, dA_y)\, \pi_{n-1}(s, y, \tau)\, E[y, A - e^*(s)], \tag{8}$$

откуда видно, что все функции $\pi_n(t, x, \tau)$, как и функции $\pi_1(t, x, \tau)$ и $\pi_2(t, x, \tau)$, интегрируемы в смысле Римана в интервале $(-T, T)$ по каждой из переменных t и τ при любом x из множества A, и измеримы по x относительно $\mathfrak{M}$ при любых фиксированных значениях t и τ, удовлетворяющих условию $-T < t \leqslant \tau < T$.

Искомая вероятность $\omega(t, x, \tau)$ наступления события C в промежутке времени $t \leqslant s < \tau$, очевидно, может быть определена как сумма всех $\pi_n(t, x, \tau)$ от $n = 1$ до ∞; сходимость этого ряда видна из того, что для его членов, как нетрудно убедиться, применяя метод индукции, имеет место оценка:

$$\pi_n(t, x, \tau) \leqslant \frac{[K(T)(\tau - t)]^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{[K(T)(\tau - t)]^n}{n!}.$$

Поступило
25.III.1940.

V. DOUBROWSKY. SUR UN PROBLÈME LIMITE DE LA THÉORIE DES PROBABILITÉS

RÉSUMÉ

Dans le présent article on donne la solution du problème suivant: déterminer la probabilité de ce qu'à un certain moment dans un intervalle de temps donné l'état d'un certain système appartienne à un ensemble variable avec le temps et correspondant au moment donné. Il s'agit ici de procédés qui jouissent de cette propriété que dans chaque intervalle de temps borné il ne peut exister qu'un nombre fini de moments, tels que le système subit une variation, et d'ailleurs la limite du rapport de la probabilité de la variation des états pendant un certain intervalle de temps à la longueur de cet intervalle, quand cette dernière tend vers zéro, existe et reste finie.

La solution est donnée au moyen de relations intégrales recurrentes qui expriment les probabilités de toutes les possibilités incompatibles dans lesquelles survient l'événement dont nous voulons déterminer la probabilité.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 417—422 Série mathématique

Л. М. ШИФНЕР

ЕЩЕ ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ В КОНЕЧНОМ ВИДЕ

(*Представлено академиком* **Н. Е. Кочиным**)

В статье дается вывод формулы для интегрирования в квадратурах дифференциальной системы

$$\frac{dY}{dx}=Y\left[U_1\varphi_1(x)+U_2\varphi_2(x)\right]$$

при наличии условия $[U_1[U_2U_1]]=0$.

Полученная формула представляет обобщение формулы, данной Лаппо-Данилевским для системы Гаусса.

И. А. Лаппо-Данилевский [1] дает формулу для интегрирования системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dx}=Y\left[\frac{U_1}{x-a_1}+\frac{U_2}{x-a_2}\right] \tag{1}$$

в случае, когда матрицы U_1 и U_2 удовлетворяют условиям

$$[U_1[U_2U_1]]=0, \quad [U_2[U_2U_1]]=0, \tag{2}$$

в виде

$$Y=\left(\frac{x-a_1}{b-a_1}\right)^{U_1} e^{[U_2U_1]L_b(a_2a_1|x)}\left(\frac{x-a_2}{b-a_2}\right)^{U_2}, \tag{3}$$

где под Y понимается интегральная матрица системы (1), нормированная в точке $x=b$.

Рассмотрим систему

$$\frac{dY}{dx}=Y[U_1\varphi_1(x)+U_2\varphi_2(x)]; \tag{4}$$

обозначим через

$$L_1(b|x)=\int_b^x\varphi_1(t)\,dt, \quad L_2(b|x)=\int_b^x\varphi_2(t)\,dt \tag{5}$$

и через

$$L_{j_1j_2\ldots j_\nu}(b|x)=\int_b^x L_{j_1j_2\ldots j_{\nu-1}}(b|t)\,\varphi_{j_\nu}(t)\,dt, \tag{5'}$$

и будем искать решение (4), нормированное в точке $x=b$, вида

$$Y = e^{U_1 L_1(b|x)} \tilde{Y} e^{U_2 L_2(b|x)}, \tag{6}$$

где под $\tilde{Y}$ понимаем

$$Y = \exp(f_1 L_{21}(b|x) + f_2 L_{221}(b|x) + \ldots + f_n L_{2^n 1}(b|x) + \ldots) \tag{7}$$

($f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ — искомые функции матриц U_1 и U_2; $L_{2^n 1}(b|x)$ — сокращенная запись для $L_{\underbrace{22\ldots2}_{n \text{ раз}}1}(b|x)$).

Предполагая коммутативность искомых матриц $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ с матрицей U_1 и между собою, получаем для $\tilde{Y}$ дифференциальное уравнение

$$\frac{d\tilde{Y}}{dx} = [Y e^{U_2 L_2(b|x)} U_1 e^{-U_2 L_2(b|x)} - U_1 \tilde{Y}] \varphi_1(x), \tag{8}$$

что ввиду (7) даст

$$e^{U_2 L_2(b|x)} U_1 - U_1 e^{U_2 L_2(b|x)} = [f_1 L_2(b|x) + f_2 L_{22}(b|x) + \ldots] e^{U_2 L_2(b|x)}. \tag{9}$$

Приравнивая, после замены

$$L_{2^\nu}(b|x) = \frac{1}{\nu!} L_2^\nu(b|x), \tag{10}$$

коэффициенты при одинаковых степенях $L_2(b|x)$ в равенстве (9), сможем определить функции $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ из системы равенств

$$\left.\begin{array}{c} U_2^\nu U_1 - U_1 U_2^\nu = \binom{\nu}{1} f_1 U_2^{\nu-1} + \binom{\nu}{2} f_2 U_2^{\nu-2} + \ldots + \binom{\nu}{\nu-1} f_{\nu-1} U_2 + f_\nu \\ (\nu = 1, 2, \ldots). \end{array}\right\} \tag{11}$$

При $\nu=1$ получим

$$f_1 = U_2 U_1 - U_1 U_2 = [U_2 U_1]. \tag{12}$$

При $\nu=2$

$$f_2 = U_2^2 U_1 - 2U_2 U_1 U_2 + U_1 U_2^2 = [U_2 [U_2 U_1]]. \tag{12'}$$

Легко убедиться в том, что вообще

$$f_n = \sum_{s=0}^{n} (-1)^s \binom{n}{s} U_2^{\nu-s} U_1 U_2^s, \tag{13}$$

т. е. что

$$f_n = \Big[U_2 \Big[U_2 \ldots [U_2 [U_2 U_1]] \ldots\Big]\Big] \text{ (число скобок равно } n). \tag{13'}$$

Посмотрим, какие условия надо наложить на матрицу U_2, чтобы функции $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ удовлетворяли сделанному нами предположению о коммутативности с матрицей U_1. Условие коммутативности матриц f_1 и U_1 можно записать в форме

$$[U_1 f_1] = 0,$$

т. е. в форме

$$[U_1[U_2U_1]]=0. \tag{14}$$

Коммутативность матриц f_2 и U_1 вытекает из коммутативности f_1 и U_1; в самом деле *

$$\begin{aligned}[U_1f_2]&=\big[U_1[U_2[U_2U_1]]\big]=[U_1[U_2f_1]]=U_1[U_2f_1]-[U_2f_1]U_1=\\&=U_1U_2f_1-U_1f_1U_2-U_2f_1U_1+f_1U_2U_1=\\&=U_1U_2f_1-f_1U_1U_2-U_2U_1f_1+f_1U_2U_1=\\&=(U_1U_2-U_2U_1)f_1+f_1(U_2U_1-U_1U_2)=\\&=-f_1^2+f_1^2=0.\end{aligned}$$

Коммутативность матриц f_n $(n>2)$ будем рассматривать только для случая, когда матрица U_1 имеет вид **

$$U_1=TJ_\rho(\xi)T^{-1}. \tag{15}$$

Известно ([1]), что матрица U_2 в этом случае имеет вид

$$U_2=T\,\|x_{s+1,1}+(l-1)\alpha_{s+1}\|\,T^{-1}. \tag{16}$$

Обозначив через X матрицу

$$X=\|x_{s+1,1}+(l-1)\alpha_{s+1}\|, \tag{17}$$

видим, что вопрос о соотношениях коммутативности для матриц f_n и U_1 сводится к тому частному случаю вопроса, когда матрица U_1 заменена на $J_\rho(0)$, а матрица U_2 на X.

Обозначим через φ_n выражение

$$\varphi_n=\big[X\big[X\ldots[X[XJ_\rho(0)]]\ldots\big]\big], \tag{18}$$

где число скобок равно n.

Для доказательства коммутативности φ_n и $J_\rho(0)$ достаточно обнаружить, что матрица φ_n является многочленом от $J_\rho(0)$ с числовыми коэффициентами.

Для матрицы φ_2 это обстоятельство явствует из выражения

$$\varphi_2=\|\alpha_{s+1}\|\cdot\|s\alpha_s\|, \tag{19}$$

найденного ранее ([2]).

Записав φ_2 в виде

$$\varphi_2=\|\alpha_s^{(2)}\|, \tag{20}$$

---

* То же самое можно доказать иначе, пользуясь формулой

$$[A[BC]]+[B[CA]]+[C[AB]]=0.$$

** В моей предыдущей работе ([2]) было показано, что удовлетворить нетривиальным образом условию (14) матрицей с простыми характеристическими числами невозможно, исследование же случая (15) должно предшествовать изучению всех остальных случаев.

легко обнаружим, что

$$\alpha_s^{(2)} = \sum_{\varkappa+\lambda=s+1} (\varkappa+\lambda)\,\alpha_\varkappa\alpha_\lambda + \sum_{2\varkappa=s+1} \varkappa\alpha_\varkappa^2 \tag{21}$$

(для членов первой суммы $\varkappa \neq \lambda$; число членов второй 0 или 1) или, обозначая $\varkappa+\lambda = p_{\varkappa\lambda}$; $\varkappa = p_{\varkappa^2}$,

$$\alpha_s^{(2)} = \sum_{\varkappa+\lambda=s+1} p_{\varkappa\lambda}\alpha_\varkappa\alpha_\lambda + \sum_{2\varkappa=s+1} p_{\varkappa^2}\alpha_\varkappa^2. \tag{21'}$$

Предположим, что

$$\varphi_n = \| \alpha_s^{(n)} \| , \tag{22}$$

где

$$\alpha_s^{(n)} = \sum_{\Sigma\varkappa_i=s+n-1} p_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_n}\alpha_{\varkappa_1}\alpha_{\varkappa_2}\ \ldots\ \alpha_{\varkappa_n} + \ \ldots \tag{22'}$$

Матрица φ_{n+1} будет равна

$$\varphi_{n+1} = \|(l-1)\,\alpha_{s+1}\| \cdot \|\alpha_s^{(n)}\| - \|\alpha_s^{(n)}\| \cdot \|(l-1)\,\alpha_{s+1}\|.$$

Элемент $\{\varphi_{n+1}\}_{k1}$ матрицы φ_{n+1} запишется в виде

$$\{\varphi_{n+1}\}_{k1} = \sum_{r=2}^{k} (r-1)\,\alpha_{k-r+1}\,\alpha_{r-1}^{(n)};$$

это равенство показывает, что

$$\{\varphi_{n+1}\}_{k1} = \sum_{\Sigma\varkappa_i=k+n-1} p_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n+1}}\alpha_{\varkappa_1}\alpha_{\varkappa_2}\ \ldots\ \alpha_{\varkappa_{n+1}} + \ \ldots\ , \tag{23}$$

где

$$p_{\varkappa_1\varkappa_2\ldots\varkappa_{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} (k-\varkappa_i)\,p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{n+1}}. \tag{24}$$

Элемент $\{\varphi_{n+1}\}_{kl}$ запишется в виде

$$\{\varphi_{n+1}\}_{kl} = \sum_{r=l+1}^{k} (r-1)\,\alpha_{k-r+1}\,\alpha_{r-l}^{(n)} - (l-1)\sum_{r=l}^{k-1} \alpha_{k-r}^{(n)}\,\alpha_{r-l+1};$$

таким образом он равен

$$\{\varphi_{n+1}\}_{kl} = \sum_{\Sigma\varkappa_i=s+n} \Big[\sum_{i=1}^{n+1}(k-\varkappa_i)\,p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{n+1}}\Big]\alpha_{\varkappa_1}\alpha_{\varkappa_2}\ \ldots\ \alpha_{\varkappa_{n+1}} + \ \ldots +$$

$$-\Big\{\sum_{\Sigma\varkappa_i=s+n}\Big[\sum_{i=1}^{n}(l-1)\,p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{n+1}}\Big]\alpha_{\varkappa_1}\alpha_{\varkappa_2}\ \ldots\ \alpha_{\varkappa_{n+1}} + \ldots\Big\},$$

т. е.

$$\{\varphi_{n+1}\}_{kl}=\sum_{\Sigma\varkappa_i=s+n}\left[\sum_{i=1}^{n+1}(k-l+1-\varkappa_i)\,p_{\varkappa_1\ldots\varkappa_{i-1}\varkappa_{i+1}\ldots\varkappa_{n+1}}\right]\alpha_{\varkappa_1}\alpha_{\varkappa_2}\ldots\alpha_{\varkappa_{n+1}}+\ldots \quad (25)$$

Сравнивая с (23) и (24), получим

$$\{\varphi_{n+1}\}_{kl}=\{\varphi_{n+1}\}_{k-l+1,1}. \quad (26)$$

Итак, если $k-l=s$ постоянно, то $\{\varphi_{n+1}\}_{kl}$ имеет одну и ту же величину для различных k и l, т. е.

$$\{\varphi_{n+1}\}_{kl}=\alpha_s^{(n+1)}.$$

Таким образом из коммутативности матриц φ_n и $J_\rho(0)$ вытекает коммутативность матриц φ_{n+1} и $J_\rho(0)$; так как φ_2 коммутирует с $J_\rho(0)$, то методом полной индукции доказано, что матрицы φ_n и $J_\rho(0)$ обладают требующимся свойством коммутативности; следовательно таким же свойством обладают и матрицы f_n и U_1, и при условии сходимости ряда

$$f_1L_{21}(b|x)+f_2L_{221}(b|x)+\ \ldots \quad (27)$$

выражение

$$Y=\exp\bigl(U_1L_1(b|x)+f_1L_{21}(b|x)+f_2L_{221}(b|x)+\ \ldots\bigr)\cdot\exp\bigl(U_2L_2(b|x)\bigr), \quad (28)$$

в котором

$$f_n=\bigl[U_2\bigl[U_2\ldots[U_2[U_2U_1]]\ldots\bigr]\bigr] \qquad (n \text{ скобок}) \quad (13')$$

и U_1 дано формулой (15), а U_2 формулой (16), действительно является решением системы (4), нормированным в точке $x=b$.

Обозначая f_n через

$$f_n=\Omega^n U_1, \quad (29)$$

сможем представить Y еще в символическом виде

$$Y=\exp\Bigl(\int\limits_b^x e^{L_2(b|t)\Omega}\,U_1\varphi_1(t)\,dt\Bigr)\cdot\exp\bigl(U_2L_2(b|x)\bigr). \quad (30)$$

Если среди матриц f_n имеется хотя бы одна равная нулю, то и все следующие будут также равны нулю. Пусть f_{n+1} — первая из этих матриц, обращающаяся в нуль; тогда решение (28) принимает вид

$$Y=\exp\bigl(U_1L_1(b|x)+f_1L_{21}(b|x)+\ \ldots\ +f_nL_{2^n1}(b|x)\bigr)\cdot\exp\bigl(U_2L_2(b|x)\bigr). \quad (31)$$

Обращение же в нуль матрицы f_{n+1} равносильно обращению в нуль первых $\left[\frac{\rho+n-1}{n+1}\right]$ чисел α_i.

Формула, данная И. А. Лаппо-Данилевским, представляет собой, очевидно, частный случай формулы (31) при $n=1$ и специальном выборе функций $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$.

Тульский гос. педагогический институт.

Поступило 19. II. 1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Lappo-Danilevsky I. A., Mémoires sur la théorie des systèmes des équations differentielles linéaires, vol. III, Труды Физ.-мат. инст. Ак. Наук СССР, т. VIII, 1936.

[2] Шифнер Л. М., Об интегрировании в конечном виде некоторых дифференциальных систем, Изв. Ак. Наук СССР, серия матем., 4 (1940), 341—348.

L. SHIFNER. AGAIN ON THE INTEGRATION OF THE DIFFERENTIAL SYSTEMS

SUMMARY

In this article I give the expression of the integral matrix Y of the differential system

$$\frac{dY}{dx} = Y\,[U_1\varphi_1(x) + U_2\varphi_2(x)] \tag{1}$$

in the case, when

$$[U_1\,[U_2U_1]] = 0. \tag{2}$$

This expression

$$Y = e^{U_1L_1(b|x)+f_1L_{21}(b|x)+f_2L_{221}(b|x)+\,\dots}\,.\,e^{U_2L_2(b|x)} \tag{3}$$

where f_n is the matrix

$$f_n = \Big[U_2\Big[U_2\dots[U_2\,[U_2U_1]]\dots\Big]\Big] \tag{4}$$

and $L_{j_1j_2\dots j_\nu}(b|x)$ is the function

$$L_{j_1j_2\dots j_\nu}(b|x) = \int_b^x L_{j_1j_2\dots j_{\nu-1}}(b|t)\,\varphi_\nu(t)\,dt \tag{5}$$

holds, when the set

$$U_1L_1(b|x) + f_1L_{21}(b|x) + f_2L_{221}(b|x) + \;\dots \tag{6}$$

converges, and gives

$$Y = e^{U_1L_1(b|x)+f_1L_{21}(b|x)+\,\dots\,+f_nL_{2n1}(b|x)}\,.\,e^{U_2L_2(b|x)}, \tag{7}$$

if f_{n+1} is zero.

When $n=1$, this expression transforms into the formula given by I. A. Lappo-Danilevsky for the differential system of Gauss.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 423—464 Série mathématique

А. Б. ТИЦ

ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ n-КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(*Представлено академиком* **С. Н. Бернштейном**)

Выводятся различные формулы для приближенного вычисления кратных интегралов при любом числе переменных интегрирования; дается оценка погрешности. Ради облегчения вычислений разбирается случай задания фиксированных точек единичного куба; проводится сравнение величины получающейся погрешности при пользовании формулой этого случая с формулой Гаусса.

Приближенное вычисление кратных интегралов разбирается обычно или в разрезе механических кубатур (Эрмит, Стеффенсен), или же в разрезе повторного интегрирования функции одной независимой переменной (Пюйе, Виллерс).

Настоящая работа посвящена вопросу приближенного вычисления n-кратных интегралов при любом числе независимых переменных n. Для всех практически используемых случаев решение этого вопроса сведено, путем надлежащего выбора координат точек внутри единичного n-мерного куба, к соответствующему обобщению решений плоской задачи с некоторыми, конечно, дополнительными условиями. Поэтому часть из предлагаемых формул представляет собою решение n-мерной задачи в смысле Гаусса, Котеса, Чебышева, т. е. с использованием полиномов Лежандра, с равноотстоящими значениями аргументов, с равными коэффициентами. Другая же часть формул рассматривает вопрос о приближенном вычислении n-кратных интегралов при иных условиях, как например при сохранении всех коэффициентов положительными, при условии приведения процесса вычисления n-кратного интеграла к процессу вычисления однократного интеграла, в смысле использования сверх значений самой подинтегральной функции еще и значений ее производных в порядке повышения точности получаемых результатов вычислений, а не только ради оценки погрешности. В целях упрощения вычислений рассмотрен случай такого решения задачи, когда наперед фиксированы две координаты 0 и 1, как наиболее удобные для проведения вычислений; указанное требование заставило ввести соответствующий полином.

§ 1

Для приближенного вычисления определенного интеграла

$$ {}_\alpha J_\beta = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \int\limits_{\alpha_2(\xi_1)}^{\beta_2(\xi_1)} \int\limits_{\alpha_3(\xi_1,\xi_2)}^{\beta_3(\xi_1,\xi_2)} \cdots \int\limits_{\alpha_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})}^{\beta_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_{n-1})} \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \ldots d\xi_n $$

выполним прежде всего обычную замену его переменных $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, полагая

$$\xi_k = \frac{b_k - a_k}{2} \cdot x_k + \frac{b_k + a_k}{2},$$

где

$$\left.\begin{array}{c} \alpha_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}) = a_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}), \\ \beta_k(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{k-1}) = b_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}), \\ (k = 1, 2, \ldots, n). \end{array}\right\} \quad (1)$$

Согласно общему принципу замены переменных, обозначая интеграл, к которому мы переходим, через ${}_{-1}J_{+1}$, будем иметь

$$\begin{aligned} {}_\alpha J_\beta = \int\limits_{\alpha_1}^{\beta_1} \int\limits_{\alpha_2(\xi_1)}^{\beta_2(\xi_1)} \int\limits_{\alpha_3(\xi_1, \xi_2)}^{\beta_3(\xi_1, \xi_2)} \ldots \int\limits_{\alpha_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})}^{\beta_n(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1})} \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n)\, d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \ldots d\xi_n = \\ = \int\limits_{-1}^{+1} \int\limits_{-1}^{+1} \int\limits_{-1}^{+1} \ldots \int\limits_{-1}^{+1} f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \ldots dx_n = {}_{-1}J_{+1}. \quad (2) \end{aligned}$$

Множители $\frac{b_k - a_k}{2}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, входящие в состав функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в силу их геометрического назначения, было бы естественно назвать «деформирующими множителями», что хорошо интерпретируется в случае двойного интеграла явлениями сжатия и растяжения.

Интеграл ${}_{-1}J_{+1}$ преобразуем далее путем симметричного отображения его подинтегральной функции во всех n координатных плоскостях ради перехода к интегралу от четной функции, взятому уже в области n-мерного единичного куба: $0 \leqslant x_k \leqslant +1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Этот интеграл условимся далее обозначать через ${}_0J_1$.

Выполнив одно за другим все n отображений подинтегральной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, мы получим

$$\begin{aligned} {}_{-1}J_{+1} = \int\limits_{-1}^{1} \int\limits_{-1}^{1} \ldots \int\limits_{-1}^{1} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \\ = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 [f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + f(-x_1, x_2, \ldots, x_n) + \\ + f(x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_n) + \ldots + f(x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n) + \\ + f(-x_1, -x_2, x_3, \ldots, x_n) + f(-x_1, x_2, -x_3, x_4, \ldots, x_n) + \\ + \ldots + f(x_1, \ldots, x_{n-2}, -x_{n-1}, -x_n) + \\ + \ldots + f(-x_1, \ldots, -x_{n-1}, x_n) + f(-x_1, \ldots, -x_{n-2}, x_{n-1}, -x_n) + \\ + \ldots + f(x_1, -x_2, \ldots, x_n) + f(-x_1, \ldots, -x_n)]\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = \\ = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \omega(x_1^2; x_2^2; \ldots; x_n^2)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n = {}_0J_1, \quad (3) \end{aligned}$$

где функция $\omega(x_1^2; x_2^2; \ldots; x_n^2)$ состоит из 2^n слагаемых — функций $f(\pm x_1; \pm x_2; \ldots; \pm x_n)$.

§ 2

Переходя теперь непосредственно к вычислению интеграла (3) ${}_0J_1$, поставим себе целью выразить его в виде суммы, слагаемыми которой являлись бы значения его подинтегральной функции ω, вычисленные в тех или других точках $M_i\,({}_ix_1,\ {}_ix_2,\ {}_ix_3,\ \ldots,\ {}_ix_n)$ рассматриваемого единичного куба, т. е. при условии, что $0 \leqslant {}_ix_k \leqslant 1$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, и взятые с теми или другими коэффициентами:

$$
{}_0J_1 = \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \ldots \int\limits_0^1 \omega\,(x_1^2;\ x_2^2;\ \ldots;\ x_n^2)\,dx_1\,dx_2\ldots dx_n = \\
= \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i\,\omega\,({}_ix_1^2;\ {}_ix_2^2;\ \ldots;\ {}_ix_n^2). \qquad (4)
$$

Среди $(n+1)\cdot\sigma$ неизвестных, участвующих в соотношении (4): λ_i и ${}_ix_k$ при $i=1,\ 2,\ \ldots,\ \sigma$; $k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$, часть неизвестных, ради облегчения последующих вычислений или в других целях, можно считать предварительно заданными. Выбор значений этих переменных будет следовательно обусловливаться либо стремлением к сокращению общего числа взятых точек M_i или упрощению их координат ${}_ix_k$, либо желанием упростить коэффициенты λ_i или наложить на них какие-либо условия.

Для дальнейших рассуждений будем считать функцию ω целой рациональной функцией n независимых переменных $y_k = x_k^2$ $(k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ степени ν, т. е. примем, что подинтегральная функция f интеграла ${}_{-1}J_{+1}$ есть целая рациональная функция n независимых переменных x_k степени не выше $2\nu+1$. Для случая произвольной подинтегральной функции f это будет требовать замены ее полиномом соответствующей степени, пользуясь рядом Маклорена. Функцию ω зададим уравнением общего вида, сгруппировав в нем однако слагаемые так, чтобы каждая отдельная группа слагаемых приводила после интегрирования к сумме своих коэффициентов, умноженной на некоторое типичное для этой группы число. В противном случае в дальнейшем пришлось бы вести наблюдения за каждым отдельным слагаемым, а не за группами слагаемых, т. е. было бы резко увеличено число последующих уравнений.

Положив

$$
\begin{aligned}
&\omega\,(x_1^2;\ x_2^2;\ \ldots;\ x_n^2) = \omega\,(y_1;\ y_2;\ \ldots;\ y_n) = \\
&= A_0 + \\
&\quad + [A_{10\ldots0}\,y_1 + A_{010\ldots0}\,y_2 + \ldots + A_{0\ldots01}\,y_n] + \\
&\quad + [(A_{20\ldots0}\,y_1^2 + \ldots + A_{0\ldots02}\,y_n^2) + (A_{110\ldots0}\,y_1y_2 + \ldots + A_{0\ldots011}\,y_{n-1}\,y_n)] + \\
&\quad + [(A_{30\ldots0}\,y_1^3 + \ldots) + (A_{210\ldots0}\,y_1^2y_2 + \ldots + A_{120\ldots0}\,y_1y_2^2 + \ldots) + \\
&\qquad\qquad + (A_{1110\ldots0}\,y_1y_2y_3 + \ldots)] + \\
&\quad + [(A_{40\ldots0}\,y_1^4 + \ldots) + (A_{310\ldots0}\,y_1^3y_2 + \ldots) + (A_{22}\,y_1^2y_2^2 + \ldots) + \\
&\qquad\qquad + (A_{2110\ldots0}\,y_1^2y_2y_3 + \ldots) + (A_{11110\ldots0}\,y_1y_2y_3y_4 + \ldots)] + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\quad + [(A_{\nu0\ldots0}\,y_1^{\nu} + \ldots) + (A_{\nu-110\ldots0}\,y_1^{\nu-1}y_2 + \ldots) + \\
&\qquad\qquad + \ldots + (A_{11\ldots10\ldots0}\,y_1y_2\ldots y_\nu + \ldots)],
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

найдем, что

$$
\begin{aligned}
{}_0J_1 = A_0 &+ \\
&+ \frac{1}{3}[A_{10\ldots0} + \ldots] + \\
&+ \left[\frac{1}{5}(A_{20\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{3\cdot3}(A_{110\ldots0} + \ldots)\right] + \\
&+ \left[\frac{1}{7}(A_{30\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{5\cdot3}(A_{210\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{3\cdot3\cdot3}(A_{1110\ldots0} + \ldots)\right] + \\
&+ \left[\frac{1}{9}(A_{40\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{7\cdot3}(A_{310\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{5\cdot5}(A_{220\ldots0} + \ldots) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{5\cdot3\cdot3}(A_{2110\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3}(A_{11110\ldots0} + \ldots)\right] + \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \left[\frac{1}{2\nu+1}(A_{\nu0\ldots0} + \ldots) + \frac{1}{(2\nu-1)\cdot3}(A_{\nu-110\ldots0} + \ldots) + \right. \\
&\qquad \left. + \ldots + \frac{1}{3^\nu}(A_{11\ldots10\ldots0} + \ldots)\right].
\end{aligned}
$$

Обозначая же для краткости суммы коэффициентов вида $A_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_i0\ldots}$ через $S_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_i}$, получим окончательно

$$
\begin{aligned}
{}_0J_1 = S_0 + \frac{1}{3}S_1 &+ \left(\frac{1}{5}S_2 + \frac{1}{3\cdot3}S_{11}\right) + \left(\frac{1}{7}S_3 + \frac{1}{5\cdot3}S_{21} + \frac{1}{3\cdot3\cdot3}S_{111}\right) + \\
&+ \left(\frac{1}{9}S_4 + \frac{1}{7\cdot3}S_{31} + \frac{1}{5\cdot5}S_{22} + \frac{1}{5\cdot3\cdot3}S_{211} + \frac{1}{3\cdot3\cdot3\cdot3}S_{1111}\right) + \\
&+ \ldots + \left(\frac{1}{2\nu+1}S_\nu + \frac{1}{(2\nu-1)\cdot3}S_{\nu-11} + \ldots + \frac{1}{3^\nu}S_{11\ldots1_\nu}\right),
\end{aligned} \tag{6}
$$

после чего остается придать сумме, стоящей в правой части формулы (4), аналогичный вид, ради возможности тождественного сравнения выражений (4) и (6); т. е. нужно соответствующим образом выбрать точки M_i единичного куба $0 \leqslant x_k \leqslant 1$, где $k = 1, 2, \ldots, n$.

§ 3

Так как с изменением показателя степени ν и с уменьшением числа переменных n до 1 изменяется структура функции ω (5), поскольку во втором случае некоторые из ее слагаемых постепенно пропадают, то раньше чем останавливаться на том или другом выборе точек M_i, следует изучить сперва вопрос о числе слагаемых $S_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_i}$ формулы (6), как функции общего числа независимых переменных n и показателя степени ν.

Обозначим через N_ν^i число всех возможных сумм $S_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_i}$ схемы (6), индексы которых удовлетворяют условиям

$$
\left.\begin{aligned}
\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_i = \nu, \\
\nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_i \geqslant 1.
\end{aligned}\right\} \tag{7}
$$

Из самого определения символа N_ν^i следует, что

$$\left.\begin{aligned} N_\nu^1 = N_\nu^\nu &= 1 \quad \text{при любом целом } \nu \geqslant 1, \\ N_\nu^{\nu-1} &= 1 \quad \text{при любом целом } \nu \geqslant 2; \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

чтобы отметить, что первое слагаемое схемы (6), S_0, тоже представляет собою одно из слагаемых этой схемы, условимся считать, что

$$N_0^1 = 1,$$

хотя, вообще говоря, по смыслу введенного символа N_ν^i (7), при ν и μ больших нуля, $N_\nu^{\nu+\mu} = 0$. Итак

$$\left.\begin{aligned} N_0^1 &= 1; \\ N_\nu^{\nu+\mu} &= 0, \quad \text{где } \nu \text{ и } \mu > 0. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Так как

$$\nu = (\nu - 1) + 1 = (\nu - 2) + 2 = \ldots = \left[\frac{\nu+1}{2}\right] + \left[\frac{\nu}{2}\right],$$

то

$$N_\nu^2 = \left[\frac{\nu}{2}\right]. \tag{10}$$

Возьмем все N_ν^i сумм, удовлетворяющих требованиям (7), и разобьем их на две категории: 1° суммы, последнее слагаемое которых равно 1, т. е. $\nu_i = 1$; 2° суммы, последнее слагаемое которых не меньше 2, т. е. $\nu_i \geqslant 2$. Число сумм первой категории будет $N_{\nu-1}^{i-1}$, так как для них условие (7) дает

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{i-1} + 1 &= \nu, \\ \nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{i-1} \geqslant 1 &= 1, \end{aligned}\right\}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{i-1} &= \nu - 1, \\ \nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{i-1} &\geqslant 1. \end{aligned}\right\}.$$

Число сумм второй категории будет $N_{\nu-i}^i$, так как для них из условий (7) найдем

$$\left.\begin{aligned} \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{i-1} + \nu_i &= \nu, \\ \nu_1 \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{i-1} \geqslant 2 &> 1, \end{aligned}\right\}$$

т. е.

$$\left.\begin{aligned} (\nu_1 - 1) + (\nu_2 - 1) + \ldots + (\nu_{i-1} - 1) + (\nu_i - 1) &= \nu - i, \\ \nu_1 - 1 \geqslant \nu_2 - 1 \geqslant \ldots \geqslant \nu_{i-1} - 1 \geqslant \nu_i - 1 &\geqslant 1. \end{aligned}\right\}$$

Итак

$$N_\nu^i = N_{\nu-1}^{i-1} + N_{\nu-i}^i, \tag{11}$$

откуда следует, согласно формуле (9), что

$$N_{2\nu+\mu}^{\nu+\mu} = N_{2\nu}^\nu \text{ при любом целом } \mu > 0. \tag{12}$$

Переходим теперь к определению общего числа M_ν^i слагаемых $S_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_i}$, соответствующих данной однородной форме степени ν, т. е. таких, индексы которых удовлетворяют условиям (7):

$$\left.\begin{array}{c}\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\mu=\nu,\\ \nu_1\geqslant\nu_2\geqslant\ldots\geqslant\nu_\mu\geqslant 1\end{array}\right\}$$

при $\mu=1, 2, \ldots, i$, где $i=\nu\leqslant n$ или $i=n\leqslant\nu$.

На основании изложенного имеем:

$$\begin{gathered}N_\nu^1+N_\nu^2+N_\nu^3+\ldots+N_\nu^{i-1}+N_\nu^i=\\ =N_{\nu+1}^1+(N_{\nu+2}^2-N_{\nu+1}^1)+(N_{\nu+3}^3-N_{\nu+2}^2)+\\ +\ldots+(N_{\nu+i-1}^{i-1}-N_{\nu+i-2}^{i-2})+(N_{\nu+i}^i-N_{\nu+i-1}^{i-1})=N_{\nu+i}^i,\end{gathered}$$

т. е.

$$M_\nu^i=\sum_{\mu=1}^{i}N_\nu^\mu=N_{\nu+i}^i \quad \text{при} \left\{\begin{array}{c} i=\nu\leqslant n,\\ \text{или}\\ i=n\leqslant\nu.\end{array}\right\} \tag{13}$$

Исследование свойств чисел N_ν^i и M_ν^i можно было бы, конечно, продолжить далее, но приведенных формул (8) — (13) достаточно для того, чтобы составить таблицу значений чисел N_ν^i и M_ν^i при любых ν и i. Таким образом, в каждом отдельном случае вопрос о числе слагаемых, участвующих в схеме (6), решается непосредственно по этой таблице, а с этим вместе решается и вопрос о числе неизвестных в формуле (4).

$\nu \setminus i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	$M_\nu^\nu = \rho_\nu$	$\sigma_\nu = \sum M_\nu^\nu$
0	1														1	1
1	1														1	2
2	1	1													2	4
3	1	1	1												3	7
4	1	2	1	1											5	12
5	1	2	2	1	1										7	19
6	1	3	3	2	1	1									11	30
7	1	3	4	3	2	1	1								15	45
8	1	4	5	5	3	2	1	1							22	67
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1						30	97
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1					42	139
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1				56	195
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1			77	272
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1		101	373
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

(14)

§ 4

Для того чтобы привести сумму, стоящую в правой части формулы (4), к виду суммы (6), т. е. удовлетворить условию

$$
\begin{aligned}
{}_0J_1 = \sum_{i=1}^{\sigma} \lambda_i \omega ({}_ix_1^2;\ {}_ix_2^2;\ \ldots;\ {}_ix_n^2) \equiv \\
\equiv S_0 + \frac{1}{3} S_1 + \left[\frac{1}{5} S_2 + \frac{1}{3 \cdot 3} S_{11} \right] + \left[\frac{1}{7} S_3 + \frac{1}{5 \cdot 3} S_{21} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3} S_{111} \right] + \\
+ \left[\frac{1}{9} S_4 + \frac{1}{7 \cdot 3} S_{31} + \frac{1}{5 \cdot 5} S_{22} + \frac{1}{5 \cdot 3 \cdot 3} S_{211} + \frac{1}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} S_{1111} \right] + \\
+ \ldots + \left[\frac{1}{2\nu + 1} S_\nu + \frac{1}{(2\nu - 1) \cdot 3} S_{\nu-11} + \ldots + \frac{1}{3^\nu} S_{11\ldots1_\nu} \right],
\end{aligned} \tag{15}
$$

необходимо учесть все требования и особенности таблицы (14) как в смысле числа слагаемых S, из которых состоят однородные формы той или другой степени, так и в смысле изменений этого числа слагаемых S, при изменении числа независимых переменных n, и т. д., не говоря уже о том основном требовании, чтобы сумма левой части формулы (15) приводила не к разрозненным коэффициентам $A_{\nu_1\nu_2\ldots}$, а к их суммам $S_{\nu_1\nu_2\ldots}$. Этому последнему условию проще всего было бы удовлетворить, беря все координаты ${}_ix_1, {}_ix_2, \ldots, {}_ix_n$ одинаковыми, т. е. пользуясь точками главной диагонали единичного куба. Действительно, согласно формуле (5) при обозначениях (6), сразу получаем

$$
\omega(a, a, \ldots, a) = S_0 + aS_1 + a^2 (S_2 + S_{11}) + a^3 (S_3 + S_{21} + S_{111}) + \ldots \tag{16}
$$

Однако слагаемые этого типа не могут быть использованы для удовлетворения требований всех столбцов таблицы (14), так как при $n > 1$ нам, как это видно из формулы (15), необходимо получать различные коэффициенты при суммах S_2 и S_{11}; S_3, S_{21} и S_{111}; ..., чего (16) не дает.

Итак, только для удовлетворения $m_1 = \nu + 1$ требований первого столбца таблицы (14) можно взять m_1 точек на главной диагонали единичного куба, что приведет в формуле (15) к слагаемым вида

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda_i \cdot \omega(a_i, a_i, \ldots, a_i) = \\
= \lambda_i [S_0 + a_i S_1 + a_i^2 (S_2 + S_{11}) + a_i^3 (S_3 + S_{21} + S_{111}) + \ldots] \\
(i = 1, 2, \ldots, m_1;\ m_1 = \nu + 1).
\end{aligned}
\right\} \tag{17}
$$

Второй столбец таблицы (14) налагает уже

$$
m_2 = \sum_{i=0}^{\nu} \left[\frac{i}{2} \right] = \left[\frac{\nu^2}{4} \right] \tag{18}
$$

требований, которым придется удовлетворять не отдельными точками, а группами точек, симметричных относительно главной диагонали единичного куба, выбираемыми так специально ради того, чтобы получать не отдельные разрозненные коэффициенты $A_{\nu_1\nu_2\ldots}$, а как уже указывалось, их суммы $S_{\nu_1\nu_2\ldots}$, необходимые для удовлетворения условию (15).

С другой стороны, для того чтобы при уменьшении числа независимых переменных n формула (15) могла изменяться структурно так, чтобы не вводились какие-то новые слагаемые по сравнению со случаем, когда $n = 1$, а происходило непосредственное слияние с формулой этого случая, необходимо предусмотреть возможность слияния каждой группы точек, симметричных относительно главной диагонали куба,

с соответствующей точкой этой диагонали. Для этого координаты точек входящих в данную группу, должны содержать одну координату общую с использованною ранее точкою главной диагонали, а остальные $n-1$ координат должны быть одинаковыми между собою, но отличными от предыдущей. Т. е. таким образом точке $M_i\left(\sqrt{a_i}, \sqrt{a_i}, \ldots, \sqrt{a_i}\right)$ главной диагонали будет соответствовать группа точек, приводящая, как в этом легко убедиться, к следующим слагаемым:

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_j \{\omega(a_i;\, b_j, b_j, \ldots, b_j) + \omega(b_j; a_i; b_j, \ldots, b_j) + \ldots + \omega(b_j, \ldots, b_j;\ a_i)\} = \\
&\quad = \overline{\lambda}_j \sum^{C_n^1} \omega(a_i;\ b_j, b_j, \ldots, b_j) = \\
&\quad = \overline{\lambda}_j \{C_n^1 S_0 + (a_i + C_{n-1}^1 b_j) S_1 + [(a_i^2 + C_{n-1}^1 b_j^2) S_2 + \\
&\qquad + (C_2^1 a_i b_j + C_{n-2}^1 b_j^2)\ S_{11}] + [(a_i^3 + C_{n-1}^1 b_j^3) S_3 + \\
&\qquad + (a_i^2 b_j + a_i b_j^2 + C_{n-2}^1 b_j^3) S_{21} + (C_3^1 a_i b_j^2 + C_{n-3}^1 b_j^3) S_{111}] + \ldots\}, \qquad (19) \\
&\qquad\qquad \left(j = 1, 2, \ldots, m_2;\ m_2 = \left[\frac{\nu^2}{4}\right]\right).
\end{aligned}$$

Эти слагаемые действительно теряют свое самостоятельное значение, как только число независимых переменных n делается равным 1, обращаясь в предыдущие слагаемые (17), т. е. не внося, как это и требуется, в формулу (15) посторонних слагаемых по отношению к формуле того случая, когда $n=1$, а просто вливаясь в слагаемые этой формулы.

Третий столбец таблицы (14) налагает уже

$$m_3 = \sum_{l=3}^{\nu} \sum_{k=0}^{\left[\frac{l-1}{3}\right]} \left[\frac{l-1-3k}{2}\right] = \sum_{k=0}^{\left[\frac{\nu-1}{3}\right]} \left[\frac{(\nu-1-3k)^2}{4}\right] \qquad (20)$$

требований, удовлетворить которым опять-таки возможно с помощью групп точек, симметричных относительно главной диагонали, правда, с той разницей в их расположении, что эти точки должны терять самостоятельность уже при числе независимых переменных равном 2 и сливаться с предыдущими точками. Для этого точкам этих групп достаточно иметь вместо одной по две одинаковых координаты с точкой главной диагонали. Следовательно эти группы точек приведут в формуле (15) к слагаемым вида

$$\begin{aligned}
&\overline{\lambda}_k \{\omega(a_i, a_i;\ b_k, \ldots, b_k) + \omega(a_i;\ b_k;\ a_i;\ b_k, \ldots, b_k) + \ldots + \\
&\qquad + \omega(b_k, \ldots, b_k;\ a_i, a_i)\} = \overline{\lambda}_k \sum^{C_n^2} \omega(a_i, a_i;\ b_k, \ldots, b_k) = \\
&\quad = \overline{\lambda}_k \{C_n^2 S_0 + (C_{n-1}^1 a_i + C_{n-1}^2 b_k) S_1 + [(C_{n-1}^1 a_i^2 + C_{n-1}^2 b_k^2) S_2 + \\
&\qquad + (a_i^2 + C_2^1 C_{n-2}^1 a_i b_k + C_{n-2}^2 b_k^2) S_{11}] + [(C_{n-1}^1 a_i^3 + C_{n-1}^2 b_k^3) S_3 + \\
&\qquad + (a_i^3 + C_{n-2}^1 a_i^2 b_k + C_{n-2}^1 a_i b_k^2 + C_{n-2}^2 b_k^3) S_{21} + \\
&\qquad + (C_3^2 a_i^2 b_k + C_3^1 C_{n-3}^1 a_i b_k^2 + C_{n-3}^2 b_k^3) S_{111}] + \ldots\}, \qquad (21)
\end{aligned}$$

где

$$k = m_2+1,\ m_2+2,\ \ldots,\ m_2+m_3;\ m_3 = \sum_{p=0}^{\left[\frac{\nu-1}{3}\right]} \left[\frac{(\nu-1-3p)^2}{4}\right].$$

Можно было бы заставить искомые группы точек сливаться не сразу с точкой главной диагонали, а сперва (при $n=2$) с предыдущими (19) точками, а уже лишь потом (при $n=1$) с точками главной диагонали, но это сильно увеличило бы общее количество слагаемых формулы (15), и без того уже большое. Вот почему порядок расположения точек, предлагаемый формулой (21), выгоднее. Что же касается выполнения требований, налагаемых на группы точек, то эти требования полностью удовлетворяются и слагаемыми вида (21): при $n=2$ они обращаются в слагаемые типа (17), а при $n=1$ обращаются в нули, так что условие постепенности изменения суммы (15) при последовательных изменениях числа независимых переменных n снова полностью удовлетворяется. И т. д., и т. д.

Таким образом, в результате всех приведенных соображений формула (15) примет окончательно следующий вид:

$$\begin{aligned}
{}_0J_1 &= \lambda_1\omega(a_1, a_1, \ldots, a_1) + \\
&+ \lambda_2\omega(a_2, a_2, \ldots, a_2) + \\
&+ \lambda_3\omega(a_3, a_3, \ldots, a_3) + \bar{\lambda}_1 \sum^{C_n^1} \omega(a_3;\ b_1, b_1, \ldots, b_1) + \\
&+ \lambda_4\omega(a_4, a_4, \ldots, a_4) + \bar{\lambda}_2 \sum^{C_n^1} \omega(a_4;\ b_2, b_2, \ldots, b_2) + \\
&+ \bar{\lambda}_{m_2+1} \sum^{C_n^2} \omega(a_4, a_4;\ b_{m_2+1}, \ldots, b_{m_2+1}) + \\
&\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \lambda_{m_1}\omega(a_{m_1}, \ldots, a_{m_1}) + \ldots + \bar{\lambda}_{m_2} \sum^{C_n^1} \omega(a_{m_1};\ b_{m_2}, \ldots, b_{m_2}) + \ldots + \\
&\qquad + \bar{\lambda}_{\sigma_\nu - m_1} \sum^{C_n^{\nu-1}} \omega(a_{m_1}, \ldots, a_{m_1};\ b_{\sigma_\nu - m_1}, \ldots, b_{\sigma_\nu - m_1}) \equiv \\
&\equiv S_0 + \frac{1}{3}S_1 + \left[\frac{1}{5}S_2 + \frac{1}{3\cdot 3}S_{11}\right] + \left[\frac{1}{7}S_3 + \frac{1}{5\cdot 3}S_{21} + \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}S_{111}\right] + \\
&+ \left[\frac{1}{9}S_4 + \frac{1}{7\cdot 3}S_{31} + \frac{1}{5\cdot 5}S_{22} + \frac{1}{5\cdot 3\cdot 3}S_{211} + \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3\cdot 3}S_{1111}\right] + \ldots + \\
&+ \left[\frac{1}{2\nu+1}S_\nu + \frac{1}{(2\nu-1)\cdot 3}S_{\nu-11} + \ldots + \frac{1}{3^\nu}S_{11\ldots 1_\nu}\right]. \qquad (22)
\end{aligned}$$

§ 5

При указанном выборе структуры схемы (22) общее число неизвестных, участвующих в ней, окажется следующим:

$$m_1 + m_2 + m_3 + \ldots + m_\nu = \sigma_\nu \qquad (23)$$

неизвестных коэффициентов и столько же неизвестных квадратов координат, т. е. всего $2\sigma_\nu$ неизвестных, где числовые значения σ_ν определяются из таблицы (14). Поскольку таким образом число неизвестных вдвое больше, чем это требуется тождеством (22), можно половиной из неизвестных, будь то коэффициенты λ или числа a_i, b_j, b_k, ..., распорядиться, налагая на них те или другие условия.

Общее количество слагаемых вида $\omega(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в левой части соотношения (22) равно

$$m = m_1 + C_n^1 m_2 + C_n^2 m_3 + \ldots + C_n^{\nu-1} m_\nu, \tag{24}$$

а потому всех слагаемых вида $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ окажется уже $2^n m$. Вот почему одним из наиболее актуальных случаев решения вопроса о выборе неизвестных является такое решение, при котором число слагаемых m резко уменьшается, особенно за счет уничтожения групп слагаемых вида $\omega(a_i, \ldots, a_i;\ b_j, \ldots, b_j)$ с наименьшим количеством мест, заполненных числами b_j, которые кстати и условимся называть «заполнителями» или «заполнителями k-го порядка» — по числу k заполненных ими мест.

Пользуясь теперь формулами (17), (19), (21) и т. д., получим на основании тождества (22) такую систему σ_ν уравнений с $2\sigma_\nu$ неизвестными:

$$\left.\begin{aligned}
&[\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots] + [(1 + C_{n-1}^1)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&\qquad + [(C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2)\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = 1, \\
&[a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + \ldots] + [(a_3 + C_{n-1}^1 b_1)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&\qquad + [(C_{n-1}^1 a_4 + C_{n-1}^2 b_{m_2+1})\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = \frac{1}{3}, \\
&[a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \ldots] + [(a_3^2 + C_{n-1}^1 b_1^2)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&\qquad + [(C_{n-1}^1 a_4^2 + C_{n-1}^2 b_{m_2+1}^2)\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = \frac{1}{5}, \\
&[a_1^3\lambda_1 + a_2^3\lambda_2 + \ldots] + [(a_3^3 + C_{n-1}^1 b_1^3)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&\qquad + [(C_{n-1}^1 a_4^3 + C_{n-1}^2 b_{m_2+1}^2)\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = \frac{1}{7}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&[a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + \ldots] + [(C_2^1 a_3 b_1 + C_{n-2}^1 b_1^2)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&\qquad + [(a_4^2 + C_2^1 C_{n-2}^1 a_4 b_{m_2+1} + C_{n-2}^2 b_{m_2+1}^2)\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = \frac{1}{3\cdot 3}, \\
&[a_1^3\lambda_1 + a_2^3\lambda_2 + \ldots] + [(a_3^2 b_1 + a_3 b_1^2 + C_{n-2}^1 b_1^3)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&\qquad + [(a_4^3 + C_{n-2}^1 a_4^2 b_{m_2+1} + C_{n-2}^1 a_4 b_{m_2+1}^2 + \\
&\qquad\qquad + C_{n-2}^2 b_{m_2+1}^3)\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = \frac{1}{5\cdot 3}, \\
&[a_1^3\lambda_1 + a_2^3\lambda_2 + \ldots] + [(C_3^1 a_3 b_1^2 + C_{n-3}^1 b_1^3)\bar\lambda_1 + \ldots] + \\
&+ [(C_3^2 a_4^2 b_{m_2+1} + C_3^1 C_{n-3}^1 a_4 b_{m_2+1}^2 + C_{n-3}^2 b_{m_2+1}^3)\bar\lambda_{m_2+1} + \ldots] + \ldots = \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3}; \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Изучая эту систему, легко убедиться в том, что при надлежащем выборе заполнителей b_j она может быть разбита на две следующие

системы: первую, совпадающую каким бы ни было число независимых переменных n с системой того случая, когда $n=1$, и вторую, содержащую только коэффициенты $\overline{\lambda}_j$ $(j=1, 2, \ldots, \sigma_\nu - m_1)$. Для проведения этой разбивки достаточно выделить в состав первой системы все уравнения, относящиеся к суммам вида S_i $(i=1, 2, \ldots, m_1)$, положив при этом, придерживаясь той или другой закономерности, все заполнители b_j равными числам a_i. Остальные же уравнения системы (25) при надлежащем использовании выделенных ранее уравнений составляют вторую систему, не содержащую более коэффициентов λ_i $(i=1, 2, \ldots, m_1)$.

Итак, система (25) разобьется на две следующие системы:

$$\left.\begin{aligned}
\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{\nu+1} &= 1,\\
a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \ldots + a_{\nu+1}\mu_{\nu+1} &= \frac{1}{3},\\
a_1^2\mu_1 + a_2^2\mu_2 + \ldots + a_{\nu+1}^2\mu_{\nu+1} &= \frac{1}{5},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\
a_1^\nu\mu_1 + a_2^\nu\mu_2 + \ldots + a_{\nu+1}^\nu\mu_{\nu+1} &= \frac{1}{2\nu+1},
\end{aligned}\right\} \qquad (25')$$

где коэффициенты μ_i зависят как от коэффициентов λ_i, так и от коэффициентов $\overline{\lambda}_j$, и

$$\left.\begin{aligned}
&(a_3-b_1)^2\overline{\lambda}_1 + (a_4-b_2)^2\overline{\lambda}_2 + (a_4-b_3)^2 C_{n-2}^1\overline{\lambda}_3 + \ldots = \frac{1}{5} - \frac{1}{3\cdot 3},\\
&(a_3+b_1)(a_3-b_1)^2\overline{\lambda}_1 + (a_4+b_2)(a_4-b_2)^2\overline{\lambda}_2 +\\
&\qquad + (a_4+b_3)(a_4-b_3)^2 C_{n-2}^1\overline{\lambda}_3 + \ldots = \frac{1}{7} - \frac{1}{5\cdot 3},\\
&(a_3+2b_1)(a_3-b_1)^2\overline{\lambda}_1 + (a_4+2b_2)(a_4-b_2)^2\overline{\lambda}_2 +\\
&\qquad + (a_4+2b_3)(a_4-b_3)^2 C_{n-2}^1\overline{\lambda}_3 + (a_4-b_3)^3\overline{\lambda}_3 + \ldots = \frac{1}{7} - \frac{1}{3\cdot 3\cdot 3},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (25'')$$

где участвуют лишь коэффициенты $\overline{\lambda}_j$.

Остается выяснить вопрос о возможности замены всех заполнителей b_j числами a_i. Просматривая таблицу (14), видим, что в пределах практического применения предлагаемых преобразований это выполнимо. Дело в том, что только начиная с показателя степени ν полинома ω равного 12, когда следовательно полином f будет 24-й или даже 25-й степени, количества чисел a_i не хватит для обслуживания всех долженствующих быть различными между собой заполнителей b_j в некоторых столбцах таблицы (14). Так, действительно, при $\nu=12$, когда имеется 13 чисел a_i, максимальное количество не равных между собою заполнителей b_j равно уже 15 и т. д. Для всех же показателей $\nu \leqslant 11$ предлагаемый выбор заполнителей возможен и приводит к системе (25′).

Возможность выполнения указанной разбивки весьма важна, а главное ценно при этом полное совпадение системы (25′) при любом числе независимых переменных n с системой (25) в случае, когда $n=1$. Это убеждает в том, что к системе (25′), решающей задачу n-мерного про-

странства, можно применить все классическое наследие плоской задачи со всем многообразием возможных решений.

Остановившись на том или другом решении системы (25′), можно будет, согласно принятым значениям чисел a_i и b_j, решить и систему (25″), т. е. найти коэффициенты $\overline{\lambda}_j$. Возвращаемся затем к системе (25′); остается по значениям коэффициентов μ_i и $\overline{\lambda}_j$ определить значения коэффициентов λ_i, т. е. можно будет найти все неизвестные системы (25).

При использовании классических решений плоской задачи для решения системы (25′) необходимо учитывать переход от подинтегральной функции $f(x_1, x_2, \ldots)$ к четной функции $\omega(y_1, y_2, \ldots)$, где $y_i = x_i^2$, и замену интервала $-1 \leqslant x_i \leqslant +1$ интервалом $0 \leqslant y_i \leqslant 1$. Это вызовет то, что одному и тому же значению показателя степени ν функции ω будут соответствовать два возможных случая показателя степени функции f: случай четного показателя 2ν и нечетного $2\nu+1$. Значит, при решении системы (25′) в смысле Котеса надо также различать два случая:

1° случай четного числа ординат, когда

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{2\nu-1}{2\nu+1},\ x_3 = -\frac{2\nu-3}{2\nu+1}, \ldots,\ x_{\nu+1} = -\frac{1}{2\nu+1},$$
$$x_{\nu+2} = +\frac{1}{2\nu+1}, \ldots,\ x_{2\nu+2} = +1,$$

приводящий к следующим значениям чисел a_i:

$$a_1 = \left(\frac{1}{2\nu+1}\right)^2,\ a_2 = \left(\frac{3}{2\nu+1}\right)^2, \ldots,\ a_\nu = \left(\frac{2\nu-1}{2\nu+1}\right)^2,\ a_{\nu+1} = +1;$$

2° случай нечетного числа ординат, когда

$$x_1 = -1,\ x_2 = -\frac{\nu-1}{\nu},\ x_3 = -\frac{\nu-2}{\nu}, \ldots,\ x_\nu = -\frac{1}{\nu},\ x_{\nu+1} = 0,$$
$$x_{\nu+2} = +\frac{1}{\nu}, \ldots,\ x_{2\nu+1} = +1,$$

а потому

$$a_1 = 0,\ a_2 = \left(\frac{1}{\nu}\right)^2,\ a_3 = \left(\frac{2}{\nu}\right)^2, \ldots,\ a_\nu = \left(\frac{\nu-1}{\nu}\right)^2,\ a_{\nu+1} = 1.$$

Эти же два случая необходимо иметь в виду и при решении системы (25′) в смысле Чебышева, когда

1° при четном числе ординат

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{\nu+1} = \frac{1}{\nu+1};$$

2° при нечетном числе ординат

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\mu = \frac{1}{2}\mu_3 = \ldots = \frac{1}{2}\mu_{\nu+1} = \frac{1}{2\nu+1}.$$

§ 6

Переходим теперь к разбору отдельных значений показателя степени ν функции ω, помня, что все формулы, справедливые для показателя ν функции ω интеграла ${}_0J_1$, соответствуют показателю $2\nu+1$ функции f интеграла ${}_{-1}J_{+1}$.

Для простейшего случая, когда показатель $\nu=1$, получаем согласно формулам (5), (22) следующие значения функции ω и интеграла ${}_0J_1$:

$$\omega(y_1, y_2, \ldots, y_n) = A_0 + (A_{10\ldots0}y_1 + \ldots + A_{0\ldots01}y_n);$$

$${}_0J_1 = S_0 + \frac{1}{3}S_1 = \lambda_1\omega(a_1, a_1, \ldots, a_1) + \lambda_2\omega(a_2, a_2, \ldots, a_2) =$$
$$= (\lambda_1 + \lambda_2)S_0 + (a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2)S_1.$$

Отсюда [см. систему (25)] имеем

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 &= \frac{1}{3}. \end{aligned}\right\} \qquad (25_1)$$

I. Желая получить решение в смысле Гаусса, т. е. использовать наименьшее количество слагаемых, примем $a_1 = a_2$, что приводит к следующим значениям неизвестных:

$$\mu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \quad a_1 = \frac{1}{3}$$

и потому к формуле

$${}_0J_1 = \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right), \qquad (26)$$

непосредственно переходящей в соответствующую формулу Гаусса при числе независимых переменных n равном 1.

II. Желая упростить в смысле Котеса координаты участвующих в формуле точек, возьмем для случая нечетного числа точек плоской задачи

$$a_1 = 0 \quad \text{и} \quad a_2 = 1;$$

система оказывается теперь следующей:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 1, \\ \lambda_2 &= \frac{1}{3}, \end{aligned}\right\}$$

а потому получаем такую формулу:

$${}_0J_1 = \frac{2}{3}\omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{3}\omega(1, 1, \ldots, 1). \qquad (27)$$

Для случая, когда $n=1$, эта формула переходит в правило Симпсона или следовательно в соответствующую ему формулу Котеса.

Аналогично, беря

$$a_1 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \text{и} \quad a_2 = 1,$$

мы придем к формуле, являющейся опять-таки обобщением формулы Котеса, но уже для случая четного числа точек:

$${}_0J_1 = \frac{3}{4}\,\omega\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\omega(1, 1, \ldots, 1). \qquad (28)$$

III. Желая упростить в смысле Чебышева коэффициенты λ_1 и λ_2, положим в системе (25_1) $a_1' = 0$ и $\lambda_1 = \frac{1}{2}$ $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ (случай нечетного числа точек плоской задачи). Это приводит к формуле

$$ {}_0J_1 = \frac{1}{3}\omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{2}{3}\omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right). \tag{29}$$

Аналогично, беря $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ (случай четного числа точек), получим, что

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} = \lambda_2, \\ a_1 + a_2 &= \frac{2}{3}. \end{aligned}\right\}$$

Имеющей место неопределенностью можно воспользоваться поразному:

А) идя по пути сокращения числа слагаемых, принять $a_1 = a_2$, что приведет снова к формуле (26);

В) упростить хотя бы одну из участвующих координат, положив, например, $a_1 = 0$, что дает для числа a_2 значение $\frac{2}{3}$, так что будем иметь формулу

$$ {}_0J_1 = \frac{1}{2}\left[\omega(0, 0, \ldots, 0) + \omega\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{3}\right)\right]; \tag{30}$$

С) наиболее однако рациональным решением вопроса надо было бы считать попытку обслужить последующие степени в составе подинтегральной функции ω, т. е. в данном случае квадраты неизвестных y_k, когда в разбираемых условиях система (25) дает еще уравнение

$$\frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) = \frac{1}{5}.$$

Окончательная формула для этого случая будет

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \frac{1}{2}[\omega(a_1, a_1 \ldots, a_1) + \omega(a_2, a_2, \ldots, a_2)], \\ a_1 &= \frac{\sqrt{5} - 2}{3\sqrt{5}}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{5} + 2}{3\sqrt{5}}. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Эта формула также представляет собою обобщение соответствующей формулы Чебышева. Она справедлива для таких функций f 5-й степени, у которых члены 4-й степени представляют лишь четвертые степени отдельных независимых переменных x_k, но не являются произведениями нескольких из них.

Оценку погрешности полученных формул, точных, вообще говоря, для случая, когда функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является полиномом степени не выше третьей, будем проводить, исходя из того положения, что для всякого числа a, удовлетворяющего условию $0 \leqslant a \leqslant 1$, интеграл

$$ {}_0J_1 = \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 \omega(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = $$

$$ = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left\{ \omega(a, \ldots, a) + \sum_1^n (y_i - a) \frac{\partial}{\partial y_i} \omega[\ldots; a + \theta(y_i - a); \ldots] \right\} dx_1 \ldots dx_n = $$

$$ = \omega(a, \ldots, a) + \sum_1^n \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left\{ \int_0^{\sqrt{a}} (y_i - a) \frac{\partial}{\partial y_i} \omega[\ldots; a + \theta(y_i - a); \ldots]\, dx_i + \right. $$

$$ \left. + \int_{\sqrt{a}}^1 (y_i - a) \frac{\partial}{\partial y_i} \omega[\ldots; a + \theta(y_i - a); \ldots]\, dx_i \right\} dx_1 \ldots dx_{i-1} dx_{i+1} \ldots dx_n, $$

т. е.

$$ {}_0J_1 = \omega(a, \ldots, a) + \left(\frac{1}{3} - a\right) \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}; {}_2\xi_i; \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) + $$

$$ + \frac{2}{3} a \sqrt{a} \sum_1^n \left[\frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}; {}_2\xi_i; \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) - \right. $$

$$ \left. - \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}; {}_1\xi_i; \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) \right], \qquad (32) $$

где все ξ удовлетворяют условию $0 < \xi < 1$ и, кроме того,

$$ 0 < {}_1\xi_i < a \quad \text{и} \quad a < {}_2\xi_i < 1. $$

Отсюда для случая, когда $a = 0$, оказывается, что

$$ {}_0J_1 = \omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{3} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i} \omega({}_i\xi_1, \ldots, {}_i\xi_n), \qquad (33) $$

а при $a = 1$

$$ {}_0J_1 = \omega(1, 1, \ldots, 1) - \frac{2}{3} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i} \omega({}_i\xi_1, \ldots, {}_i\xi_n). \qquad (34) $$

Полученное выражение (32) можно записать еще и иначе:

$$ {}_0J_1 = \omega(a, \ldots, a) + \left(\frac{1}{3} - a\right) \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}; {}_2\xi_i; \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n) + $$

$$ + \frac{2}{3} a \sqrt{a} \sum_1^n ({}_2\xi_i - {}_1\xi_i) \frac{\partial^2}{\partial y_i^2} \omega(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}; \xi_i; \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n), \qquad (35) $$

$$ 0 < {}_1\xi_i < a < {}_2\xi_i < 1, \quad 0 < \xi_j < 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n) $$

и где коэффициенты последнего слагаемого подлежат уточнению, так как пока про них известно лишь то, что они не превосходят $\frac{2}{3} a \sqrt{a}$.

Эти коэффициенты формулы (35) легко могут быть вообще определены при помощи формул (6), (17), (19), (21). Так например для формулы (26), когда $a = \frac{1}{3}$, получаем, что

$$ {}_0J_1 = \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{9\sqrt{3}} \sum_1^n \theta_i \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\,\omega(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) $$

при $0 < \theta_i < 1$ и $0 < \xi_i < 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Убедившись таким образом в том, что остаточный член этой формулы может быть выражен суммой производных $\frac{\partial^2\omega}{\partial y_i^2}$, найдем коэффициент этой суммы из сравнения формул (6) и (17):

$$ {}_0J_1 = S_0 + \frac{S_1}{3} + \left(\frac{S_2}{5} + \frac{S_{11}}{9}\right) + \left(\frac{S_3}{7} + \frac{S_{21}}{15} + \frac{S_{111}}{27}\right) + \ldots = $$

$$ = \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) + R = S_0 + \frac{S_1}{3} + \frac{S_2 + S_{11}}{9} + \frac{S_3 + S_{21} + S_{111}}{27} + \ldots + R. $$

Отсюда

$$ R = \frac{4}{45} S_2 + \left(\frac{20}{189} S_3 + \frac{4}{135} S_{21}\right) + \ldots = $$

$$ = \frac{4}{45} \cdot \frac{1}{2!} \sum {}_0\omega''_{i^2} + \left(\frac{20}{189} \cdot \frac{1}{3!} \sum {}_0\omega'''_{i^3} + \frac{4}{135} \cdot \frac{1}{2!1!} \sum {}_0\omega'''_{i^2 j}\right) + \ldots = \frac{2}{45} \sum {}_\xi\omega''_{i^2}. $$

Итак,

$$ \left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) + R, \\ R &= \frac{2}{45} \sum {}_\xi\omega''_{i^2}. \end{aligned}\right\} \qquad (26_1) $$

Переходя к вопросу об определении погрешности остальных выше приведенных формул [(27) — (31)], используем следующее положение: если функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ непрерывна в интервале значений ее n независимых переменных $a_i \leqslant x_i \leqslant a_i + b_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то имеет место равенство

$$ \begin{aligned} &\lambda f(a_1, \ldots, a_n) + \mu f(a_1 + b_1; \ldots; a_n + b_n) = \\ &\quad = (\lambda + \mu) f(a_1 + \theta b_1; \ldots; a_n + \theta b_n), \end{aligned} \qquad (36) $$

где $0 < \theta < 1$, а λ и μ одновременно $>$ или < 0.

Пользуясь приведенным положением, можно легко вывести остаточные члены для всех разбираемых формул, считая, что подъинтегральная функция непрерывна внутри разбираемого единичного куба, дифференцируема до соответствующего порядка и не обращается в бесконечность внутри указанного куба $0 \leqslant x_i \leqslant 1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В последнем случае иногда бывает полезным выполнить предварительно интегрирование по частям, а затем уже перейти к использованию формул приближенного вычисления.

Выполняя требуемые вычисления для всех выведенных ранее формул, получим следующие их выражения с остаточными членами:

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \frac{2}{3}\omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{3}\omega(1, 1, \ldots, 1) + R, \\ R &= -\frac{1}{15}\sum \omega''_{i2} - \frac{2}{9}\sum \omega''_{ij}; \end{aligned}\right\} \quad (27_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \frac{3}{4}\omega\left(\frac{1}{9}, \frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{9}\right) + \frac{1}{4}\omega(1, 1, \ldots, 1) + R, \\ R &= -\frac{4}{135}\sum \omega''_{i2} - \frac{4}{27}\sum \omega''_{ij}; \end{aligned}\right\} \quad (28_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \frac{1}{3}\omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{2}{3}\omega\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}\right) + R, \\ R &= \frac{1}{60}\sum \omega''_{i2} - \frac{1}{18}\sum \omega''_{ij}; \end{aligned}\right\} \quad (29_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \frac{1}{2}\left[\omega(0, 0, \ldots, 0) + \omega\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{2}{3}\right)\right] + R, \\ R &= -\frac{1}{90}\sum \omega''_{i2} - \frac{1}{9}\sum \omega''_{ij}; \end{aligned}\right\} \quad (30_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 &= \frac{1}{2}[\omega(a_1, a_1, \ldots, a_1) + \omega(a_2, a_2, \ldots, a_2)] + R, \\ a_{1,2} &= \frac{\sqrt{5} \mp 2}{3\sqrt{5}}, \quad R = -\frac{4}{45}\sum \omega''_{ij} + \frac{8}{2835}\sum \omega'''_{i3}. \end{aligned}\right\} \quad (31_1)$$

Все эти формулы абсолютно точны для того случая, когда функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ представляет собою полином степени не выше третьей, в остальных случаях погрешность определяется по остаточным членам.

Из формул этого же типа можно указать еще на одну. Если обратить внимание на тот факт, что переход от произвольной области интегрирования к единичному кубу уже унифицировал изменения независимых переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$, то возникает вопрос, нельзя ли пойти еще дальше и вообще отказаться от различных между собою n независимых переменных, т. е. перейти к одной независимой переменной. Таким образом возникает вопрос, можно ли и с какой степенью точности заменить вычисление интеграла

$${}_0J_1 = \int_0^1\int_0^1 \ldots \int_0^1 \omega(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n$$

вычислением интеграла

$$\begin{aligned} {}_0\overline{J}_1 &= \int_0^1 \omega(y, y, \ldots, y)\, dx = \\ &= \int_0^1 \left[\omega(0, 0, \ldots, 0) + y\sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i}\omega(\theta y, \theta y, \ldots, \theta y)\right] dx = \\ &= \omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{3}\sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i}\omega(\xi, \xi, \ldots, \xi), \end{aligned}$$

где $0 < \xi < 1$ и под y подразумеваем попрежнему x^2. Оказывается, что возможно, так как действительно

$$
\begin{aligned}
{}_0J_1 = \int_0^1\int_0^1 \cdots \int_0^1 [\omega(0, 0, \ldots, 0) + \\
+ \sum_1^n y_i \frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\theta y_1, \theta y_2, \ldots, \theta y_n)]\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\
= \omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{3} \sum_1^n \frac{\partial}{\partial y_i} \omega({}_i\xi_1, {}_i\xi_2, \ldots, {}_i\xi_n) = \\
= \omega(0, 0, \ldots, 0) + \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n \Big[\frac{\partial}{\partial y_i} \omega(\xi, \xi, \ldots, \xi) + \\
+ \sum_{j=1}^n ({}_i\xi_j - \xi) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} \omega({}_j\eta_1, {}_j\eta_2, \ldots, {}_j\eta_n) \Big] = \\
= {}_0\overline{J}_1 + \frac{1}{3} \sum_1^n \sum_1^n ({}_i\xi_j - \xi)\, \omega''_{ij},
\end{aligned}
$$

где все ξ и η заключаются в интервале $(0, 1)$.

Остается найти остаточный член искомой формулы. Непосредственное интегрирование и формула (6) дают

$$
-\begin{cases}
{}_0J_1 = S_0 + \frac{S_1}{3} + \left(\frac{S_2}{5} + \frac{S_{11}}{9}\right) + \left(\frac{S_3}{7} + \frac{S_{21}}{15} + \frac{S_{111}}{27}\right) + \ldots \\
{}_0\overline{J}_1 = S_0 + \frac{S_1}{3} + \frac{S_2 + S_{11}}{5} + \frac{S_3 + S_{21} + S_{111}}{7} + \ldots
\end{cases}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_0J_1 - {}_0\overline{J}_1 = -\frac{4}{45} S_{11} - \left(\frac{8}{105} S_{21} + \frac{20}{189} S_{111}\right) - \ldots = \\
= -\frac{4}{45}\left[S_{11} + \left(\frac{3}{7}\cdot 2S_{21} + \frac{25}{63}\cdot 3S_{111}\right) + \ldots \right] = \\
= -\frac{4}{45} \sum {}_\xi\omega''_{ij}.
\end{aligned}
$$

S	${}_0J_1$	J_{33}	${}_0J_1 - J_{33}$	J_{34}	${}_0J_1 - J_{34}$	J_{27}	${}_0J_1 - J_{27}$	J_{28}	${}_0J_1 - J_{28}$
S_0	$1 = 1,00000$	1	—	1	—	1	—	1	—
S_1	$\frac{1}{3} = 0,33333$	—	$+0,33333$	1	$-0,66667$	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—
S_2	$\frac{1}{5} = 0,20000$	—	$+0,20000$	1	$-0,80000$	$\frac{1}{3}$	$-0,13333$	$\frac{7}{27}$	$-0,05926$
S_{11}	$\frac{1}{9} = 0,11111$	—	$+0,11111$	1	$-0,88889$	$\frac{1}{3}$	$-0,22222$	$\frac{7}{27}$	$-0,14815$
S_3	$\frac{1}{7} = 0,14286$	—	$+0,14286$	1	$-0,85714$	$\frac{1}{3}$	$-0,19048$	$\frac{41}{162}$	$-0,11023$
S_{21}	$\frac{1}{15} = 0,06667$	—	$+0,06667$	1	$-0,93333$	$\frac{1}{3}$	$-0,26667$	$\frac{41}{162}$	$-0,18642$
S_{111}	$\frac{1}{27} = 0,03704$	—	$+0,03704$	1	$-0,96296$	$\frac{1}{3}$	$-0,29630$	$\frac{41}{162}$	$-0,21605$
...	...	..	...	..	...	..	...	..	...

Таким образом имеем окончательно следующую формулу:

$$\left.\begin{aligned} \int_0^1\int_0^1\cdots\int_0^1 \omega(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \int_0^1 \omega(y, y, \ldots, y_n)\, dx + R, \\ R = -\frac{4}{45}\sum \omega''_{ij}\,. \end{aligned}\right\} \quad (37)$$

Чтобы сопоставить между собою основные из предлагаемых в этом параграфе формул, составим сравнительную таблицу их коэффициентов (см. стр. 440—441 внизу). По этой таблице в каждом отдельном случае вычисления можно провести предварительную оценку того, какой из формул или каким их сочетанием выгодно воспользоваться в условиях данной функции.

§ 7

Для случая, когда $\nu = 2$, формулы (5) и (22) дают

$$\omega(y_1, y_2, \cdots, y_n) = A_0 + [A_{10\ldots0}y_1 + \ldots] + [(A_{20\ldots0}y_1^2 + \ldots) + (A_{110\ldots0}y_1y_2 + \ldots)];$$

$$_0J_1 = \lambda_1\omega(a_1, a_1, \ldots, a_1) + \lambda_2\omega(a_2, a_2, \ldots, a_2) + \lambda_3\omega(a_3, a_3, \ldots, a_3) +$$
$$+ \bar\lambda_1 \sum^{C_n^1} \omega(a_3;\, b_1, b_1, \ldots, b_1) = S_0 + \frac{S_1}{3} + \left(\frac{S_2}{5} + \frac{S_{11}}{9}\right).$$

Система (25) оказывается для этого случая следующей:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_3 + \bar\lambda_1) + C_{n-1}^1\bar\lambda_1 &= 1, \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3(\lambda_3 + \bar\lambda_1) + b_1C_{n-1}^1\bar\lambda_1 &= \frac{1}{3}, \\ a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + a_3^2(\lambda_3 + \bar\lambda_1) + b_1^2C_{n-1}^1\bar\lambda_1 &= \frac{1}{5}, \\ (a_3 - b_1)^2\,\bar\lambda_1 &= \frac{4}{45}. \end{aligned}\right\} \quad (25_2)$$

I. Желая уменьшить число слагаемых и число различных между собою координат в окончательной формуле, примем $a_1 = a_2 = b_1 \neq a_3$, что приводит к новой системе:

J_{29}	$_0J_1 - J_{29}$	J_{30}	$_0J_1 - J_{30}$	J_{26}	$_0J_1 - J_{26}$	J_{31}	$_0J_1 - J_{31}$	J_{37}	$_0J_1 - J_{37}$
1	—	1	—	1	—	1	—	1	—
$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$	—
$\frac{1}{6}$	+ 0,03333	$\frac{2}{9}$	— 0,02222	$\frac{1}{9}$	+ 0,08889	$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—
$\frac{1}{6}$	— 0,05556	$\frac{2}{9}$	— 0,11111	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{5}$	— 0,08889	$\frac{1}{5}$	— 0,08889
$\frac{1}{12}$	+ 0,05952	$\frac{4}{27}$	— 0,00529	$\frac{1}{27}$	+ 0,10582	$\frac{17}{135}$	+ 0,01693	$\frac{1}{7}$	—
$\frac{1}{12}$	— 0,01667	$\frac{4}{27}$	— 0,08148	$\frac{1}{27}$	+ 0,02963	$\frac{17}{135}$	— 0,05926	$\frac{1}{7}$	— 0,07619
$\frac{1}{12}$	— 0,04630	$\frac{4}{27}$	— 0,11111	$\frac{1}{27}$	—	$\frac{17}{135}$	— 0,08889	$\frac{1}{7}$	— 0,10582
. .		. .		. .		. .		. .	. . . . . .

$$\left.\begin{aligned} (\lambda_1+\lambda_2+C_{n-1}^1\overline{\lambda}_1)+\quad(\lambda_3+\overline{\lambda}_1)&=1,\\ a_1\,(\lambda_1+\lambda_2+C_{n-1}^1\overline{\lambda}_1)+a_3\,(\lambda_3+\overline{\lambda}_1)&=\frac{1}{3},\\ a_1^2\,(\lambda_1+\lambda_2+C_{n-1}^1\overline{\lambda}_1)+a_3^2\,(\lambda_3+\overline{\lambda}_1)&=\frac{1}{5},\\ (a_3-a_1)^2\,\overline{\lambda}_1&=\frac{4}{45},\end{aligned}\right\}$$

решая которую, найдем формулу

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1=&\frac{1}{\left[\left(a_3-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{4}{45}\right]^2}\left\{\left(a_3-\frac{1}{3}\right)^2\left[\left(a_3-\frac{1}{3}\right)^2-\right.\right.\\ &\left.-\frac{4\,(n-2)}{45}\right]\omega\,(a_1,a_1,\ldots,a_1)+\frac{16}{2025}\,\omega\,(a_3,a_3,\ldots,a_3)+\\ &\left.+\frac{4}{45}\left(a_3-\frac{1}{3}\right)^2\sum^{C_n^1}\omega\,(a_3;\,a_1,a_1,\ldots,a_1)\right\},\\ &a_1=\frac{\frac{a_3}{3}-\frac{1}{5}}{a_3-\frac{1}{3}},\quad 0\leqslant a_3\leqslant\frac{1}{5}\quad\text{или}\quad\frac{3}{5}\leqslant a_3\leqslant 1.\end{aligned}\right\}\tag{38}$$

Разберем несколько частных случаев:

A) Примем $a_3=0$; тогда $a_1=\frac{3}{5}$, и предыдущая формула примет вид

$$\begin{aligned}{}_0J_1=\frac{1}{81}\Big\{5\,(13-4n)\,\omega\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5},\ldots,\frac{3}{5}\right)+16\,\omega\,(0,0,\ldots,0)+\\ +20\sum^{C_n^1}\omega\left(0;\frac{3}{5},\frac{3}{5},\ldots,\frac{3}{5}\right)\Big\}.\end{aligned}\tag{39}$$

Для случая, когда $n=1$, эта формула переходит в соответствующую формулу Гаусса.

B) Примем, наоборот, $a_1=0$ и $a_3=\frac{3}{5}$; из формулы (38) получим

$$\begin{aligned}{}_0J_1=\frac{1}{81}\Big\{4\,(14-5n)\,\omega\,(0,0,\ldots,0)+25\,\omega\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5},\ldots,\frac{3}{5}\right)+\\ +20\sum^{C_n^1}\omega\left(\frac{3}{5};0,0,\ldots,0\right)\Big\}.\end{aligned}\tag{40}$$

При $n=1$ эта формула опять таки переходит в формулу Гаусса, а при $n=2$ формулы (39) и (40) оказываются одинаковыми, так как роль заполнителя перестает тогда сказываться.

C) Обе предыдущие формулы—(39) при $n\geqslant 4$ и (40) при $n\geqslant 3$—будут обладать одним отрицательным коэффициентом. Для того чтобы избежать этого для возможно бо́льшего значения числа n, нужно выбрать число a_3 так, чтобы обратить в формуле (38) выражение $\left(a_3-\frac{1}{3}\right)^2$ в максимум, т. е. надо принять $a_3=1$. Тогда $a_1=\frac{1}{5}$, и формула (38) дает

$$
{}_0J_1 = \frac{1}{36}\Big\{5(7-n)\,\omega\left(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{5}\right) + \omega(1; 1, \ldots, 1) + 5\sum^{C_n^1} \omega\left(1; \frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{5}\right)\Big\}. \qquad (41)
$$

D) В формуле (38) можно уничтожить еще одно слагаемое, если принять

$$
\left(a_3 - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{4(n-2)}{45} = 0,
$$

т. е. взяв

$$
a_3 = \frac{1}{3} \underset{(-)}{+} \sqrt{\frac{4(n-2)}{45}} = \frac{1}{3}\left(1 + 2\sqrt{\frac{n-2}{5}}\right).
$$

Это возможно при $3 \leqslant n \leqslant 7$, так как иначе рассматриваемые точки оказываются вне куба $0 \leqslant x_k \leqslant 1$. Итак,

$$
\left.\begin{aligned}
&{}_0J_1 = \frac{1}{(n-1)^2}\Big\{\omega(a_3, a_3, \ldots, a_3) + (n-2)\sum^{C_n^1} \omega(a_3; a_1, a_1, \ldots, a_1)\Big\};\\
&3 \leqslant n \leqslant 7, \quad a_3 = \frac{1}{3}\left(1 + 2\sqrt{\frac{n-2}{5}}\right), \quad a_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5(n-2)}}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (42)
$$

II. Желая упростить в смысле Котеса расположение точек внутри единичного куба, рассмотрим следующие случаи значений чисел a_i и b_i в системе (25_2).

A) Положим $a_1 = b_1 = 0, \quad a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad a_3 = 1$. Система принимает вид:

$$
\left.\begin{aligned}
\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_3 + \bar{\lambda}_1) + C_{n-1}^1 \bar{\lambda}_1 &= 1,\\
\frac{1}{4}\lambda_2 + (\lambda_3 + \bar{\lambda}_1) &= \frac{1}{3},\\
\frac{1}{16}\lambda_2 + (\lambda_3 + \bar{\lambda}_1) &= \frac{1}{5},\\
\bar{\lambda}_1 &= \frac{4}{45},
\end{aligned}\right\}
$$

а потому получаем формулу

$$
{}_0J_1 = \frac{1}{45}\Big\{2(5-2n)\,\omega(0, 0, \ldots, 0) + 32\,\omega\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right) + 3\omega(1, 1, \ldots, 1) + 4\sum^{C_n^1} \omega(1;\ 0, 0, \ldots, 0)\Big\}, \qquad (43)
$$

что при $n = 1$ действительно соответствует формуле Котеса.

B) Полагая $a_1 = b_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{4}$, $a_3 = 0$, мы получили бы аналогичную формулу, но при ином заполнителе:

$$
{}_0J_1 = \frac{1}{45}\Big\{2\omega(0, 0, \ldots, 0) + 32\,\omega\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right) + (11-4n)\,\omega(1, 1, \ldots, 1) + 4\sum^{C_n^1} \omega(0;\ 1, 1, \ldots, 1)\Big\}. \qquad (44)
$$

Иной выбор a_3 и заполнителя b_1 ускорял бы получение отрицательных коэффициентов, так как увеличивал бы абсолютную величину коэффициента $\overline{\lambda}_1$.

C) Полагая $a_1 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25} = b_1$; $a_2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$, $a_3 = 1$, получим снова обобщение формулы Котеса, но уже для четного числа точек; иной выбор заполнителя $\left(b_1 = a_2 = \frac{9}{25}\right)$ привел бы к получению отрицательных коэффициентов:

$$
{}_0J_1 = \frac{1}{1296}\left\{25\,(23-5n)\,\omega\left(\frac{1}{25}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{25}\right) + 675\,\omega\left(\frac{9}{25}, \frac{9}{25}, \ldots, \frac{9}{25}\right) + \right.
$$
$$
\left. + 46\,\omega\,(1, 1, \ldots, 1) + 125\sum^{C_n^1}\omega\left(1;\ \frac{1}{25}, \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{25}\right)\right\}. \qquad (45)
$$

III. Желая упростить в смысле Чебышева коэффициенты, положим в системе (25_2):

A) Для случая четного числа точек

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 = a_2 = b_1 \neq a_3,\\
\lambda_1 + \lambda_2 + C_{n-1}^1\overline{\lambda}_1 = \lambda_3 + \overline{\lambda}_1 = \frac{1}{2},
\end{aligned}\right\}
$$

что приводит к условиям

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 + a_3 &= \frac{2}{3},\\
a_1^2 + a_3^2 &= \frac{2}{5},\\
(a_3 - a_1)^2\,\overline{\lambda}_1 &= \frac{4}{45}.
\end{aligned}\right\}
$$

Таким образом найдем, что

$$
\left.\begin{aligned}
a_{1,3} &= \frac{1}{3} \mp \frac{2}{3\sqrt{5}},\\
\overline{\lambda}_1 &= \frac{1}{4} = \lambda_3,\\
\lambda_1 + \lambda_2 &= \frac{3-n}{4},
\end{aligned}\right\}
$$

а потому получим следующую, весьма изящную по своим коэффициентам, формулу:

$$
\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 = \frac{1}{4}\Big\{(3-n)\,\omega\,(a_1, a_1, \ldots, a_1) + \omega\,(a_3, a_3, \ldots, a_3) + \\
+ \sum^{C_n^1}\omega\,(a_3;\ a_1, a_1, \ldots, a_1)\Big\},\\
a_1 = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad a_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right).
\end{aligned}\right\} \qquad (46)
$$

B) Для случая нечетного числа точек возьмем

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 = 0 = b_1,\\
\lambda_1 + C_{n-1}^1\overline{\lambda}_1 = \frac{1}{2}\,\lambda_2 = \frac{1}{2}\,(\lambda_3 + \overline{\lambda}_1) = \frac{1}{5},
\end{aligned}\right\}
$$

что приводит к условиям

$$a_2 + a_3 = \frac{5}{6}, \quad a_2^2 + a_3^2 = \frac{1}{2}, \quad a_3^2 \overline{\lambda}_1 = \frac{4}{45}.$$

Формула принимает весьма громоздкий вид:

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{245} \Big\{ & [160(n-1)\sqrt{11} + (625 - 756n)]\,\omega(0, 0, \ldots, 0) + \\ & + 98\,\omega(a_2, a_2, \ldots, a_2) + (160\sqrt{11} - 478)\,\omega(a_3, a_3, \ldots, a_3) + \\ & + 32(18 - 5\sqrt{11}) \sum^{C_n^1} \omega(a_3;\ 0, 0, \ldots, 0) \Big\}, \\ & a_2 = \frac{5 - \sqrt{11}}{12}, \quad a_3 = \frac{5 + \sqrt{11}}{12}. \end{aligned}\right\} \quad (47)$$

Сопоставление между собою формул, выведенных в этом параграфе, проведем опять-таки с помощью таблицы их коэффициентов. Эта сравнительная таблица, на основании высказанных ранее соображений, даст возможность составить выражения остаточных членов этих формул и судить о желательности использования тех или других формул для каждого отдельного случая вычисления (см. стр. 446—447).

Произведя надлежащие вычисления, получим следующие основные формулы, соответствующие случаю, когда $\nu = 2$, в их окончательном виде:

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{81} \Big\{ & 5(13 - 4n)\,\omega\left(\frac{3}{5}, \ldots, \frac{3}{5}\right) + 16\,\omega(0, \ldots, 0) + \\ & + 20 \sum^{C_n^1} \omega\left(0;\ \frac{3}{5}, \ldots, \frac{3}{5}\right) \Big\} + R, \\ & R = \frac{2}{525} \sum \frac{\partial^3}{\partial y_i^3}\,\omega({}_i\xi_1, \ldots, {}_i\xi_n) + \\ & + \frac{16}{675} \sum \frac{\partial^3}{\partial y_i \partial y_j \partial y_k}\,\omega({}_l\eta_1, \ldots, {}_l\eta_n); \end{aligned}\right\} \quad (39_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{81} \Big\{ & 4(14 - 5n)\,\omega(0, \ldots, 0) + 25\omega\left(\frac{3}{5}, \ldots, \frac{3}{5}\right) + \\ & + 20 \sum^{C_n^1} \omega\left(\frac{3}{5};\ 0, \ldots, 0\right) \Big\} + R, \\ & R = \frac{2}{525} \sum \omega_{i^3}''' - \frac{4}{135} \sum \omega_{ijk}'''; \end{aligned}\right\} \quad (40_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{36} \Big\{ & 5(7 - n)\,\omega\left(\frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{5}\right) + \omega(1, \ldots, 1) + \\ & + 5 \sum^{C_n^1} \omega\left(1;\ \frac{1}{5}, \ldots, \frac{1}{5}\right) \Big\} + R, \\ & R = \frac{-8}{1575} \sum \omega_{i^3}''' - \frac{8}{675} \sum \omega_{ijk}'''; \end{aligned}\right\} \quad (41_1)$$

S	${}_0J_1$	J_{39}	${}_0J_1 - J_{39}$	J_{40}	${}_0J_1 - J_{40}$	J_{41}	${}_0J_1 - J_{41}$	J_{43}	${}_0J_1 - J_{43}$
S_0	$1 = 1,00000$	1	—	1	—	1	—	1	—
S_1	$\frac{1}{3} = 0,33333$	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—
S_2	$\frac{1}{5} = 0,20000$	$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—
S_{11}	$\frac{1}{9} = 0,11111$	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{9}$	—
S_3	$\frac{1}{7} = 0,14286$	$\frac{3}{25}$	$+0,02286$	$\frac{3}{25}$	$+0,02286$	$\frac{13}{75}$	$-0,03048$	$\frac{1}{6}$	$-0,02381$
S_{21}	$\frac{1}{15} = 0,06667$	$\frac{1}{15}$	—	$\frac{1}{15}$	—	$\frac{1}{15}$	—	$\frac{7}{90}$	$-0,01111$
S_{111}	$\frac{1}{27} = 0,03704$	$\frac{1}{75}$	$+0,02370$	$\frac{1}{15}$	$-0,02963$	$\frac{11}{225}$	$-0,01185$	$\frac{7}{90}$	$-0,04074$
...		...		...		...		...	......

$$\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 &= \frac{1}{(n-1)^2}\Big\{\omega(a_3, \ldots, a_3) + \\
&\quad + (n-2)\sum^{C_n^1}\omega(a_3;\ a_1, \ldots, a_1)\Big\} + R, \\
R &= \frac{4}{2835}\left(2 - \frac{7(n-3)}{\sqrt{5(n-2)}}\right)\sum\omega_{i^3}''' - \\
&\quad - \frac{8}{135\sqrt{5(n-2)}}\sum\omega_{ijk}''', \\
a_1 &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{\sqrt{5(n-2)}}\right), \quad a_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\sqrt{5(n-2)}\right), \\
&\qquad 3 \leqslant n \leqslant 7;
\end{aligned}\right\} \qquad (42_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 &= \frac{1}{45}\Big\{2(5-2n)\,\omega(0, \ldots, 0) + 32\,\omega\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right) + \\
&\quad + 3\omega(1, \ldots, 1) + 4\sum^{C_n^1}\omega(1;\ 0, \ldots, 0)\Big\} + R, \\
R &= -\frac{1}{252}\sum\omega_{i^3}''' - \frac{1}{180}\sum\omega_{i^2j}''' - \frac{11}{270}\sum\omega_{ijk}''';
\end{aligned}\right\} \qquad (43_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 &= \frac{1}{45}\Big\{2\omega(0, \ldots, 0) + 32\omega\left(\frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}\right) + \\
&\quad + (11-4n)\,\omega(1, \ldots, 1) + 4\sum^{C_n^1}\omega(0;\ 1, \ldots, 1)\Big\} + R, \\
R &= -\frac{1}{252}\sum\omega_{i^3}''' - \frac{1}{180}\sum\omega_{i^2j}''' + \frac{13}{270}\sum\omega_{ijk}''';
\end{aligned}\right\} \qquad (44_1)$$

$$\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 &= \frac{1}{1296}\Big\{25(23-5n)\,\omega\left(\frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{25}\right) + 675\,\omega\left(\frac{9}{25}, \ldots, \frac{9}{25}\right) + \\
&\quad + 46\omega(1, \ldots, 1) + 125\sum^{C_n^1}\omega\left(1;\ \frac{1}{25}, \ldots, \frac{1}{25}\right)\Big\} + R, \\
R &= -\frac{88}{39375}\sum\omega_{i^3}''' + \frac{8}{5625}\sum\omega_{i^2j}''' - \frac{392}{16875}\sum\omega_{ijk}''';
\end{aligned}\right\} \qquad (45_1)$$

J_{44}	${}_0J_1 - J_{44}$	J_{45}	${}_0J_1 - J_{45}$	J_{46}	${}_0J_1 - J_{46}$	J_{47}	${}_0J_1 - J_{47}$
1	—	1	—	1	—	1	—
$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—	$\frac{1}{3}$	—
$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—	$\frac{1}{5}$	—
$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{9}$	—	$\frac{1}{9}$	—
$\frac{1}{6}$	$-0,02381$	$\frac{293}{1875}$	$-0,01341$	$\frac{17}{135}$	$+0,01693$	$\frac{29}{216}$	$+0,00860$
$\frac{7}{90}$	$-0,01111$	$\frac{359}{5625}$	$+0,00284$	$\frac{1}{15}$	—	$\frac{105-8\sqrt{11}}{1080}$	$-0,00599$
$\frac{-1}{90}$	$+0,04815$	$\frac{113}{1875}$	$-0,02323$	$\frac{1}{135}\left(5+\frac{8}{\sqrt{5}}\right)$	$-0,02650$	$\frac{105-8\sqrt{11}}{1080}$	$-0,03562$
...		...					......

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{4}\Big\{ (3-n)\,\omega(a_1, \ldots, a_1) + \\ + \omega(a_3, \ldots, a_3) + \sum^{C_n^1} \omega(a_3;\quad a_1, \ldots, a_1)\Big\} + R, \\ R = \frac{8}{2835}\sum \omega_{i3}''' - \frac{8}{135\sqrt{5}}\sum \omega_{ijk}''', \\ a_1 = \frac{1}{3}\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}\right), \quad a_3 = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}\right); \end{aligned}\right\} \qquad (46_1)$$

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{245}\Big\{ [160(n-1)\sqrt{11} + (625-576n)]\,\omega(0, \ldots, 0) + \\ + 98\,\omega(a_2, \ldots, a_2) + (160\sqrt{11}-478)\,\omega(a_3, \ldots, a_3) + \\ + 32(18-5\sqrt{11})\sum^{C_n^1} \omega(a_3;\quad 0, \ldots, 0)\Big\} + R, \\ R = \frac{13}{9072}\sum \omega_{i3}''' - \frac{33-8\sqrt{11}}{2160}\sum \omega_{i^2 j}''' - \frac{65-8\sqrt{11}}{1080}\sum \omega_{ijk}'''; \\ a_2 = \frac{1}{12}(5-\sqrt{11}), \quad a_3 = \frac{1}{12}(5+\sqrt{11}). \end{aligned}\right\} \qquad (47_1)$$

Все эти формулы абсолютно точны в случае, когда функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является полиномом степени не выше пятой; в противном случае погрешность определяется посредством указанных остаточных членов.

Формула (42_1) при $n=3$ совпадает с формулой (46_1).

Из формул с такой же точностью, т. е. аналогичных приведенным, необходимо указать еще на один тип формул. В тех случаях, когда вычисление последовательных производных функции ω не представляет затруднений, выгодно использовать эти производные сперва для уточнения получаемого результата, а затем уже для оценки погрешности.

Так, воспользовавшись, как основой, формулой (26), получаем, согласно формулам (15) и (17):

$$-\left\{\begin{aligned} {}_0J_1 &= S_0 + \frac{S_1}{3} + \left(\frac{S_2}{5} + \frac{S_{11}}{9}\right) + \left(\frac{S_3}{7} + \frac{S_{21}}{15} + \frac{S_{111}}{27}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{S_4}{9} + \frac{S_{31}}{21} + \frac{S_{22}}{25} + \frac{S_{211}}{45} + \frac{S_{1111}}{81}\right) + \ldots \\ \omega\left(\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) &= S_0 + \frac{S_1}{3} + \frac{S_2 + S_{11}}{9} + \frac{S_3 + S_{21} + S_{111}}{27} + \\ &\quad + \frac{S_4 + S_{21} + S_{22} + S_{211} + S_{1111}}{81} + \ldots \end{aligned}\right.$$

$$ {}_0J_1 - \omega\left(\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{45} S_2 + \left(\frac{20}{189} S_3 + \frac{4}{135} S_{21}\right) + \\ + \left(\frac{8}{81} S_4 + \frac{20}{567} S_{31} + \frac{56}{2025} S_{22} + \frac{4}{405} S_{211}\right) + \ldots$$

Разлагая же функцию $\omega(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ в ряд Маклорена, найдем, что

$$\omega(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \omega(0, \ldots, 0) + \frac{1}{1!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{(1)} \omega(0, \ldots, 0) + \\ + \frac{1}{2!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{(2)} \omega(0, \ldots, 0) + \ldots + \\ + \frac{1}{(\nu-1)!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{(\nu-1)} \omega(0, \ldots, 0) + \\ + \frac{1}{\nu!}\left(y_1 \frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + y_n \frac{\partial}{\partial y_n}\right)^{(\nu)} \omega(\theta y_1, \ldots, \theta y_n), \qquad (5_1) \\ 0 < \theta < 1.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} \omega''_{i^2}(y, \ldots, y) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2!} \sum {}_0\omega''_{i^2} + \left(3 \cdot 2 \cdot \frac{y}{3!} \sum {}_0\omega'''_{i^3} + \right. \\ \left. + 2 \cdot 1 \cdot \frac{y}{2!\,1!} \sum {}_0\omega'''_{i^2 j}\right) + \left[4 \cdot 3 \cdot \frac{y^2}{4!} \sum {}_0\omega^{\mathrm{IV}}_{i^4} + 3 \cdot 2 \cdot \frac{y^2}{3!\,1!} \sum {}_0\omega^{\mathrm{IV}}_{i^3 j} + \right. \\ \left. + (2 \cdot 1 + 2 \cdot 1) \frac{y^2}{2!\,2!} \sum {}_0\omega^{\mathrm{IV}}_{i^2 j^2} + 2 \cdot 1 \cdot \frac{y^2}{2!\,1!\,1!} \sum {}_0\omega^{\mathrm{IV}}_{i^2 jk}\right] + \ldots,$$

так что

$$\lambda \sum \omega''_{i^2}(a, \ldots, a) = 2\lambda S_2 + (6\lambda a S_3 + 2\lambda a S_{21}) + \\ + (12\lambda a^2 S_4 + 6\lambda a^2 S_{31} + 4\lambda a^2 S_{22} + 2\lambda a^2 S_{211}) + \ldots$$

Поэтому, полагая $\lambda = \frac{2}{45}$ и $a = \frac{1}{3}$, получим

$$-\left\{\begin{aligned} {}_0J_1 - \omega\left(\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{45} S_2 + \left(\frac{20}{189} S_3 + \frac{4}{135} S_{21}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{8}{81} S_4 + \frac{20}{567} S_{31} + \frac{56}{2025} S_{22} + \frac{4}{405} S_{211}\right) + \ldots \\ \frac{2}{45} \sum \omega''_{i^2}\left(\frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) &= \frac{4}{45} S_2 + \left(\frac{4}{45} S_3 + \frac{4}{135} S_{21}\right) + \\ &\quad + \left(\frac{8}{135} S_4 + \frac{4}{135} S_{31} + \frac{8}{405} S_{22} + \frac{4}{405} S_{211}\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

$$R = \frac{16}{945} S_3 + \left(\frac{16}{405} S_4 + \frac{16}{2835} S_{31} + \frac{16}{2025} S_{22}\right) + \ldots = \\ = 0{,}01693\, S_3 + 0{,}03951\, S_4 + 0{,}00564\, S_{31} + 0{,}00790\, S_{22} + \ldots$$

Таким образом формула (26) примет теперь следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} {}_0J_1 = \omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{45}\sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}\omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{3}\right) + R, \\ R = \frac{4}{14175}\left(10\sum \omega_{i^3}''' + 7\sum \omega_{i^2j^2}^{IV}\right). \end{aligned}\right\} \quad (48)$$

§ 8

Для случая, когда $\nu = 3$, формулы (5) и (22) дают

$$\omega(y_1, y_2, \ldots, y_n) = A_0 + [A_{10\ldots0}y_1 + \ldots] + [(A_{20\ldots0}y_1^2 + \ldots) + \\ + (A_{110\ldots0}y_1y_2 + \ldots)] + [(A_{30\ldots0}y_1^3 + \ldots) + \\ + (A_{210\ldots0}y_1^2y_2 + \ldots) + (A_{1110\ldots0}y_1y_2y_3 + \ldots)];$$

$${}_0J_1 = \lambda_1\omega(a_1, a_1, \ldots, a_1) + \lambda_2\omega(a_2, a_2, \ldots, a_2) + \Big[\lambda_3\omega(a_3, a_3, \ldots, a_3) + \\ + \bar\lambda_1\sum^{C_n^1}\omega(a_3;\ b_1, \ldots, b_1)\Big] + \Big[\lambda_4\omega(a_4, a_4, \ldots, a_4) + \\ + \bar\lambda_2\sum^{C_n^1}\omega(a_4;\ b_2, \ldots, b_2) + \bar\lambda_3\sum^{C_n^2}\omega(a_4, a_4;\ b_3, \ldots, b_3)\Big] = \\ = S_0 + \frac{S_1}{3} + \left(\frac{S_2}{5} + \frac{S_{11}}{9}\right) + \left(\frac{S_3}{7} + \frac{S_{21}}{15} + \frac{S_{111}}{27}\right).$$

Система (25) принимает соответственно следующий вид:

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_2 + (\lambda_3 + \bar\lambda_1) + (\lambda_4 + \bar\lambda_2 + C_{n-1}^1\bar\lambda_3) + \\
&\qquad + C_{n-1}^1\bar\lambda_1 + C_{n-1}^1\bar\lambda_2 + C_{n-1}^2\bar\lambda_3 = 1, \\
&a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + a_3(\lambda_3 + \bar\lambda_1) + a_4(\lambda_4 + \bar\lambda_2 + C_{n-1}^1\bar\lambda_3) + \\
&\qquad + b_1C_{n-1}^1\bar\lambda_1 + b_2C_{n-1}^1\bar\lambda_2 + b_3C_{n-1}^2\bar\lambda_3 = \frac{1}{3}, \\
&a_1^2\lambda_1 + a_2^2\lambda_2 + a_3^2(\lambda_3 + \bar\lambda_1) + a_4^2(\lambda_4 + \bar\lambda_2 + C_{n-1}^1\bar\lambda_3) + \\
&\qquad + b_1^2C_{n-1}^1\bar\lambda_1 + b_2^2C_{n-1}^1\bar\lambda_2 + b_3^2C_{n-1}^2\bar\lambda_3 = \frac{1}{5}, \\
&a_1^3\lambda_1 + a_2^3\lambda_2 + a_3^3(\lambda_3 + \bar\lambda_1) + a_4^3(\lambda_4 + \bar\lambda_2 + C_{n-1}^1\bar\lambda_3) + \\
&\qquad + b_1^3C_{n-1}^1\bar\lambda_1 + b_2^3C_{n-1}^1\bar\lambda_2 + b_3^3C_{n-1}^2\bar\lambda_3 = \frac{1}{7};
\end{aligned}\right. \\
&\left\{\begin{aligned}
&(a_3 - b_1)^2\bar\lambda_1 + (a_4 - b_2)^2\bar\lambda_2 + (a_4 - b_3)^2C_{n-2}^1\bar\lambda_3 = \frac{4}{45}, \\
&(a_3 + b_1)(a_3 - b_1)^2\bar\lambda_1 + (a_4 + b_2)(a_4 - b_2)^2\bar\lambda_2 + \\
&\qquad + (a_4 + b_3)(a_4 - b_3)^2C_{n-2}^1\bar\lambda_3 = \frac{8}{105}, \\
&b_1(a_3 - b_1)^2\bar\lambda_1 + b_2(a_4 - b_2)^2\bar\lambda_2 + \\
&\qquad + b_3(a_4 - b_3)^2C_{n-2}^1\bar\lambda_3 + (a_4 - b_3)^3\bar\lambda_3 = \frac{4}{135}.
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right\} \quad (25_3)$$

I. Желая уменьшить в смысле Гаусса число участвующих в формуле точек и главное уменьшить и упростить группы симметричных точек, возьмем все заполнители b_1, b_2, b_3 равными числу a_1 и кроме

того положим $a_1 = a_2$ и $a_3 = a_4$. При этих условиях система (25_3) перепишется в таком виде:

$$\begin{cases} \mu_1 + \mu_2 = 1, \\ a_1\mu_1 + a_3\mu_2 = \frac{1}{3}, \\ a_1^2\mu_1 + a_3^2\mu_2 = \frac{1}{5}, \\ a_1^3\mu_1 + a_3^3\mu_2 = \frac{1}{7}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a_3 - a_1)^2 \mu_3 = \frac{4}{45}, \\ (a_3 + a_1)(a_3 - a_1)^2 \mu_3 = \frac{8}{105}, \\ a_1 (a_3 - a_1)^2 \mu_3 + (a_3 - a_1)^3 \overline{\lambda}_3 = \frac{4}{135}, \end{cases}$$

где для сокращения записи положено

$$\begin{cases} \mu_1 = (\lambda_1 + \lambda_2) + C_{n-1}^1 (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2) + C_{n-1}^2 \overline{\lambda}_3, \\ \mu_2 = (\lambda_3 + \lambda_4) + (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2) + C_{n-1}^1 \overline{\lambda}_3, \\ \mu_3 = (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2) + C_{n-2}^1 \overline{\lambda}_3. \end{cases}$$

Решая систему, получим

$$\mu_1 = \frac{18 + \sqrt{30}}{36}, \quad \mu_2 = \frac{18 - \sqrt{30}}{36}, \quad \mu_3 = \frac{49}{216},$$

$$\overline{\lambda}_3 = \frac{49 (18 - \sqrt{30})}{7776},$$

$$a_1 = \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}, \quad a_3 = \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}.$$

Координаты рассматриваемых точек M_1 и M_2 являются, таким образом, действительно квадратами корней полинома Лежандра первого рода, соответствующей степени. Формула в этом случае имеет весьма громоздкий вид:

$$\begin{aligned} {}_0J_1 = \frac{1}{15552} \Big\{ & [18 (726 - 343 n + 49n^2) + \\ & + (334 + 147n - 49n^2) \sqrt{30}] \, \omega (a_1, \ldots, a_1) + \\ & + 2 (1242 - 167 \sqrt{30}) \, \omega (a_3, \ldots, a_3) + 98 [18 (4 - n) + \\ & + (n - 2) \sqrt{30}] \sum^{C_n^1} \omega (a_3; \; a_1, \ldots, a_1) + \\ & + 98 (18 - \sqrt{30}) \sum^{C_n^2} \omega (a_3, a_3; \; a_1, \ldots, a_1) \Big\}, \end{aligned} \qquad (49)$$

$$a_1 = \frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}, \quad a_3 = \frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}.$$

II. В качестве более удобной для вычислений формулы, точной опять таки для полиномов f степени не выше седьмой, приведем, например, такую. Полагая ради упрощения координат точек

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}, \quad a_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}, \quad a_4 = 1$$

и беря все заполнители равными нулю: $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, найдем, что

$$\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 = \frac{1}{18900}\Big\{ & 5\,(56n^2 - 855n + 2023)\,\omega(0, 0, \ldots, 0) + \\
& + 1215\,\omega\left(\frac{1}{9}, \ldots, \frac{1}{9}\right) + 7533\,\omega\left(\frac{4}{9}, \ldots, \frac{4}{9}\right) + \\
& + 37\,\omega(1, \ldots, 1) + 2187 \sum^{C_n^1} \omega\left(\frac{4}{9};\ \ 0, \ldots, 0\right) + \\
& + 16\,(148 - 35n) \sum^{C_n^1} \omega(1;\ \ 0, \ldots, 0) + \\
& + 560 \sum^{C_n^2} \omega(1, 1;\ 0, \ldots, 0)\Big\} + R, \\
R = -\frac{1}{243}\Big\{ & \frac{1}{15}\left[\sum \omega_{i^4}^{IV} - \frac{11}{40}\sum \omega_{i^3 j}^{IV}\right] - \\
& - \frac{1219}{2800}\sum \omega_{i^2 j^2}^{IV} + \frac{4}{7}\left[\sum \omega_{i^2 jk}^{IV} - \frac{11}{5}\sum \omega_{ijkl}^{IV}\right]\Big\} = \\
= -0{,}0002743 & \sum \omega_{i^4}^{IV} + 0{,}0000754 \sum \omega_{i^3 j}^{IV} - \\
& - 0{,}0017916 \sum \omega_{i^2 j^2}^{IV} + 0{,}0023516 \sum \omega_{i^2 j k}^{IV} - \\
& - 0{,}0051734 \sum \omega_{ijkl}^{IV}.
\end{aligned}\right\} \quad (50)$$

Проводя сопоставление коэффициентов, получим:

S	${}_0J_1$	J_{50}	${}_0J_1 - J_{50}$	S	${}_0J_1$	J_{50}	${}_0J_1 - J_{50}$
S_0	$1 = 1,00000$	1	—	S_4	$\frac{1}{9} = 0,11111$	$\frac{143}{1215}$	$-0,00658$
S_1	$\frac{1}{3} = 0,33333$	$\frac{1}{3}$	—	S_{31}	$\frac{1}{21} = 0,04762$	$\frac{8023}{170100}$	$+0,00045$
S_2	$\frac{1}{5} = 0,20000$	$\frac{1}{5}$	—	S_{22}	$\frac{1}{25} = 0,04000$	$\frac{8023}{170100}$	$-0,00717$
S_{11}	$\frac{1}{9} = 0,11111$	$\frac{1}{9}$	—	S_{211}	$\frac{1}{45} = 0,02222$	$\frac{149}{8505}$	$+0,00470$
S_3	$\frac{1}{7} = 0,14286$	$\frac{1}{7}$	—	S_{1111}	$\frac{1}{81} = 0,01235$	$\frac{149}{8505}$	$-0,00517$
S_{21}	$\frac{1}{15} = 0,06667$	$\frac{1}{15}$	—	...	...	...	...
S_{111}	$\frac{1}{27} = 0,03704$	$\frac{1}{27}$	—	...	...	...	...

§ 9

Для случая, когда $\nu = 4$, формулы (5) и (22) дают

$$\begin{aligned}
\omega(y_1, y_2, \ldots y_n) = A_0 + [A_{10\ldots0}\,y_1 + \ldots] + [(A_{20\ldots0}\,y_1^2 + \ldots) + (A_{110\ldots0}\,y_1 y_2 + \ldots)] + \\
+ [(A_{30\ldots0}\,y_1^3 + \ldots) + (A_{210\ldots0}\,y_1^2 y_2 + \ldots) + (A_{1110\ldots0}\,y_1 y_2 y_3 + \ldots)] + \\
+ [(A_{40\ldots0}\,y_1^4 + \ldots) + (A_{310\ldots0}\,y_1^3 y_2 + \ldots) + (A_{220\ldots0}\,y_1^2 y_2^2 + \ldots) + \\
+ (A_{2110\ldots0}\,y_1^2 y_2 y_3 + \ldots) + (A_{11110\ldots0}\,y_1 y_2 y_3 y_4 + \ldots)];
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
{}_0J_1 &= \lambda_1\,\omega(a_1,\ldots,a_1) + \lambda_2\,\omega(a_2,\ldots,a_2) + \\
&+ \Big[\lambda_3\,\omega(a_3,\ldots,a_3) + \overline{\lambda}_1 \sum^{C_n^1} \omega(a_3;\, b_1,\ldots,b_1)\Big] + \\
&+ \Big[\lambda_4\,\omega(a_4,\ldots,a_4) + \overline{\lambda}_2 \sum^{C_n^1} \omega(a_4;\, b_2,\ldots,b_2) + \overline{\lambda}_3 \sum^{C_n^2} \omega(a_4, a_4;\, b_3,\ldots,b_3)\Big] + \\
&+ \Big[\lambda_5\,\omega(a_5,\ldots,a_5) + \overline{\lambda}_4 \sum^{C_n^1} \omega(a_5;\, b_4,\ldots,b_4) + \overline{\lambda}_5 \sum^{C_n^1} \omega(a_5;\, b_5,\ldots,b_5) + \\
&+ \overline{\lambda}_6 \sum^{C_n^2} \omega(a_5, a_5;\, b_6,\ldots,b_6) + \overline{\lambda}_7 \sum^{C_n^3} \omega(a_5, a_5, a_5;\, b_7,\ldots,b_7)\Big] = \\
&= S_0 + \frac{1}{3} S_1 + \left(\frac{1}{5} S_2 + \frac{1}{9} S_{11}\right) + \left(\frac{1}{7} S_3 + \frac{1}{15} S_{21} + \frac{1}{27} S_{111}\right) + \\
&+ \left(\frac{1}{9} S_4 + \frac{1}{21} S_{31} + \frac{1}{25} S_{22} + \frac{1}{45} S_{211} + \frac{1}{81} S_{1111}\right).
\end{aligned}
$$

Отсюда и получились бы снова системы $(25_4')$ и $(25_4'')$.

I. Желая уменьшить число точек и упростить группы точек, достаточно опять взять

$$
\begin{gathered}
a_1 = a_2 = 0, \qquad a_3 = a_4 = b_5, \\
b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_6 = b_7 = 0,
\end{gathered}
$$

с тем, чтобы система (25_4) привелась, как и при ранее рассмотренных показателях степени ν, к тому виду, который соответствует случаю плоского решения в смысле Гаусса.

Полагая для сокращения записи

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mu_1 &= (\lambda_1 + \lambda_2) + C_{n-1}^1 (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2) + C_{n-1}^2 \overline{\lambda}_3 + C_{n-1}^1 \overline{\lambda}_4 + C_{n-1}^2 \overline{\lambda}_6 + C_{n-1}^3 \overline{\lambda}_7, \\
\mu_2 &= (\lambda_3 + \lambda_4) + (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2) + C_{n-1}^1 \overline{\lambda}_3 + C_{n-1}^1 \overline{\lambda}_5, \\
\mu_3 &= \lambda_5 + \overline{\lambda}_4 + \overline{\lambda}_5 + C_{n-1}^1 \overline{\lambda}_6 + C_{n-1}^2 \overline{\lambda}_7;
\end{aligned}
\right.
$$

$$
\left\{
\begin{aligned}
\mu_4 &= (\overline{\lambda}_1 + \overline{\lambda}_2) + C_{n-2}^1 \overline{\lambda}_3, \\
\mu_5 &= \overline{\lambda}_4 + C_{n-2}^1 \overline{\lambda}_6 + C_{n-2}^2 \overline{\lambda}_7, \\
\mu_6 &= \overline{\lambda}_6 + C_{n-3}^1 \overline{\lambda}_7,
\end{aligned}
\right.
$$

запишем системы в таком простом виде:

$$
\left.
\begin{aligned}
\mu_1 + \quad \mu_2 + \quad \mu_3 &= 1, \\
a_3\,\mu_2 + a_5\,\mu_3 &= \frac{1}{3}, \\
a_3^2\,\mu_2 + a_5^2\,\mu_3 &= \frac{1}{5}, \\
a_3^3\,\mu_2 + a_5^3\,\mu_3 &= \frac{1}{7}, \\
a_3^4\,\mu_2 + a_5^4\,\mu_3 &= \frac{1}{9}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (25_4')
$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_3^2\mu_4+a_5^2\mu_5+(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5=\frac{4}{45},\\
&a_3^3\mu_4+a_5^3\mu_5+(a_5+a_3)(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5=\frac{8}{105},\\
&a_3^3\mu_4+a_5^3\mu_5+(a_5+2a_3)(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5+a_3^3\overline{\lambda}_3+a_5^3\mu_6=\frac{20}{189},\\
&a_3^4\mu_4+a_5^4\mu_5+(a_5^2+a_5a_3+a_3^2)(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5=\frac{4}{63},\\
&a_3^4\mu_4+a_5^4\mu_5+(a_5^2+2a_5a_3+a_3^2)(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5=\frac{16}{225},\\
&a_3^4\mu_4+a_5^4\mu_5+(a_5^2+2a_5a_3+2a_3^2)(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5+a_3^4\overline{\lambda}_3+a_5^4\mu_6=\frac{4}{45},\\
&a_3^4\mu_4+a_5^4\mu_5+(a_5^2+2a_5a_3+3a_3^2)(a_5-a_3)^2\overline{\lambda}_5+a_3^4\overline{\lambda}_3+a_5^4\mu_6+a_5^4\overline{\lambda}_7=\frac{8}{81}
\end{aligned}\right\}\quad(25_4'')$$

В силу симметричности построения системы $(25_4')$ относительно неизвестных μ_2 и μ_3 мы скажем, что a_3 и a_5 удобно считать корнями одного и того же уравнения

$$py^2+qy+r=0,$$

а потому решение этой системы (а также и систем, соответствующих более высоким показателям степеней) можно вести таким путем:

$$+\left\{\begin{array}{l|l|l}
a_3\mu_2+a_5\mu_3=\frac{1}{3} & \cdot r & \\
a_3^2\mu_2+a_5^2\mu_3=\frac{1}{5} & \cdot q & \cdot r\\
a_3^3\mu_2+a_5^3\mu_3=\frac{1}{7} & \cdot p & \cdot q\\
a_3^4\mu_2+a_5^4\mu_3=\frac{1}{9} & & \cdot p
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{r}{3}+\frac{q}{5}+\frac{p}{7}=0,\\
&\frac{r}{5}+\frac{q}{7}+\frac{p}{9}=0;
\end{aligned}\right.$$

откуда находим, что

$$\frac{p}{\begin{vmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & \frac{1}{7}\end{vmatrix}}=\frac{q}{\begin{vmatrix}\frac{1}{7} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{9} & \frac{1}{5}\end{vmatrix}}=\frac{r}{\begin{vmatrix}\frac{1}{5} & \frac{1}{7}\\ \frac{1}{7} & \frac{1}{9}\end{vmatrix}},$$

или окончательно

$$\frac{p}{63}=\frac{q}{-70}=\frac{r}{15}.$$

Поэтому уравнение, определяющее величины a_3 и a_5, будет

$$63y^2-70y+15=0.$$

Координаты рассматриваемых точек являются действительно квадратами корней соответствующего полинома Лежандра первого рода. Итак,

$$a_3=\frac{35-2\sqrt{70}}{63},\quad a_5=\frac{35+2\sqrt{70}}{63}.$$

Решая теперь системы ($25'_4$) и ($25''_4$), получим

$$\mu_1 = \frac{64}{225},$$

$$\mu_2 = \frac{322 + 13\sqrt{70}}{900}, \quad \mu_3 = \frac{322 - 13\sqrt{70}}{900},$$

$$\mu_4 = \mu_1 \mu_2, \quad \mu_5 = \mu_1 \mu_3;$$

$$\mu_6 = \frac{7(17486 - 1847\sqrt{70})}{455625}.$$

После этого можно найти и все необходимые коэффициенты λ_i и $\overline{\lambda}_j$. Выбор $b_5 = a_3$ вытекает из требования системы (25), что $b_5 \neq b_4$.

II. В целях упрощения координат, участвующих в вычислении точек, достаточно было бы положить, разбирая, например, случай нечетного числа точек:

$$a_1 = 0, \quad a_2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}, \quad a_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad a_4 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}, \quad a_5 = 1,$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = b_6 = b_7 = 0, \quad b_5 = \frac{1}{4};$$

и т. д.

Таким образом видим, что путем надлежащего выбора неизвестных в системе (25), представляющей собою общее решение поставленной задачи, можно обобщить формулы Гаусса, Котеса и Чебышева на случай n-кратного интеграла.

§ 10

Ради облегчения вычислений при нахождении приближенного значения интеграла ${}_0J_1$ по формуле (22) целесообразно иметь возможно большее количество заполнителей b_j равными нулю, а затем единице. Поскольку же числовые значения заполнителей b_j выгодно выбирать среди чисел a_i, как это уже указывалось ранее, то следовательно возникает необходимость ввести 0 и 1 в число значений этих величин. С другой стороны, с точки зрения плоской задачи значения абсцисс 0 и 1 обеспечивают участие средней и крайних ординат при выбранных пределах интегрирования -1, $+1$.

Таким образом, получение формул, удобных для вычислений приближенных значений n-кратных интегралов, требует предварительного решения плоской задачи о вычислении определенного интеграла с участием средней и крайних ординат. Эта задача состоит в том, чтобы удовлетворить условию

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i [f(x_i) + f(-x_i)], \tag{51}$$

где все $m+2$ коэффициента λ_i подлежат определению, а из $m+2$ значений абсцисс x_i известны всего два значения: $x_0 = 0$, $x_{m+1} = 1$; остальные же m искомых координат удовлетворяют неравенству

$$0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < 1. \tag{52}$$

Наличие $2m+2$ неизвестных дает возможность сказать, что формула (51) будет точна в тех случаях, когда функция $f(x)$ — многочлен степени не выше $4m+3$, т. е. при

$$f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_{4m+2}x^{4m+2}+a_{4m+3}x^{4m+3}.$$

Введем новую функцию

$$F(x)=f(x)+f(-x)=2[a_0+a_2x^2+\ldots+a_{4m+2}x^{4m+2}]. \tag{53}$$

Формула (51) приведется теперь к виду

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\int_0^1 F(x)\,dx=2\left[a_0+\frac{a_2}{3}+\frac{a_4}{5}+\ldots+\frac{a_{4m+2}}{4m+3}\right]=$$
$$=2\sum_{i=0}^{m+1}\lambda_i[a_0+a_2x_i^2+a_4x_i^4+\ldots+a_{4m+2}x_i^{4m+2}],$$

и следовательно вся задача сведется к известной уже нам системе

$$\left.\begin{aligned}
&\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2+\ldots+\lambda_m+\lambda_{m+1}=1,\\
&\lambda_1y_1+\lambda_2y_2+\ldots+\lambda_my_m+\lambda_{m+1}=\frac{1}{3},\\
&\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\ldots+\lambda_m\lambda_m^2+\lambda_{m+1}=\frac{1}{5},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\lambda_1y_1^{2m+1}+\lambda_2y_2^{2m+1}+\ldots+\lambda_my_m^{2m+1}+\lambda_{m+1}=\frac{1}{4m+3},
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

где $y_j=x_j^2$ $(j=1, 2, \ldots, m)$ и $0<y_j<1$, согласно условию (52).

Составим по корням $y_1, y_2, \ldots, y_m$, 1 уравнение

$$p_{m+1}y^{m+1}+p_my^m+\ldots+p_1y+p_0=0 \tag{55}$$

и используем его следующим образом. Умножим второе уравнение системы (54) на свободный член p_0, третье уравнение на коэффициент p_1, четвертое на $p_2, \ldots,$ $(m+3)$-ье на p_{m+1} и сложим. Поступим аналогично, но начиная с 3-го, а не со 2-го уравнения; затем, начиная с 4-го, ..., $(m+1)$-го. Это даст нам m однородных уравнений, к которым добавим еще одно условие, что 1 есть корень составленного уравнения (55):

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{p_0}{3}+\frac{p_1}{5}+\ldots+\frac{p_{m+1}}{2m+5}=0,\\
&\frac{p_0}{5}+\frac{p_1}{7}+\ldots+\frac{p_{m+1}}{2m+7}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{p_0}{2m+1}+\frac{p_1}{2m+3}+\ldots+\frac{p_{m+1}}{4m+3}=0,\\
&p_0+p_1+\ldots+p_{m+1}=0.
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

Отличие последнего (добавленного) уравнения от остальных уравнений системы (56) приводит к тому, что решение этой системы сведется уже к полиномам не Лежандра, а к иным. Действительно, для полу-

чения многочлена, удовлетворяющего требованиям задачи, достаточно рассмотреть полином

$$z = y^{m+\frac{1}{2}} (y-1)^{m+1},$$

имеющий следующие корни: $x=0$ — корень кратности $2m+1$, и $x=\pm 1$ — корни кратности $m+1$. При этих условиях полином $\frac{dz}{dy}$ будет иметь значение $x=0$ корнем $(2m-1)$-ой кратности, а ± 1 корнями m-ой кратности, и сверх того простые вещественные корни $\pm {}_1\alpha_1$, удовлетворяющие условию $0 < {}_1\alpha_1 < 1$. Рассуждая аналогично, мы скажем, что полином $\frac{d^2z}{dy^2}$ будет обладать корнем $x=0$ кратности $2m-3$, корнями $x=\pm 1$ кратности $m-1$ и, кроме них, простыми вещественными корнями $\pm {}_2\alpha_1$ и $\pm {}_2\alpha_2$: $0 < {}_2\alpha_1 < {}_1\alpha_1 < {}_2\alpha_2 < 1$. И т. д. Наконец, о полиноме $\frac{d^m z}{dy^m}$, который обозначим через $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{d^m}{dy^m} y^{m+\frac{1}{2}} (y-1)^{m+1}, \text{ где } y = x^2, \tag{57}$$

мы уже скажем, что он будет обладать лишь $2m+3$ простыми вещественными корнями: $0, \pm {}_m\alpha_1, \pm {}_m\alpha_2, \ldots, \pm {}_m\alpha_m, \pm 1$, удовлетворяющими условию $0 < {}_m\alpha_1 < {}_m\alpha_2 < \ldots < {}_m\alpha_m < 1$.

Таким образом, найденные значения ${}_m\alpha_j$ можно будет принять за искомые значения абсцисс x_j, как только мы убедимся в том, что система (56) ими удовлетворяется. Для этого рассмотрим такие интегралы:

$$J_\mu = \int_0^1 x^{2\mu-1} \varphi(x)\, dx, \text{ где } \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Пользуясь условием (57), сразу убеждаемся в том, что все они равны нулю. Записав же функцию $\varphi(x)$ в виде

$$\varphi(x) = q_0 x + q_1 x^3 + \ldots + q_{m+1} x^{2m+3}, \tag{58}$$

найдем, что эти же интегралы дают требуемые системой (56) суммы

$$J_\mu = \int_0^1 [q_0 x^{2\mu} + q_1 x^{2\mu+2} + \ldots + q_{m+1} x^{2m+2\mu+2}]\, dx =$$

$$= \frac{q_0}{2\mu+1} + \frac{q_1}{2\mu+3} + \ldots + \frac{q_{m+1}}{2m+2\mu+3}, \text{ где } \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Кроме того, непосредственно убеждаемся и в том, что $\varphi(1)=0$. Таким образом видим, что коэффициенты полинома $\varphi(x)$ удовлетворяют всем требованиям системы (56), а потому искомые коэффициенты p уравнения (55) достаточно взять равными коэффициентам q_i полинома (58). Следовательно они определяются из условия

$$\varphi(x) = \frac{d^m}{dy^m} y^{m+\frac{1}{2}} (y-1)^{m+1} =$$

$$= (p_0 + p_1 y + \ldots + p_m y^m + p_{m+1} y^{m+1}) \sqrt{y}, \text{ где } y = x^2. \tag{59}$$

Найдя же из уравнения (59) $\varphi(x)=0$ значения абсцисс x_i, требуемых формулой (51), мы найдем с помощью системы (54) и значения коэффициентов λ_i, так что для случая, когда функция $f(x)$ — многочлен степени не выше $4m+3$, формула (51) будет действительно удовлетворена тождественно.

Для случая произвольной функции $f(x)$, допускающей разложение ее в ряд Маклорена, получим согласно формуле (53), сохраняя найденные значения абсцисс и коэффициентов:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \int_0^1 F(x)\,dx = \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i F(x_i) + R, \tag{51_1}$$

или

$$\int_0^1 \left[F(0) + \frac{F''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{F^{(4m)}(0)}{(4m)!}x^{4m} + \frac{F^{(4m+2)}(\theta x)}{(4m+2)!}x^{4m+2} \right] dx =$$
$$= \sum_{i=0}^{m+1} \lambda_i \left[F(0) + \frac{F''(0)}{2!}x_i^2 + \ldots + \frac{F^{(4m)}(0)}{(4m)!}x_i^{4m} + \frac{F^{(4m+2)}(\theta_i)}{(4m+2)!}x_i^{4m+2} \right] + R;$$

откуда, на основании системы (54) и формулы (36),

$$R = \frac{1}{(4m+3)!}\left[F^{(4m+2)}(\eta_1) - F^{(4m+2)}(\eta_2)\right] =$$
$$= \frac{1}{(4m+3)!}\left\{\left[f^{(4m+2)}(\eta_1) - f^{(4m+2)}(\eta_2)\right] - \left[f^{(4m+2)}(-\eta_2) - f^{(4m+2)}(-\eta_1)\right]\right\} =$$
$$= \frac{1}{(4m+3)!}(\eta_1 - \eta_2)\left[f^{(4m+3)}(\xi_1) - f^{(4m+3)}(\xi_2)\right] =$$
$$= \frac{1}{(4m+3)!}(\eta_1 - \eta_2)(\xi_1 - \xi_2) f^{(4m+4)}(\xi)$$
$$(-1 < \xi < +1).$$

Убедившись таким образом в том, что остаточный член формулы (51_1) выражается через производную $(4m+4)$-го порядка, найдем ее коэффициент, оставшийся в предыдущем выражении неопределенным. Из той же формулы (51_1) имеем

$$2\left[f(0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot\frac{1}{3} + \ldots + \frac{f^{(4m+2)}(0)}{(4m+2)!}\cdot\frac{1}{4m+3} \right] +$$
$$+ \frac{2f^{(4m+4)}(0)}{(4m+4)!}\cdot\frac{1}{4m+5} + \ldots = 2\sum_{i=0}^{m+1}\lambda_i\left[f(0) + \frac{f''(0)}{2!}x_i^2 + \ldots + \right.$$
$$\left. + \frac{f^{(4m+2)}(0)}{(4m+2)!}x_i^{4m+2} \right] + \frac{2f^{(4m+4)}(0)}{(4m+4)!}\cdot\sum_{i=0}^{m+1}\lambda_i x_i^{4m+4} + \ldots + R,$$

так что окончательно

$$R = \frac{2f^{(4m+4)}(0)}{(4m+4)!}\left(\frac{1}{4m+5} - \sum_{i=0}^{m+1}\lambda_i x_i^{4m+4}\right) + \ldots,$$

или следовательно

$$R = \frac{2}{(4m+4)!}\left(\frac{1}{4m+5} - \sum_{i=0}^{m+1}\lambda_i x_i^{4m+4}\right) f^{(4m+4)}(\xi). \tag{60}$$
$$(-1 < \xi < +1)$$

Уравнение (55) дает возможность подсчитать полученный коэффициент выражения (60). Действительно

$$y_i^{m+1}(p_{m+1}y_i^{m+1}+p_m y_i^m+\ldots+p_1 y_i+p_0)=0$$

или

$$y_i^{2m+2}=-\frac{1}{p_{m+1}}(p_m y_i^{2m+1}+p_{m-1}y_i^{2m}+\ldots+p_1 y_i^{m+2}+p_0 y_i^{m+1}),$$

так что, пользуясь системой (54), найдем

$$\frac{1}{4m+5}-\sum_{i=0}^{m+1}\lambda_i y_i^{2m+2}=\frac{1}{4m+5}+\frac{1}{p_{m+1}}\left(p_m\frac{1}{4m+3}+\ldots+p_1\frac{1}{2m+5}+\right.$$

$$\left.+p_0\frac{1}{2m+3}\right)=\frac{1}{p_{m+1}}\left(\frac{p_{m+1}}{4m+5}+\frac{p_m}{4m+3}+\ldots+\frac{p_1}{2m+5}+\frac{p_0}{2m+3}\right).$$

Для вычисления последней суммы рассмотрим равный ей по значению интеграл

$$\int_0^1 x^{2m+1}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 y^m\,d\,\frac{d^{m-1}}{dy^{m-1}}y^{m+\frac{1}{2}}(y-1)^{m+1}=$$

$$=\frac{-m!\,(m+1)!}{2\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{5}{2}\right)\ldots\left(2m+\frac{5}{2}\right)}.$$

Выражение остаточного члена (60) перепишется теперь следующим образом:

$$R=-\frac{m!\,(m+1)!}{p_{m+1}\left(m+\frac{3}{2}\right)\left(m+\frac{5}{2}\right)\ldots\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\cdot\frac{f^{(4m+4)}(\xi)}{(4m+4)!},\qquad (60_1)$$

где остается еще заменить коэффициент p_{m+1} его значением, которое найдем из формулы (59)

$$(2m+3)!\,p_{m+1}=\frac{d^{2m+3}}{dx^{2m+3}}\varphi(x)=\frac{d^{3m+3}}{dy^m\,dx^{2m+3}}y^{m+\frac{1}{2}}(y-1)^{m+1}=$$

$$=\left(2m+\frac{3}{2}\right)\left(2m+\frac{1}{2}\right)\ldots\left(m+\frac{5}{2}\right)(2m+3)(2m+2)\ldots 2\cdot 1$$

и которое следовательно оказывается равным

$$p_{m+1}=\left(m+\frac{5}{2}\right)\left(m+\frac{7}{2}\right)\ldots\left(2m+\frac{3}{2}\right).$$

Внося это выражение в формулу (60_1), получим наконец, что

$$R=-\frac{m!\,(m+1)!}{\left(m+\frac{3}{2}\right)\left[\left(m+\frac{5}{2}\right)\left(m+\frac{7}{2}\right)\ldots\left(2m+\frac{3}{2}\right)\right]^2\left(2m+\frac{5}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{f^{(4m+4)}(\xi)}{(4m+4)!}\qquad(-1<\xi<+1).\qquad (60_2)$$

Чтобы иметь возможность провести сравнение полученного выражения остаточного члена R с остаточным членом формулы Гаусса, выполним дальнейшие преобразования выражения (60_2):

$$R = -\frac{2m+3}{2m+2} \cdot \frac{2^{4m+5}}{4m+5} \cdot \frac{[(2m+2)!]^2}{[(2m+3)(2m+4)\ldots(4m+4)]^2} \cdot \frac{f^{(4m+4)}(\xi)}{(4m+4)!}.$$

Убеждаемся в том, что остаточный член формулы (51_1) отличается от остаточного члена формулы Гаусса единственно за счет наличия сомножителя $-\frac{2m+3}{2m+2}$, если принять в формуле Гаусса $n=2m+2$. Это говорит о том, что вычисления, выполняемые по этим двум формулам (при $n=2m+2$), давая отклонения разных знаков, в то же время мало отличаются друг от друга по величине, что имеет свои удобства. Кроме того надо отметить тот факт, что формула (51_1) частично обладает рациональными координатами и коэффициентами, что всегда заметно облегчает вычисления.

Разбирая отдельные числовые значения m, получим при $m=0$ известную формулу Симпсона; при $m=1$ найдем формулу [8]

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{90}\Big\{32 f(0) + 49\Big[f\Big(-\sqrt{\tfrac{3}{7}}\Big) + f\Big(+\sqrt{\tfrac{3}{7}}\Big)\Big] + \\ &\qquad + 9\,[f(-1)+f(+1)]\Big\} + R; \\ &R = -\frac{32}{2205}\cdot\frac{f^{\mathrm{VIII}}(\xi)}{8!} = -0{,}000\,000\,36\, f^{\mathrm{VIII}}(\xi) \\ &\qquad (-1<\xi<+1). \end{aligned}\right\} \tag{61}$$

При $m=2$ формула (51_1) принимает вид

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{1050}\Big\{512 f(0) + 3\,(124+7\sqrt{15})\Big[f\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{11}-\tfrac{2}{11}\sqrt{\tfrac{5}{3}}}\Big) + \\ &+ f\Big(+\sqrt{\tfrac{5}{11}-\tfrac{2}{11}\sqrt{\tfrac{5}{3}}}\Big)\Big] + 3\,(124-7\sqrt{15})\Big[f\Big(-\sqrt{\tfrac{5}{11}+\tfrac{2}{11}\sqrt{\tfrac{5}{3}}}\Big) + \\ &+ f\Big(+\sqrt{\tfrac{5}{11}+\tfrac{2}{11}\sqrt{\tfrac{5}{3}}}\Big)\Big] + 50\,[f(-1)+f(+1)]\Big\} + R, \\ &R = -\frac{256}{297297}\cdot\frac{f^{\mathrm{XII}}(\xi)}{12!} = -0{,}000\,000\,000\,0018\, f^{\mathrm{XII}}(\xi). \\ &\qquad (-1<\xi<+1) \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

и т. д.

Переходя от плоской задачи к пространственной, мы скажем, что случаю, когда $m=0$, соответствует значение показателя $\nu=1$, а это приведет нас снова к формуле (27_1). Значению $m=1$ будет соответствовать значение $\nu=3$; выполняя надлежащие вычисления, мы придем к формуле

$$
\left.\begin{aligned}
{}_0J_1 = \frac{1}{810}\Big\{4(3n^2-47n+116)\,\omega(0,0,\ldots,0)+343\,\omega\left(\frac{3}{7};\frac{3}{7},\ldots,\frac{3}{7}\right)+\\
+3\omega(1,1,\ldots,1)+98\sum^{C_n^1}\omega\left(\frac{3}{7};0,0,\ldots,0\right)+\\
+6(17-4n)\sum^{C_n^1}\omega(1;0,0,\ldots,0)+24\sum^{C_n^2}\omega(1,1;0,0,\ldots,0)\Big\}+R,\\
R=-\frac{2}{6615}\sum\omega^{IV}_{i^4}+\frac{1}{525}\sum\omega^{IV}_{i^2j^2}+\frac{2}{945}\sum\omega^{IV}_{i^2jk}-\frac{16}{2835}\sum\omega^{IV}_{ijkl}=\\
=-0{,}0003023\sum\omega^{IV}_{i^4}+\\
+0{,}0019048\sum\omega^{IV}_{i^2j^2}+\\
+0{,}0021164\sum\omega^{IV}_{i^2jk}-\\
-0{,}0056437\sum\omega^{IV}_{ijkl}.
\end{aligned}\right\}\quad(63)
$$

Формула (63) абсолютно точна для случая, когда функция f является полиномом степени не выше седьмой.

Использование формулы (62) для задачи n-мерного пространства привело бы к довольно громоздкой формуле, практическая ценность которой вследствие этого ниже, чем формулы (63). Зато интересно придать формуле (62) тот вид, который требуется пространственной задачей:

$$
\left.\begin{aligned}
\int_0^1\omega(x^2)\,dx=\frac{1}{1050}\Big\{256\omega(0)+3(124+7\sqrt{15})\,\omega\left(\frac{15-2\sqrt{15}}{33}\right)+\\
+3(124-7\sqrt{15})\,\omega\left(\frac{15+2\sqrt{15}}{33}\right)+50\,\omega(1)\Big\}+R,\\
R=-\frac{128}{297297}\cdot\frac{\omega^{VI}(\xi)}{6!}=-0{,}000\,000\,597\,98\,\omega^{VI}(\xi)\\
(0<\xi<1)
\end{aligned}\right\}\quad(62_1)
$$

с иной целью, а именно для того, чтобы показать практическую ценность новой редакции ее остаточного члена, где порядок производной вдвое меньше, да и интервал значений ξ будет $(0, +1)$, а не $(-1, +1)$, что очень важно.

§ 11

Таким образом, мы видим, что задача приближенного вычисления n-кратного интеграла ${}_\alpha J_\beta$ с произвольной областью интегрирования сводится с помощью формул (1)—(3) к интегралу ${}_0J_1$, распространенному на область единичного куба. Этот же интеграл в свою очередь заменяется соответствующей суммой (22), слагаемыми которой являются значения подинтегральной функции, вычисленные в тех или других точках указанного куба. Выведенные примеры формул решают поставленную задачу различно:

1° как обобщение плоской задачи в смысле Гаусса — формулы (26) и (26_1), (39) и (39_1), (40) и (40_1), (49);

2° в смысле Котеса — формулы (27) и (27_1), (28) и (28_1), (43) и (43_1), (44) и (44_1), (45) и (45_1), (50);

3° в смысле Чебышева — формулы (29) и (29_1), (30) и (30_1), (31) и (31_1), (46) и (46_1), (47) и (47_1);

4° с использованием фиксированных координат 0 и 1 — формулы (27) и (27_1), (51) и (51_1), (60_2), (61), (62) и (62_1), (63);

5° путем приведения n-кратного интеграла к однократному — формула (37);

6° путем использования производных сперва для уточнения результата вычисления и лишь затем для оценки его погрешности — формула (48);

7° при различных условиях — формулы (33), (34), (38), (41) и (41_1), (42) и (42_1).

§ 12

Приведем несколько примеров практического применения рассмотренных выше положений и формул.

Пример 1.

$$J=\int_0^1\int_0^1 \cos x_1 x_2\, dx_1\, dx_2.$$

В данном случае $\omega(y_1, y_2)=\cos\sqrt{y_1 y_2}$, а потому по формуле ($26_1$) найдем, что

$$J=\cos\frac{1}{3}+R=0{,}9450+R,$$

где

$$R=\frac{2}{45}\sum\omega''_{i2}=\frac{2}{45}\cdot\frac{y_1^2+y_2^2}{12}\left(1-\frac{y_1 y_2}{10}+\frac{y_1^2 y_2^2}{280}-\dots\right),$$

так что

$$0<R<0{,}0067.$$

Вычисляя же этот интеграл по формуле (40_1), получим

$$+\left\{\begin{array}{rl|l} \omega(0,0) & =1{,}00\,000 & \cdot 16\\ \omega\left(\frac{3}{5},\frac{3}{5}\right) & =0{,}82\,534 & \cdot 25\\ \omega\left(\frac{3}{5},0\right)+\omega\left(0,\frac{3}{5}\right) & =2{,}00\,000 & \cdot 20 \end{array}\right.$$

$$J=\frac{1}{81}\cdot 76{,}6335+R=0{,}94609+R,$$

где

$$R=\frac{2}{525}\sum\omega'''_{i3}=-\frac{2}{525}\cdot\frac{y_1^3+y_2^3}{120}\left(1-\frac{y_1 y_2}{140}+\frac{y_1^2 y_2^2}{5040}-\dots\right),$$

так что

$$-0{,}00006 < R < 0{,}00000.$$

Точное значение этого интеграла si 1

$$J = \operatorname{si} 1 \approx 0{,}9461.$$

Пример 2.

$$J = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sqrt{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}\, dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

Пользуясь формулой (37), получаем

$$J = \int_0^1 \sqrt{1 + 3x^2}\, dx + R = 1 + \frac{1}{\sqrt{12}} \ln (2 + \sqrt{3}) + R = 1{,}3802 + R,$$

где

$$R = -\frac{4}{45} \sum \omega_{ij}'' = -\frac{4}{45} \cdot \frac{-3}{4\,(1 + y_1 + y_2 + y_3)^{3/2}} = \frac{1}{15\,(1 + y_1 + y_2 + y_3)^{3/2}}$$

так что

$$0{,}0083 < R < 0{,}0667.$$

Применяя же формулу (50), найдем

$$+\left\{\begin{array}{r|r}
\omega(0,\,0,\,0) = 1{,}000\,0000 & \cdot - 190 \\
\omega\left(\frac{1}{9},\,\frac{1}{9},\,\frac{1}{9}\right) = 1{,}154\,7005 & \cdot\ 1215 \\
\omega\left(\frac{4}{9},\,\frac{4}{9},\,\frac{4}{9}\right) = 1{,}527\,5252 & \cdot\ 7533 \\
\omega(1,\,1,\,1) = 2{,}000\,0000 & \cdot\ 37 \\
\sum^{C_3^1} \omega\left(\frac{4}{9};\,0,\,0\right) = 3{,}605\,5513 & \cdot\ 2187 \\
\sum^{C_3^1} \omega(1;\,0,\,0) = 4{,}242\,6407 & \cdot\ 688 \\
\sum^{C_3^2} \omega(1,\,1;\,0) = 5{,}196\,1524 & \cdot\ 560
\end{array}\right.$$

$$J = \frac{1}{18\,900} \cdot 26\,507{,}931 + R_1 = 1{,}4025 + R_1,$$

где

$$-0{,}0057 < R_1 < +0{,}0070.$$

Если же воспользоваться формулой (48), то окажется, что

$$J = 1{,}4142 - 0{,}0118 + R_2 = 1{,}4024 + R_2,$$

где

$$-0{,}0055 < R_2 < +0{,}0030,$$

что дает результат даже несколько лучший, чем формула (50).

Пример 3. Вычислим $\ln 2$ по формуле (62_1)

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{c+x} = \int_0^1 \frac{2c}{c^2 - x^2}\, dx = \ln \frac{c+1}{c-1},$$

где

$$\omega(y) = \frac{2c}{c^2 - y}.$$

При $c = 3$ получаем

$$\ln 2 = \frac{262\,883}{379\,260} + R = 0{,}693\,147\,181\,35 + R,$$

где

$$-0{,}000\,000\,001\,23 < R < -0{,}000\,000\,000\,54,$$

а потому

$$0{,}693\,147\,180\,12 < \ln 2 < 0{,}693\,147\,180\,81.$$

Между тем, пользуясь формулой Гаусса при 7 ординатах, получим для интеграла $\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{3+x} = \ln 2$ худшее значение остаточного члена R:

$$+0{,}000\,000\,000\,017 < R < +0{,}000\,000\,566,$$

не дающее возможности ручаться за столько же десятичных знаков, как в предыдущем случае.

Харьковский инженерно-строительный институт

Поступило 20. I. 1949

ЛИТЕРАТУРА

[1] Журавский А. М., О приближенных кратных квадратурах, Изв. Ак. Наук СССР, серия мат., (1937), № 1.
[2] Стеффенсен И. Ф., Теория интерполяции, ОНТИ, 1935.
[3] Уиттекер Э. и Ватсон Г., Курс современного анализа, ГТТИ, 1933—34.
[4] Уиттекер Э. и Робинсон Г., Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1933.
[5] Франк М. Л., Метод приближенного вычисления двукратных интегралов, распространенных по площади прямоугольника, Труды Ленингр. индустр. инст., 1938, № 5.
[6] Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Teubner, Leipzig, 1904—1916.
[7] Hermite Ch., Cours d'Analyse, Paris, 1891.
[8] Безикович Я. С., О формулах механических квадратур с n ординатами, верных для многочленов степени не выше $2n-2$ и $2n-3$, Труды Ленингр. индустр. инст., 1937, № 4.

A. TIETZ. ANGENÄHERTE BERECHNUNG n-FACHER INTEGRALE

ZUSAMMENFASSUNG

Für die Lösung der Aufgabe der angenäherten Berechnung des mehrfachen Integrals benutzt man gewöhnlich die Methode der aufeinanderfolgenden angenäherten Berechnungen der einzelnen Quadraturen.

In der vorliegenden Arbeit betrachten wir, im Gegenteil, das n-fache Integral, mit beliebiger Zahl n der Integrationsveränderlichen, und stellen die Grundsätze der vernunftgemässen Auswahl der Punktgruppen

im Integrationsbereich fest. Als die allgemeine Lösung leiten wir zwei Gleichungssysteme ab, die die Punktkoordinaten und Summandskoeffizienten bestimmen. Wir führen die Lösungen dieser Systeme an, die sich als die Verallgemeinerung klassischer ebener Aufgaben auf den Fall des n-dimensionalen Raumes darstellen. Wir legen auch eine solche Lösung vor, die, vermittels einiger fixierter Punkte des Einheitswürfels, der Berechnungsprozess erleichtert. Für alle Formeln führen wir die Abschätzung des Berechnugsfehlers durch.

Редактор **В. А. Толстиков** Техредактор **Е. Шнобель** Корректор **А. Н. Опер**

Сдано в набор 23/VII 1940 г. А33211. Подписано к печати 31/X 1940 г.
Формат $70\times108^{1}/_{16}$. $7^{1}/_{4}$ п. л.+2 вклейки. Уч.-изд. 10,6. Уч.-а. л. 9,9. 49 000 зн. в п. л.
Тираж 2300 экз. АНИ 1949. Заказ 1325.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный, 9.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 465—478 Série mathématique

Посвящается памяти
В. И. Гливенко

А. А. ЛЯПУНОВ

О ВПОЛНЕ АДДИТИВНЫХ ВЕКТОР-ФУНКЦИЯХ

(*Представлено академиком* А. Н. Колмогоровым)

Изучается множество значений вполне аддитивной функции, принимающей значения из n-мерного векторного пространства. Доказано, что это множество замкнуто, а в случае, когда функция лишена скачков, то оно выпукло. Кроме того в этом последнем случае изучено поведение функции, когда ее значения принадлежат границе указанного множества.

Известно, что вполне аддитивная функция множеств, определенная для всех B-множеств отрезка и принимающая действительные значения, имеет в качестве множества значений замкнутое множество, а в случае, когда она лишена скачков, — замкнутый сегмент. Кроме того относительно такой функции естественным образом определяется понятие метрического типа множества; оказывается, что в случае функции, лишенной скачков, в концы сегмента отображается в точности по одному метрическому типу. Очевидно, наконец, что всякий замкнутый сегмент, содержащий начало координат, является множеством значений некоторой вполне аддитивной функции.

Настоящая работа посвящена выяснению вопроса о том, в каком смысле эти свойства сохраняются для вполне аддитивных функций, значения которых суть векторы n-мерного линейного пространства.

Пользуюсь случаем выразить глубокую благодарность А. Н. Колмогорову, давшему мне при редактировании этой работы ряд чрезвычайно ценных указаний, которыми я воспользовался, особенно при доказательстве теоремы II.

§ 1

Мы будем рассматривать некоторую систему подмножеств $\{E\}$ некоторого абстрактного множества X, инвариантную относительно сложений с конечным или счетным числом слагаемых и взятия дополнений, а также n-мерное эвклидово пространство R^n. Во всем дальнейшем буквами E, $\mathscr{E}$, H, B с различными индексами обозначаются множества системы $\{E\}$; буквой x с различными индексами—элементы множества X (мы будем называть их точками множества X), а буквами a, b, c — векторы (или точки) пространства R^n.

Определение 1. Ряд векторов назовем абсолютно сходящимся, если сходится ряд из их длин.

Очевидно, последовательность частных сумм такого ряда имеет предел, т. е. ряд сходится.

Определение 2. Функцию $\varphi(E)$, определенную на всех множествах системы $\{E\}$ и принимающую значения из R^n, назовем вполне аддитивной вектор-функцией, если, какова бы ни была система попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$, ряд

$$\varphi(E_1)+\varphi(E_2)+\ldots+\varphi(E_n)+\ldots$$

абсолютно сходится и

$$\varphi\left(\sum E_n\right)=\sum \varphi(E_n).$$

Определение 3. Мы будем говорить, что функция $\varphi(E)$ тождественно обращается в нуль, $\varphi(E)\equiv 0$, на множестве E, если она равна нулю на всех его подмножествах, входящих в $\{E\}$.

Определение 4. Метрическим типом множества E мы будем называть совокупность всех множеств E', таких, что

$$\varphi(E'-E)\equiv\varphi(E-E')\equiv 0.$$

Метрический тип множества E будем обозначать E^*. Наряду с функцией $\varphi(E)$ мы будем рассматривать функцию $\varphi(E^*)$, определенную так:

$$\varphi(E^*)=\varphi(E).$$

Определение 5. Если множество E таково, что $\varphi(E)\neq 0$, и для всякого $E_1\subset E$ имеет место одно из двух:

$$\text{либо } \varphi(E_1)=0, \quad \text{либо } \varphi(E_1)=\varphi(E),$$

то мы будем говорить, что на множестве E функция $\varphi(E)$ имеет скачок.

Определение 6. Если существует система попарно непересекающихся множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ такая, что $\sum E_n=X$, и на каждом из них функция $\varphi(E)$ имеет скачок, то мы будем говорить, что $\varphi(E)$ есть функция скачков.

ЛЕММА I. *Какова бы ни была вполне аддитивная вектор-функция $\varphi(E)$, существуют два взаимно дополнительных множества E' и E'' таких, что $\varphi(E'\cdot E)$ лишена скачков, а $\varphi(E''\cdot E)$ является функцией скачков.*

Доказательство. Пусть $\{\overline{E^*}\}$ есть совокупность всех метрических типов множеств, на которых $\varphi(E)$ имеет скачок. Покажем, что их не больше, чем счетное число.

Пусть $\varphi(E)$ имеет скачки на E_1 и на E_2 и $E_1^*\neq E_2^*$. Тогда $\varphi(E_1\cdot E_2)=0$.

Так как $\varphi(E)$ имеет скачок на E_1, то есть только две возможности: либо $\varphi(E_1\cdot E_2)=\varphi(E_1)$, либо $\varphi(E_1\cdot E_2)=0$. В первом случае также $\varphi(E_1\cdot E_2)=\varphi(E_2)$. Но тогда

$$\varphi(E_1-E_1\cdot E_2)\equiv\varphi(E_2-E_1\cdot E_2)\equiv 0,$$

т. е. $E_1^*=E_2^*$, что неверно. Таким образом $\varphi(E_1\cdot E_2)=0$, и следовательно $\varphi(E_1-E_1\cdot E_2)=\varphi(E_1)$, т. е. метрические типы E_1^* и E_2^* имеют непересекающиеся представители ($E_1-E_1\cdot E_2$ и E_2).

Допустим теперь, что скачков несчетно много. Опираясь на то, что пересечение счетного числа представителей некоторого метрического типа есть представитель того же метрического типа, можно построить трансфинитную последовательность попарно непересекающихся представителей различных метрических типов, мощности $\aleph_1$, на каждом из которых $\varphi(E)$ имеет скачок. Однако это противоречит полной аддитивности. Тем самым счетность семейства $\{\overline{E}\}$ доказана. Выберем для каждого из них по представителю. Сумму их обозначим через E', а дополнение к ней через E''. Легко видеть, что эти множества удовлетворяют всем требованиям леммы.

Определение 7. Если вполне аддитивные вектор-функции $\varphi_1(E)$ и $\varphi_2(E)$ определены на одном и том же семействе множеств $\{E\}$ и соотношение $\varphi_1(E)=0$ влечет за собой $\varphi_2(E)=0$, то функция $\varphi_2(E)$ абсолютно непрерывна относительно $\varphi_1(E)$.

Замечание 1. Если функции $\varphi_1(E)$ и $\varphi_2(E)$ определены на одном и том же семействе множеств $\{E\}$, то существуют два взаимно дополнительных множества E_1 и E_2 таких, что $\varphi_1(E_1)\equiv 0$ и $\varphi_2(E\cdot E_2)$ абсолютно непрерывны относительно $\varphi_1(E\cdot E_2)$.

Замечание 2. Точно так же, если вполне аддитивные вектор-функции $\varphi_1(E), \ldots, \varphi_n(E)$ определены на одном и том же семействе множеств $\{E\}$ и лишены скачков, то существует конечная система попарно непересекающихся множеств

$$E_1, E_2, \ldots, E_k, \quad \sum_{i=1}^{k} E_i = X$$

такая, что для всякого $i\leqslant k$ можно подобрать такое расположение функций

$$\varphi_{j_1(i)}(E),\ \varphi_{j_2(i)}(E), \ldots, \varphi_{j_n(i)}(E),$$

при котором $\varphi_{j_{m+1}(i)}(E)$ абсолютно непрерывна относительно $\varphi_{j_m(i)}(E)$, каково бы ни было $m<k$.

ЛЕММА II. *Пусть $\mu(\lambda)$ — действительная абсолютно непрерывная функция, определенная на сегменте* $[0, 1]$ *и* $\mu(0)=0$. *Тогда существует измеримая B-функция* $\tau(\lambda)$, *имеющая следующие свойства:*

1° $0\leqslant\tau(\lambda)\leqslant 1$,

2° $\mathrm{mes}\,[\tau(\lambda)<\tau]=\tau \quad (0\leqslant\tau\leqslant 1)$, *

3° $\displaystyle\int\limits_{[\tau(\lambda)<\tau]} \mu'\,d\lambda=\tau\cdot\mu(1)$.

Доказательство. Функция $\tau(\lambda)$ вполне определяется множествами

$$\mathscr{E}_{nk}=\left[\frac{k}{2^n}<\tau(\lambda)<\frac{k+1}{2^n}\right],$$

где $k=0, 1, 2, \ldots, 2^n-1$.

---

* Символ [ ] обозначает множество всех точек x, в которых выполнено условие, стоящее в скобках.

Множества $\mathscr{E}_{nk}$ мы будем строить по индукции

$$\mathscr{E}_{00} = [0 \leqslant \tau(\lambda) \leqslant 1] = [0, 1].$$

Очевидно

$$\text{mes}\, \mathscr{E}_{00} = 1, \quad \int\limits_{\mathscr{E}_{00}} \mu'\, d\lambda = \mu(1).$$

Допустим, что множество $\mathscr{E}_{nk}$ построено так, что

$$\left.\begin{aligned} &\text{mes}\, \mathscr{E}_{nk} = \frac{1}{2^n}, \\ &\int\limits_{\mathscr{E}_{nk}} \mu'\, d\lambda = \frac{\mu(1)}{2^n}. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Покажем, как строить множества $\mathscr{E}_{n+1,\, 2k}$ и $\mathscr{E}_{n+1,\, 2k+1}$. Обозначим через $(H)_{x_1}^{x_2}$ часть множества H, попавшую в интервал $[x_1\, x_2]$. Пусть $\xi(x)$ есть наименьшее из чисел, имеющих свойство

$$\text{mes}\, (\mathscr{E}_{nk})_x^{\xi(x)} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Мы будем считать, что $\xi(x)$ определена, лишь если $x \leqslant x_1$, где x_1 таково, что

$$\text{mes}\, (\mathscr{E}_{nk})_0^{x_1} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Очевидно, для всех таких x, $\xi(x)$ определена. Рассмотрим функцию

$$\omega(x) = \int\limits_{(\mathscr{E}_{nk})_x^{\xi(x)}} \mu'\, d\lambda.$$

Очевидно $\omega(x)$ непрерывна и

$$\omega(0) + \omega(x_1) = \int\limits_{\mathscr{E}_{nk}} \mu'\, d\lambda = \frac{\mu(1)}{2^n}.$$

Тогда существует такое число x_2, что

$$\omega(x_2) = \frac{\mu(1)}{2^{n+1}}.$$

В самом деле, если $\omega(0) = \frac{\mu(1)}{2^{n+1}}$, то мы положим $x_2 = 0$; в противном случае одно из чисел $\omega(0)$ и $\omega(1)$ больше, а другое меньше, чем $\frac{\mu(1)}{2^{n+1}}$. Тогда в силу непрерывности функции $\omega(x)$ найдется требуемое число x_2 такое, что $0 < x_2 < x_1$. Положим

$$\mathscr{E}_{n+1,\, 2k} = (\mathscr{E}_{nk})_{x_2}^{\xi(x_2)},$$
$$\mathscr{E}_{n+1,\, 2k+1} = \mathscr{E}_{nk} - \mathscr{E}_{n+1,\, 2k}.$$

Тогда

$$\text{mes}\, \mathscr{E}_{n+1,\, 2k} = \text{mes}\, (\mathscr{E}_{nk})_{x_2}^{\xi(x_2)} = \frac{1}{2^{n+1}},$$
$$\int\limits_{\mathscr{E}_{n+1,\, 2k}} \mu'\, d\lambda = \omega(x_2) = \frac{\mu(1)}{2^{n+1}},$$
$$\text{mes}\, \mathscr{E}_{n+1,\, 2k+1} = \text{mes}\, \mathscr{E}_{nk} - \text{mes}\, \mathscr{E}_{n+1,\, 2k} = \frac{1}{2^{n+1}},$$
$$\int\limits_{\mathscr{E}_{n+1,\, 2k+1}} \mu'\, d\lambda = \int\limits_{\mathscr{E}_{nk}} \mu'\, d\lambda - \int\limits_{\mathscr{E}_{n+1,\, 2k}} \mu'\, d\lambda = \frac{\mu(1)}{2^{n+1}}.$$

Легко усмотреть, что множества $\mathscr{E}_{nk}$, построенные таким процессом, состоят из конечного числа интервалов и отдельных точек, являющихся концами некоторых из этих интервалов.

Отсюда следует, что функция $\tau(\lambda)$ измерима B, так как всякое множество $[\tau(\lambda) < \tau]$ есть сумма счетного числа попарно непересекающихся множеств $\mathscr{E}_{nk}$. Из этого и из (1) следует для всякого τ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$:

$$\text{mes}\,[\tau(\lambda) < \tau] = \tau,$$

$$\int\limits_{[\tau(\lambda)<\tau]} \mu'\, d\lambda = \tau\,\mu(1),$$

что и требовалось доказать.

Определение 8. Функция $\Phi(x)$, определенная на элементах некоторого множества B, является спрямляющей функцией для $F(E)$ на B, если выполнены следующие условия:

1° $0 \leqslant \Phi(x) \leqslant 1$, когда $x \in B$,

2° $[\Phi(x) < \lambda] \in \{E\}$,

3° $F([\Phi(x) < \lambda]) = \lambda\; F(B)$, если $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Замечание 3. Справедливы следующие соотношения:

1°° $F([\lambda_1 \leqslant \Phi(x) < \lambda_2]) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot F(B)$, когда $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant 1$;

2°° $F([\lambda_1 \leqslant \Phi(x) \leqslant \lambda_2]) = F([\lambda_1 < \Phi(x) < \lambda_2]) =$
$= F([\lambda_1 \leqslant \Phi(x) < \lambda_2]) = F([\lambda_1 < \Phi(x) \leqslant \lambda_2])$.

Замечание 4. Если $F(E)$ есть вполне аддитивная действительная функция множеств, лишенная скачков, то каково бы ни было множество B, существует функция $\Phi(x)$, являющаяся спрямляющей функцией для $F(E)$ на B.

Замечание 5. Если E_1 и E_2 не пересекаются и $\Phi_1(x)$ и $\Phi_2(x)$ суть соответственно спрямляющие функции для $F(E)$ на E_1 и E_2, то $\Phi(x) = \begin{cases} \Phi_1(x), & x \subset E_1 \\ \Phi_2(x), & x \subset E_2 \end{cases}$ есть спрямляющая для $F(E)$ на $E_1 + E_2$.

ЛЕММА III. *Если $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $F(E)$ на $H \subset \{E\}$ и $A \subset [0, 1]$ есть B-множество, то*

$$F([\Phi(x) \in A]) = F(H) \cdot \text{mes}\, A. \tag{2}$$

Доказательство. Если A — интервал, то утверждение очевидно. Оно верно в случае, когда A есть сумма интервалов, вследствие того что $F(E)$ вполне аддитивна. Далее, оно верно для замкнутых множеств в силу соотношения $F(E) + F(CE) = F(X)$.

Повторяя это рассуждение трансфинитно, легко видеть, что формула (2) верна, если A есть произвольное B-множество.

ЛЕММА IV. *Пусть*

$$F_1(E),\, F_2(E),\, \ldots,\, F_n(E) \tag{3}$$

— конечная система вполне аддитивных действительных функций таких, что $F_{i+1}(E)$ абсолютно непрерывна относительно $F_i(E)$ $(i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$ и существует спрямляющая функция $\Phi(x)$ для $F_1(E)$ на H.

Тогда существует функция $\Phi^*(x)$, одновременно являющаяся спрямляющей функцией для всех функций системы (3) *на* H.

Доказательство. Проведем индукцию по n. Для $n=1$ лемма верна, так как $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $F_1(E)$ на H.

Пусть лемма верна для числа $n-1$. Покажем, что она верна для числа n. Пусть $\overline{\Phi}(x)$ есть спрямляющая функция для всех функций $F_1(E)$, $F_2(E), \ldots, F_{n-1}(E)$ на H. Тогда функция

$$\mu(\lambda)=F_n([\overline{\Phi}(x)<\lambda]) \tag{4}$$

абсолютно непрерывна, так как $F_n(E)$ абсолютно непрерывна относительно $F_{n-1}(E)$.

Формула (4) определяет $\mu(\lambda)$ для всех $\lambda\leqslant 1$. Очевидно $\mu(0)=0$.

Для функции $\mu(\lambda)$ построим функцию $\tau(\lambda)$, удовлетворяющую условиям леммы I. Покажем, что

$$\tau(\overline{\Phi}(x))=\Phi^*(x) \tag{5}$$

является спрямляющей функцией для всех функций системы (3).

В самом деле, $[\tau(\lambda)<\tau]$ измеримо B. Согласно лемме I

$$\text{mes}\,[\tau(\lambda)<\tau]=\tau \quad (0\leqslant\tau\leqslant 1).$$

Согласно лемме II, так как $\overline{\Phi}(x)$ есть спрямляющая функция для функций $F_1(E), \ldots, F_{n-1}(E)$ на H, то

$$\begin{aligned}F_i([\overline{\Phi}(x)\in[\tau(\lambda)<\tau]])&=\text{mes}\,[\tau(\lambda)<\tau]\cdot F_i(H)=\\&=\tau\cdot F_i(H)\quad (i=1, 2, \ldots, n-1).\end{aligned} \tag{6}$$

Однако

$$[\overline{\Phi}(x)\in[\tau(\lambda)<\tau]]\equiv[\tau(\overline{\Phi}(x))<\tau]. \tag{7}$$

Из (5), (6) и (7) следует

$$F_i([\Phi^*(x)<\tau])=\tau\cdot F_i(H) \quad (i=1, 2, \ldots, n-1).$$

Это доказывает, что $\Phi^*(x)$ есть спрямляющая функция для $F_i(E)$ $(i=1, 2, \ldots, n-1)$ на H.

Покажем теперь, что $\Phi^*(x)$ есть также спрямляющая функция для $F_n(E)$ на H. Очевидно

$$F_n([a<\overline{\Phi}(x)<b])=\mu(b)-\mu(a).$$

Далее, если множество A есть сумма счетного числа интервалов, то

$$F_n([\overline{\Phi}(x)\in A])=\int\limits_A \mu'\,d\lambda. \tag{8}$$

Так же, как в лемме II, на основании того, что $F_n(E)$ вполне аддитивна, можно показать, что формула (8) верна, если A есть B-множество. Вследствие того что $\tau(\lambda)$ измерима B,

$$F_n([\overline{\Phi}(x)\in[\tau(\lambda)<\tau]])=\int\limits_{[\tau(\lambda)<\tau]}\mu'\,d\lambda=\text{mes}\,[\tau(\lambda)<\tau]\cdot\mu(1)=\tau\cdot F_n(H). \tag{9}$$

Из (5), (7) и (9) получаем

$$F_n([\Phi^*(x) < \tau]) = \tau F_n(H),$$

т. е. $\Phi^*(x)$ есть спрямляющая функция для $F_n(E)$ на H.

Следствие 1. Из замечаний 2, 4 и 5 и доказанной леммы вытекает, что *если функции $F_1(E), \ldots, F_n(E)$ действительны и лишены скачков, то каково бы ни было множество B, существует функция $\Phi(x)$, одновременно являющаяся спрямляющей функцией для всех функций $F_1(E), \ldots, F_n(E)$.*

В таком случае, если мы положим

$$\varphi(E) = \sum j_i F_i(E),$$

где j_i — единичные векторы из R^n, то очевидно получим

$$\varphi([\Phi(x) < \lambda]) = \lambda \Phi(B).$$

Мы будем говорить, что $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на B.

Так как из того, что вектор-функция вполне аддитивна и лишена скачков, следует, что ее компоненты также вполне аддитивны и лишены скачков, то доказанное положение можно сформулировать так:

Если $\varphi(E)$ вполне аддитивна и лишена скачков, то на любом множестве B существует спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на B.

ТЕОРЕМА I. *Множество значений вполне аддитивной вектор-функции, лишенной скачков, всегда выпукло**.

Доказательство. Обозначим множество значений функции $\varphi(E)$, когда E пробегает семейство $\{E\}$, через Ξ. Пусть

$$u \in \Xi,$$

тогда найдется множество $H \in \{E\}$ такое, что

$$\varphi(H) = u.$$

Пусть $\Phi(x)$ есть спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на H. Существование ее обеспечено. Тогда

$$\varphi([\Phi(x) < \lambda]) = \lambda u \qquad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Следовательно все точки, лежащие на луче, соединяющем u с началом координат, входят в Ξ.

Пусть теперь $u_1 \in \Xi$ и $u_2 \in \Xi$. Тогда найдутся множества H_1 и H_2 такие, что

$$\varphi(H_1) = u_1, \quad \varphi(H_2) = u_2.$$

Обозначим

$$H = H_1 \cdot H_2.$$

Пусть

$$v = \varphi(H), \ w_1 = \varphi(H_1 - H_2), \ w_2 = \varphi(H_2 - H_1).$$

Все эти векторы определены в силу свойств семейства $\{E\}$. Очевидно множества $H_1 - H_2$ и $H_2 - H_1$ между собой не пересекаются.

* Это предложение перестает быть верным для вектор-функций, принимающих значения из бесконечно-мерных пространств. Пример печатается в Трудах педагогического института им. Либкнехта (Москва).

Пусть $\Phi_1(x)$ есть спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на $H_1 - H_2$, а $\Phi_2(x)$ — спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на $H_2 - H_1$. Покажем, что

$$\lambda\varphi(H_1) + (1-\lambda)\varphi(H_2) \in \Xi, \quad \text{если} \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

В самом деле,

$$\varphi([\Phi_1(x) < \lambda]) = \lambda\varphi(H_1 - H_2) = \lambda w_1,$$
$$\varphi([\Phi_2(x) < 1-\lambda]) = (1-\lambda)\varphi(H_2 - H_1) = (1-\lambda)w_2.$$

Следовательно

$$\varphi([\Phi_1(x) < \lambda] + [\Phi_2(x) < 1-\lambda] + H) = \lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 + v,$$

так как все множества, стоящие в скобках, попарно не пересекаются. Однако

$$\lambda w_1 + (1-\lambda)w_2 + v = \lambda(w_1 + v) + (1-\lambda)(w_2 + v) = \lambda\varphi(H_1) + (1-\lambda)\varphi(H_2),$$

откуда следует сделанное утверждение.

Следствие 2. *Если $F_1(E), \ldots, F_n(E)$ суть вполне аддитивные функции множеств, лишенные скачков и такие, что*

$$F_n(E) = \Omega(F_1(E), F_2(E), \ldots, F_{n-1}(E)), \tag{10}$$

где $\Omega(t_1, \ldots, t_{n-1})$ есть какая угодно функция от $n-1$ переменных, то существуют такие числа $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{n-1}$, что

$$F_n(E) = \nu_1 F_1(E) + \ldots + \nu_{n-1}F_{n-1}(E). \tag{11}$$

Доказательство. Согласно теореме I множество Ξ выпукло. В силу соотношения (10), всякая параллель к оси OY_n пересекает Ξ не более, чем в одной точке. Это означает, что Ξ лежит в некотором линейном многообразии размерности $n-1$, не параллельном OY_n. Из этого следует справедливость формулы (11).

Следующий пример показывает, что отсутствие скачков здесь существенно. Построим две вполне аддитивных функции множеств $F_1(E)$ и $F_2(E)$ такие, что каждая из них абсолютно непрерывна относительно другой, и что

$$F_2(E) = \varphi(F_1(E)), \tag{12}$$

однако зависимость (12) не линейна.

Пусть X есть множество всех целых положительных чисел, $\{E\}$ — система всех его подмножеств. Рассмотрим два ряда

$$u_n = \frac{1}{n!}, \quad v_n = \frac{1}{(n!)^2}.$$

Очевидно не существует такого μ, что

$$u_n = \mu \cdot v_n.$$

Пусть

$$F_1(E) = \sum_{n \in E} u_n, \quad F_2(E) = \sum_{n \in E} v_n.$$

Легко проверить, что так определяемые функции абсолютно непрерывны одна относительно другой. Очевидно

$$u_n > \sum_{n' > n} u_{n'}, \quad v_n > \sum_{n' > n} v_{n'}.$$

Из этого следует, что

$$F_1(E_1) \neq F_1(E_2) \quad \text{и} \quad F_2(E_1) \neq F_2(E_2), \tag{13}$$

если $E_1 \neq E_2$.

Пусть Q есть множество всех значений функции $F_1(E)$. Образуем функцию $\varphi(z)$, определенную на элементах множества Q следующим образом: если $z=F_1(E)$, то $\varphi(z)=F_2(E)$. Из соотношений (13) следует, что функция $\varphi(z)$ определена единственным образом. Однако эта зависимость не может быть линейной, так как она не линейна уже для множеств, состоящих из одного целого числа.

Следствие 3. *Пусть $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ — система суммируемых функций, определенных на измеримом множестве X. Положим*

$$F_i(E)=\int_E f_i(x)\,dx,$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Тогда множество всех точек n-мерного пространства $M(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, где $y_i=F_i(E)$, выпукло.

§ 2

ТЕОРЕМА II. *Множество значений любой вполне аддитивной вектор-функции всегда замкнуто.*

Прежде чем излагать доказательство теоремы, мы должны ввести некоторые определения и доказать некоторые вспомогательные леммы.

Если $\Xi_1, \Xi_2, \ldots, \Xi_n$ суть множества, лежащие в R^n, то множество Ξ всех точек a, представимых в виде $a=\sum_{i=1}^{n} a_i$, где сумма понимается в векторном смысле и $a_i \in \Xi$, носит название суммы в смысле Шнирельмана множеств $\Xi_1, \ldots, \Xi_n$.

Введем обозначение

$$\Xi=\Xi_1 \overset{0}{+} \Xi_2 \overset{0}{+} \ldots \overset{0}{+} \Xi_n .$$

Замечание 6. Если все слагаемые замкнуты, выпуклы или центрально симметричны, то сумма их в смысле Шнирельмана также замкнута, выпукла или центрально симметрична.

Замечание 7. Если $\varphi(E)$ — аддитивная вектор-функция, $E_1, E_2, \ldots, E_m$ — система попарно непересекающихся множеств, $\Xi_1, \Xi_2, \ldots$ $\ldots, \Xi_n$ — соответственно множества значений функции $\varphi(E)$ на всех подмножествах каждого из этих множеств, а Ξ — то же для E, то

$$\Xi=\Xi_1 \overset{0}{+} \Xi_2 \overset{0}{+} \ldots \overset{0}{+} \Xi_n .$$

Замечание 8. Если Ξ есть множество значений вполне аддитивной функции, то Ξ центрально симметрично и центр симметрии есть $\frac{1}{2}\varphi(X)$.

В самом деле

$$\varphi(E)+\varphi(X-E)=\varphi(X),$$

следовательно

$$\varphi(E)-\frac{1}{2}\varphi(X)=\frac{1}{2}\varphi(X)-\varphi(X-E).$$

Но это означает, что $\varphi(E)$ и $\varphi(X-E)$ симметричны относительно $\frac{1}{2}\varphi(X)$.

ЛЕММА V. *Пусть $\varphi(E)$ определена на системе множеств $\{E\}$, вполне аддитивна и лишена скачков и Ξ есть множество значений $\varphi(E)$. Тогда существует система множеств $\{E\}' \subset \{E\}$, являющаяся борелевым телом над некоторой счетной системой множеств и такая, что функция $\varphi(E)$, рассмотренная на системе $\{E\}'$, вполне аддитивна и лишена скачков, а множество ее значений всюду плотно на Ξ.*

Доказательство. Систему множеств $\{E\}'$ мы будем строить следующим образом. Пусть L есть счетное множество, всюду плотное на Ξ, и

$$E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \tag{14}$$

есть счетное семейство множеств системы $\{E\}$ таких, что множество всех векторов $\varphi(E_n)$ есть L.

Пусть $\{E\}^*$ есть наименьшая система множеств, содержащих все множества системы (14) и инвариантная относительно конечных сумм и взятия дополнений. Для каждого из множеств $H \subset \{E\}^*$ построим спрямляющую функцию для $\varphi(E)$ на H и рассмотрим совокупность всех множеств вида

$$[\Phi(x) < r],$$

где $\Phi(x)$ — некоторая из этих спрямляющих функций, а r — некоторое рациональное число $0 \leqslant r \leqslant 1$. Очевидно всех таких множеств счетное число. Пусть это будет

$$E_1^*, E_2^*, \ldots, E_n^*, \ldots$$

Множество значений функции $\varphi(E)$ на всех этих множествах всюду плотно на Ξ, так как оно содержит L.

За $\{E\}'$ можно выбрать совокупность всех множеств, получаемых из множеств E_n^* при помощи борелевых операций. Тогда для всякого множества $H \in \{E\}'$ значение $\varphi(H)$ можно вычислить, отправляясь от значений $\varphi(E_i^*)$. Очевидно $\varphi(E)$ на семействе $\{E\}'$ лишена скачков, и множество ее значений всюду плотно на Ξ, что и требовалось доказать.

Замечание 9. Из доказанной леммы следует, что для вполне аддитивных функций, лишенных скачков, определение абсолютной непрерывности эквивалентно обычному: для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что неравенство $|F_1(E)| < \delta$ влечет за собой $|F_2(E)| < \varepsilon$, потому что для случая, когда $\{E\}$ есть борелево тело на счетной системе множеств, эти определения эквивалентны.

ЛЕММА VI. *Во всякой опорной плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$ множества Ξ значений вполне аддитивной функции $\varphi(x) = \sum j_i F_i(x)$, лишенной скачков, лежит по крайней мере одна точка этого множества.*

Доказательство. Рассмотрим вполне аддитивную функцию

$$F(E) = \sum \lambda_i F_i(E).$$

Либо максимум, либо минимум этой функции есть c. Но тогда существует такое E, что $F(E) = c$. Следовательно точка $\varphi(E)$ лежит в плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$.

ЛЕММА VII. *Если в опорной плоскости*

$$\sum \lambda_i x_i = c \tag{15}$$

находится более чем одна точка множества Ξ, *то существуют такие два взаимно дополнительных множества* E' *и* E'', *что множество значений функции* $\varphi(E \cdot E'')$ *лежит в плоскости* $\sum \lambda_i x_i = 0$, *а множество значений функции* $\varphi(E \cdot E')$ *имеет в точности одну точку в опорной плоскости, параллельной* (15).

Доказательство. Рассмотрим функцию $F(E) = \sum \lambda_i F_i(E)$ и образуем множество E_i такое, что $F_i(E \cdot E_i)$ абсолютно непрерывна относительно $F(E \cdot E_i)$ и $F(E - E_i) \equiv 0$. Рассмотрим множества

$$E' = \prod_{i=1}^{n} E_i \quad \text{и} \quad E'' = X - E'.$$

Очевидно $\sum \lambda_i F_i(E \cdot E'') \equiv F(E \cdot E'') \equiv 0$, но это означает, что множество значений функции $\varphi(E \cdot E'')$ лежит в плоскости $\sum \lambda_i x_i = 0$. В то же время в опорной плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$ к множеству значений функции $\varphi(E \cdot E')$ не могут лежать две различных точки этого множества, так как если бы для двух множеств различных метрических типов $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ и заключенных в E' это имело место, то

$$F(\mathscr{E}_1) = F(\mathscr{E}_2) = c_1,$$

т. е.

$$F(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) = F(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1) = 0.$$

Кроме того $\varphi(\mathscr{E}_1) \neq \varphi(\mathscr{E}_2)$ и следовательно либо $\varphi(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2) \neq 0$, либо $\varphi(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1) \neq 0$, но это противоречит тому, что все $F_i(E)$ абсолютно непрерывны относительно $F(E)$.

ЛЕММА VIII. *Пусть* Ξ *есть множество значений вполне аддитивной вектор-функции,* $\sum \lambda_i x_i = c$ *его опорная гиперплоскость и* a — *единственная точка множества* Ξ, *лежащая в этой плоскости и входящая в* Ξ. *Тогда ни одна точка указанной плоскости, кроме точки* a, *не может быть предельной для множества* Ξ.

Доказательство. Справедливость этой леммы немедленно вытекает из того, что в условиях леммы все функции $F_i(E)$ абсолютно непрерывны относительно $\sum \lambda_i F_i(E)$, и из эквивалентности принятого здесь определения абсолютной непрерывности обычному (замечание 9).

Доказательство теоремы II. Рассмотрим сперва случай функций, лишенных скачков. Мы проведем индукцию по числу измерений. При $n = 1$ теорема верна. Предположим, что она верна для всех чисел $< n$, и допустим, что Ξ есть множество значений n-мерной вполне аддитивной вектор-функции $\varphi(E)$, лишенной скачков, однако Ξ не замкнуто. Пусть a есть предельная точка множества Ξ, не входящая в Ξ, и $\sum \lambda_i x_i = c$ — уравнение опорной гиперплоскости, проходящей через a. Согласно лемме VII существуют два взаимно дополнительных множества E_1 и E_2 таких, что на подмножествах множества E_1 функция $\varphi(E)$ принимает значения, лежащие в $(n-1)$-мерном пространстве, следовательно по предположению множество Ξ_2 значений $\varphi(E_2 - E)$ замкнуто, в то время как множество Ξ' значений функции $\varphi(E_1 \cdot E)$

имеет в плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$ в точности одну точку. Согласно лемме VIII, в этой плоскости Ξ' не имеет других предельных точек. Однако

$$\Xi = \Xi_1 \overset{0}{+} \Xi_2 .$$

Таким образом в плоскости $\sum \lambda_i x_i = c$, Ξ не может иметь предельных точек, не входящих в него.

Рассмотрим теперь случай функции скачков. Пусть θ есть множество ее значений и $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ суть множества, на которых она имеет скачки. Функцию обозначим $\psi(E)$.

Ясно, что θ состоит из всех точек, являющихся суммами подпоследовательностей ряда

$$\psi(A_1), \psi(A_2), \ldots, \psi(A_n), \ldots$$

Длины всех этих векторов отличны от нуля. Рассмотрим ряд

$$2 \cdot \frac{1}{3}, \; 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2, \ldots, 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, \ldots$$

Множество всевозможных сумм его подпоследовательностей есть канторово совершенное множество C. Поставим число $2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n$ в соответствие вектору $\psi(A_n)$ и распространим это соответствие на суммы подпоследовательностей аддитивно. Тогда мы получим непрерывное отображение множества C на θ. Таким образом θ замкнуто.

Множество значений произвольной вполне аддитивной вектор-функции есть сумма в смысле Шнирельмана множеств значений функции скачков и функции, лишенной скачков. Таким образом оно замкнуто.

Перечислим условия, необходимые для того, чтобы некоторое n-мерное множество явилось множеством значений вполне аддитивной вектор-функции, лишенной скачков:

1) оно выпукло (теорема I),

2) замкнуто (теорема II),

3) центрально симметрично (замечание 8),

4) содержит начало координат (очевидно),

5) все его грани $< n$ измерений также центрально симметричны (лемма VII).

Можно показать, что при $n = 2$ условий $1-4$ уже достаточно, однако в случае $n = 3$ даже условий $1-5$ недостаточно.

§ 3

Определение 9. Точка u множества Ξ — обыкновенная, если она лежит внутри прямолинейного отрезка, входящего в Ξ. В противном случае u — точка необыкновенная.

Определение 10. Если в системе $\{E^*\}$ найдется лишь один метрический тип E^* такой, что $\varphi(E^*) = u$, то точка u есть точка единственности. Если таких типов континуум, то точка u является точкой континуальности.

ТЕОРЕМА III. *Если функция $\varphi(E)$ лишена скачков, то обыкновенные точки являются точками континуальности, а необыкновенные — точками единственности.*

Доказательство. Пусть $[a, b]$ есть отрезок, заключенный в Ξ, и серединой его является u. Пусть $\varphi(E_1)=a$, $\varphi(E_2)=b$ и $\Phi_1(x)$ — спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на E_1-E_2, а $\Phi_2(x)$ — спрямляющая функция для $\varphi(E)$ на E_2-E_1. Тогда

$$u=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b.$$

Составим множества

$$H=E_1\cdot E_2,$$
$$H_1=\left[\Phi_1(x)<\frac{1}{2}\right]+\left[\Phi_2(x)<\frac{1}{2}\right],$$
$$H_2=\left[\Phi_1(x)>\frac{1}{2}\right]+\left[\Phi_2(x)>\frac{1}{2}\right].$$

Очевидно $H_1\cdot H_2=H\cdot H_1=H\cdot H_2=0$. Тогда

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(H_1)=\frac{1}{2}\varphi(E_1-E_2)+\frac{1}{2}\varphi(E_2-E_1),\\
&\varphi(H_2)=\frac{1}{2}\varphi(E_1-E_2)+\frac{1}{2}\varphi(E_2-E_1),\\
&\varphi(H_1+H)=\varphi(H_2+H)=\varphi(H)+\frac{1}{2}\varphi(E_1-E_2)+\frac{1}{2}\varphi(E_2-E_1)=\\
&\qquad=\frac{1}{2}[\varphi(E_1\cdot E_2)+\varphi(E_1-E_2)]+\frac{1}{2}[\varphi(E_1\cdot E_2)+\\
&\qquad+\varphi(E_2-E_1)]=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=u.
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

Таким образом найдутся два множества, принадлежащих различным метрическим типам $H+H_1$ и $H+H_2$ и удовлетворяющих равенству (16). Пусть $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$ спрямляющие функции для $\varphi(E)$ на H_1 и на H_2, каково бы ни было число μ, $0\leqslant\mu\leqslant 1$. Имеем

$$\begin{aligned}
&\varphi([\Phi'(x)<\mu]+[\Phi''(x)<1-\mu]+H)=\\
&=\varphi([\Phi'(x)<\mu])+\varphi([\Phi''(x)<1-\mu])+\varphi(H)=\\
&=\mu\varphi(H_1)+(1-\mu)\varphi(H_2)+\varphi(H)=\\
&=\mu(\varphi(H_1)+\varphi(H))+(1-\mu)(\varphi(H_2)+\varphi(H))=\\
&=\mu\varphi(H_1+H)+(1-\mu)\varphi(H_2+H)=\mu u+(1-\mu)u=u.
\end{aligned}$$

Следовательно различных метрических типов E^* таких, что $\varphi(E^*)=u$, будет континуум, так как разным числам μ соответствуют разные метрические типы множеств $[\Phi'(x)<\mu]+[\Phi''(x)<1-\mu]+H$.

Этим доказана первая часть теоремы: точки обыкновенные суть точки континуальности.

Пусть теперь

$$\varphi(U_1^*)=\varphi(U_2^*)=u,\quad U_1^*\neq U_2^*.$$

Покажем, что в таком случае точка u — обыкновенная. Очевидно

$$\varphi(U_1-U_2)=\varphi(U_2-U_1),\tag{17}$$

потому что каждый из этих векторов, прибавленный к $\varphi(U_1\cdot U_2)$, дает u. Возможны два случая:

1) $\varphi(U_1-U_2)=0$. Тогда либо $\varphi(U_1-U_2)\neq 0$, либо $\varphi(U_2-U_1)\neq 0$, так как иначе было бы $U_1^*=U_2^*$, что неверно.

Пусть, например,

$$\varphi(U_1-U_2)\neq 0,\quad E\subset U_1-U_2\ \text{ и }\ \varphi(E)\neq 0.$$

Тогда

$$\varphi((U_1-U_2)-E)=-\varphi(E),\quad \varphi(U_1\cdot U_2)=u.$$

Однако

$$\varphi(U_1 \cdot U_2 + E) = u + \varphi(E),$$
$$\varphi(U_1 \cdot U_2 + [(U_1 - U_2) - E]) = u + \varphi((U_1 - U_2) - E) = u - \varphi(E).$$

Таким образом точки $u + \varphi(E)$ и $u - \varphi(E)$ входят в Ξ, но u есть середина отрезка, их соединяющего, т. е. u есть точка обыкновенная:

2) $\varphi(U_1 - U_2) \neq 0$. Тогда

$$\varphi(U_1 + [U_2 - U_1]) = \varphi(U_1) + \varphi(U_2 - U_1) = u + \varphi(U_2 - U_1),$$
$$\varphi(U_1 - [U_1 - U_2]) = \varphi(U_1) - \varphi(U_1 - U_2) = u - \varphi(U_1 - U_2) = u - \varphi(U_2 - U_1).$$

Следовательно точки $u - \varphi(U_2 - U_1)$ и $u + \varphi(U_2 - U_1)$ входят в Ξ. Однако u есть середина отрезка, их соединяющего, т. е. u есть обыкновенная точка. Следовательно, если u есть точка необыкновенная, то в нее может отображаться не больше, чем один метрический тип E^*. Однако в силу замкнутости множества Ξ по крайней мере один метрический тип в нее отображается, т. е. u есть точка единственности.

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии Наук СССР

Поступило
8. III. 1940

A. LIAPOUNOFF. SUR LES FONCTIONS-VECTEURS COMPLÈTEMENT ADDITIVES

RÉSUMÉ

Nous étudions les fonctions-vecteurs $\varphi(E)$ définies sur des systèmes $\{E\}$ d'ensembles abstraits, invariants par rapport aux opérations boreliennes $(\sum, C)$ dont les valeurs appartiennent à l'espace euclidient à n-dimensions.

Une fonction-vecteur $\varphi(E)$ est dite complètement additive si quel que soit le système d'ensembles disjoints $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ appartenant à $\{E\}$, les longueurs des vecteurs $\varphi(E_n)$ forment une série convergente et

$$\varphi\left(\sum E_n\right) = \sum \varphi(E_n).$$

$\varphi(E)$ subit un saut sur E, si quel que soit l'ensemble $E' \subset E$ appartenant à $\{E\}$ on a $\varphi(E') = 0$ ou bien $\varphi(E') = \varphi(E) \neq 0$. On dit que $\varphi(E)$ est identiquement nulle $\varphi(E') \equiv 0$ sur E' si $\varphi(E' \cdot E'') = 0$ quel que soit l'ensemble E'' appartenant à $\{E\}$.

Le type métrique de E_1 relativement à $\varphi(E)$ est la réunion de tous les ensembles E_2 tels que $\varphi(E_1 - E_2) \equiv \varphi(E_2 - E_1) \equiv 0$. Nous désignons le type métrique de E par E^* et nous considérons la fonction $\varphi(E^*) = \varphi(E)$.

Nous démontrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *L'ensemble des valeurs d'une fonction-vecteur complètement additive et dépourvue de sauts, est toujours convexe.*

THÉORÈME II. *L'ensemble des valeurs de toute fonction-vecteur complètement additive est toujours fermé.*

THÉORÈME III. *Soit $\varphi(E)$ une fonction-vecteur complètement additive et dépourvue de sauts et a — un vecteur fixe appartenant à l'ensemble Ξ des valeurs de $\varphi(E)$. Alors l'équation $\varphi(E^*) = a$ admet un ensemble ayant la puissance du continu de solutions diverses dans le cas où a est intérieur à un segment rectiligne contenu dans Ξ. Elle admet une solution unique dans le cas contraire.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 479—500 Série mathématique

Посвящается памяти
В. И. Гливенко

З. И. КОЗЛОВА

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ A- и B-МНОЖЕСТВАХ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе приводятся некоторые уточнения теорем о накрытии плоских A-множеств и теорем о расщеплении плоских B-множеств для случаев, когда данное плоское множество пересекается всякой параллелью к оси ординат по множествам некоторой специальной природы. Эти множества могут быть вполне упорядочены, приводимы, рассеяны и, наконец, компактны.

Глава I

Пусть $\mathcal{E}$ есть A-множество ($\mathcal{E} \subset I_{xy}$ или J_{xy})* и все множества $\mathcal{E} \cdot P_{x_0}$ (P_{x_0} есть множество точек, лежащих на прямой $x = x_0$) имеют некоторое свойство K. Спрашивается, существует ли B-множество H такое, что $\mathcal{E} \subset H$ и все множества $H \cdot P_{x_0}$ имеют свойство K?

Первый результат в этом направлении был получен покойным В. И. Гливенко. В дальнейшем ряд вопросов такого характера был рассмотрен Н. Н. Лузиным, П. С. Новиковым и другими.

Теорема 1. Униформное A-множество всегда накрывается таким же B-множеством [Гливенко (1,2)].

Теорема 2. Счетно-формное A-множество всегда накрывается таким же B-множеством [Лузин (2), стр. 247].

Теорема 3. Ограниченно-формное A-множество всегда накрывается таким же B-множеством [Новиков (3)].

Теорема 4. Конечно-формное A-множество можно накрыть таким же B-множеством [Ляпунов (4)].

Теорема 5. Всякое плоское A-множество $\mathcal{E}$, для которого все множества $\mathcal{E} \cdot P_x$ вполне упорядочены вверх, можно накрыть таким же B-множеством [Ляпунов (4)].

§ 1

Пусть $\mathcal{E} \subset J_{xy}$ есть такое множество, что все $P_x \cdot \mathcal{E}$ вполне упорядочены вверх. Назовем индексом множества $\mathcal{E}$ в точке x_0 порядковый тип множества $\mathcal{E} \cdot P_{x_0}$; обозначим его через α_{x_0}.

---

* I с индексами обозначает эвклидово пространство, J с индексами—множество точек, все координаты которых иррациональны.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что все индексы α_x множеств $P_x \cdot \mathcal{E}$ меньше α, назовем **порядком** множества $\mathcal{E}$.

Из теоремы Лузина [(2), стр. 183] о том, что всякое A-решето C ограничено на каждом A-множестве θ, которое не имеет общих точек с множеством E, просеянным посредством решета C, следует, что для каждого плоского A-множества $\mathcal{E}$, для которого все множества $\mathcal{E} \cdot P_x$ вполне упорядочены вверх, существует число α такое, что

$$\alpha_x < \alpha < \Omega.$$

Пусть $\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}^0$ есть плоское A-множество, для которого все множества $\mathcal{E} \cdot P_x$ вполне упорядочены вверх. Обозначим через $\mathcal{E}^\beta$ $(\beta < \Omega)$ множество, получающееся из $\mathcal{E}^0$, если из каждого множества $P_x \cdot \mathcal{E}^0$ выбросить β нижних точек. Из теоремы Мазуркевича [(2), стр. 282] вытекает, что если $\mathcal{E}^0$ есть A-множество, то множество $\mathcal{E}^\beta$ есть A-множество.

Плоское множество $\mathcal{E}$, для которого все множества $\mathcal{E} \cdot P_x$ вполне упорядочены вверх и замкнуты, мы будем называть плоским множеством **1-го вида**.

ЛЕММА 1. *Если* $E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots$ *есть система A-множеств и* $\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$, *то существует система B-множеств* $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ *таких, что* $B_i \cdot B_j = 0$, *если* $i \neq j$ *и* $B_n \cdot E_{n+1} = 0$.

Доказательство. Пусть

$$E_1 \supset E_2 \supset \ldots \supset E_n \supset \ldots \tag{1}$$

есть система A-множеств и

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0.$$

Так как для A-множеств выполнена аксиома* I_π [по классификации в моей работе (3)], то существует система B-множеств

$$H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots \tag{2}$$

таких, что

$$H_n \supset E_n \quad \text{и} \quad \prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0.$$

Можно предположить, что $H_n \supset H_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, так как выполнено соотношение (1). В противном случае за H_n можно взять пересечение всех B-множеств H_i последовательности (2), для которых $i \leqslant n$.

---

* Если $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ суть A-множества и $\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0$, то существуют такие B-множества $H_1, H_2, \ldots, H_n, \ldots$, что $H_n \supset E_n$ и $\prod_{n=1}^{\infty} H_n = 0$.

Рассмотрим семейство B-множеств:

$$B_1 = H_1 \cdot CH_2,$$
$$B_2 = H_2 \cdot CH_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$B_n = H_n \cdot CH_{n+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Эти множества — попарно без общих точек. Кроме того

$$B_n \cdot E_{n+1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА I. *Всякое плоское A-множество 1-го вида порядка α можно накрыть таким же B-множеством.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \subset J_{xy}$ есть плоское A-множество 1-го вида порядка α.

Применим метод трансфинитной индукции. Если $\alpha = 2$, то теорема верна (это следует из теоремы 1 Гливенко). Пусть $\alpha = \alpha^* + n$, $n > 1$, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Образуем систему A-множеств

$$\mathcal{E}^0, \mathcal{E}^1, \ldots, \mathcal{E}^{\alpha'}, \ldots, \mathcal{E}^{\alpha-1}, \mathcal{E}^{\alpha} = 0.$$

Множество $\mathcal{E}^{\alpha-1}$ униформно. Согласно теореме 1 Гливенко, его можно накрыть униформным B-множеством H^*.

Множество $U = \mathcal{E} \cdot CH^*$ будет A-множеством, для которого все множества $U \cdot P_x$ вполне упорядочены вверх, порядка $\alpha - 1$. Замыкание U вдоль оси OY, $U^{(y)}$, будет плоским A-множеством* 1-го вида того же порядка $\alpha - 1$. По предположению множество $U^{(y)}$ можно накрыть таким же B-множеством $\overline{H}$.

Множество $H = H^* + H$ накроет множество $\mathcal{E}$ и будет B-множеством 1-го вида порядка α.

Пусть α второго рода и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \to \alpha.$$

Обозначим

$$E_n = \text{П}_x \mathcal{E}^{\alpha_n}.$$

Очевидно

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0 \quad \text{и} \quad E_n \supset E_m,$$

если $m > n$. На основании леммы 1 можно построить систему B-множеств таких, что $B_i \cdot B_j = 0$ и $B_n \cdot E_{n+1} = 0$. Пусть

$$Q_n = B_n \times J_y.$$

Множество $U_n = \mathcal{E} \cdot Q_n$ будет плоским A-множеством 1-го вида по-

---

* П. С. Новиков [6] доказал следующую лемму: если $\mathcal{E}$ есть плоское B-множество, то замыкание $\mathcal{E}$ вдоль оси OY, $\mathcal{E}^{(y)}$, есть A-множество.

Аналогично доказывается предложение: если $\mathcal{E}$ есть плоское A-множество, то $\mathcal{E}^{(y)}$ есть также A-множество.

рядка α_{n+1}. По предположению U_n можно накрыть таким же B-множеством $H_n \subset Q_n$.

Очевидно множество

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Пусть $\alpha = \omega^\gamma + 1$ и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна.

Множество $\mathcal{E}^{\alpha-1}$ униформно. По теореме 1 Гливенко его можно накрыть униформным B-множеством H^*.

Пусть V есть часть множества $\mathcal{E}$, лежащая выше множества H^*. Множество $W = \Pi_x V$ будет A-множеством, причем

$$E^{\alpha-1} \cdot W = 0,$$

где

$$E^{\alpha-1} = \Pi_x \mathcal{E}^{\alpha-1}.$$

Так как для A-множеств выполнена аксиома* I_2 ([8]), то существует B-множество N такое, что

$$N \supset E^{\alpha-1} \quad \text{и} \quad CN \supset W.$$

Множество

$$\overline{H} = (N \times J_y) \cdot H^* \supset \mathcal{E}^{\alpha-1}.$$

Пусть

$$\overline{E} = \Pi_x \cdot \overline{H}.$$

Порядок множества $U = \mathcal{E}\,(C\overline{E} \times J_y)$ не превосходит $\alpha - 1 = \omega^\gamma$. По предположению, существует B-множество R того же порядка, что и U, такое, что

$$C\overline{E} \times J_y \supset R \supset U.$$

Перейдем к накрытию множества

$$M = \mathcal{E} - U = \mathcal{E}\,(\overline{E} \times J_y).$$

Пусть $\overline{H}_n$ есть результат сдвига множества $\overline{H}$ на $\frac{1}{n}$ вниз. Пусть J^n есть часть J_{xy}, лежащая в замкнутой полосе, ограниченной $\overline{H}_n$ и $\overline{H}_{n+1}$. Порядок множества $M_n = J^n \cdot \mathcal{E}$ не превосходит ω^γ. По предположению, существует B-множество h_n того же порядка, что и M_n, такое, что $J^n \supset h_n \supset M_n$.

Множество

$$h = \sum_{n=1}^{\infty} h_n + \overline{H} \subset \overline{E} \times J_y$$

накрывает множество M и является B-множеством 1-го вида порядка $\alpha = \omega^\gamma + 1$, так как индексы всех множеств $P_x \cdot h$ не превосходят ω^γ.

---

* Если E_1 и E_2 суть A-множества и $E_1 \cdot E_2 = 0$, то существуют такие B-множества H_1 и H_2, что $H_1 \supset E_1$, $H_2 \supset E_2$ и $H_1 \cdot H_2 = 0$.

Таким образом множество $H = R + h$ удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Пусть, наконец, $\alpha = \beta + \omega^\gamma + 1$, $\beta \geqslant \omega^\gamma$, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Множество $\mathcal{E}^{\beta+1}$ имеет порядок $\omega^\gamma + 1$. По предположению, существует B-множество H_1 порядка $\omega^\gamma + 1$ такое, что $H_1 \supset \mathcal{E}^{\beta+1}$.

Множество $M = \mathcal{E} \cdot CH_1$ будет A-множеством, для которого все множества $P_x \cdot M$ вполне упорядочены вверх, порядка $\beta + 1$. Его замыкание вдоль оси OY, $M^{(y)}$, будет A-множеством 1-го вида порядка $\beta + 1$. По предположению, существует B-множество H_2 1-го вида порядка $\beta + 1$ такое, что $H_2 \supset M$.

Множество $H = H_2 + H_1$ накроет все множество $\mathcal{E}$ и будет B-множеством 1-го вида порядка α, что и требовалось доказать.

§ 2

Множество точек E, у которого одно из последовательных производных множеств $E', E'', \ldots, E^{(\alpha)}, \ldots$ пусто, называется **приводимым** множеством. Такое множество не более, чем счетно.

Наибольшее из трансфинитных чисел α, для которого $E^{(\alpha)} \neq 0$, назовем **индексом** приводимого множества.

Плоское множество $\mathcal{E}$, для которого все множества $\mathcal{E} \cdot P_x$ приводимы, назовем множеством 2-го **вида**.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что все индексы множеств $\mathcal{E} \cdot P_x$ меньше α, назовем **порядком** множества $\mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{E}^{(0)}$ есть замыкание множества $\mathcal{E}$ вдоль оси OY. Обозначим через $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ множество, образованное всеми точками множеств $(\mathcal{E} \cdot P_x)^{(\alpha)}$, когда x пробегает J_x.

ЛЕММА 2. *Если $\mathcal{E}$ есть A-множество, то и $\mathcal{E}^{(\alpha)}$ есть A-множество при всех α.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{E} \subset J_{xy}$ есть A-множество. Замыкание множества $\mathcal{E}$ вдоль оси OY, $\mathcal{E}^{(y)}$, есть также A-множество. Предположим, что все множества $\mathcal{E}^{(\beta)}$, являющиеся A-множествами, для $\beta < \alpha$ построены. Пусть α есть трансфинитное число 1-го рода. Обозначим через J_{nq} множество всех точек J_{xy}, для которых $\frac{q-1}{n} < y < \frac{q}{n}$. Пусть

$$\mathcal{E}_{nq}^{(\alpha-1)} = \mathcal{E}^{(\alpha-1)} \cdot J_{nq}.$$

Обозначим через $\overline{\mathcal{E}}_{nq}^{(\alpha-1)}$ часть множества $\mathcal{E}_{nq}^{(\alpha-1)}$, пересекаемую любой параллелью оси OY не менее, чем в двух точках, вместе с частью $\mathcal{E}^{(\alpha-1)}$, лежащей на прямых

$$y = \frac{q-1}{n} \quad \text{и} \quad y = \frac{q}{n}.$$

Это будет A-множество. Пусть

$$\overline{\mathcal{E}}_n^{(\alpha-1)} = \sum_{q=1}^{n} \overline{\mathcal{E}}_{nq}^{(\alpha-1)}.$$

Множество

$$\mathcal{E}^{(\alpha)} = \prod_{n=0}^{\infty} \overline{\mathcal{E}}_n^{(\alpha-1)},$$

где $\overline{\mathcal{E}}_0^{(\alpha-1)} = \mathcal{E}^{(\alpha-1)}$, состоит из всех предельных точек множества $\mathcal{E}^{(\alpha-1)}$ вдоль параллелей оси OY и является A-множеством.

Пусть α есть число 2-го рода. Множество

$$\mathcal{E}^{(\alpha)} = \prod_{\beta<\alpha} \mathcal{E}^{(\beta)}$$

будет также A-множеством.

Замечание. Если H есть B-множество 2-го вида, то и $H^{(\alpha)}$ есть B-множество при всех α. Это следует из того, что проекция на ось OX B-множества 2-го вида, как счетно-формного B-множества, есть B-множество.

ТЕОРЕМА II. *Всякое A-множество 2-го вида порядка α можно накрыть таким же B-множеством.*

Доказательство. Достаточно показать, что всякое замкнуто-формное A-множество $\mathcal{E}$ 2-го вида порядка α можно накрыть таким же B-множеством H. Действительно, если $\mathcal{E}$ есть не замкнуто-формное A-множество 2-го вида порядка α, то его замыкание вдоль оси OY, $\mathcal{E}^{(y)}$, будет замкнуто-формным A-множеством 2-го вида порядка α. Если множество $\mathcal{E}^{(y)}$ можно накрыть таким же B-множеством H, то оно накроет и множество $\mathcal{E}$ и будет удовлетворять требуемым условиям.

Итак, пусть $\mathcal{E} \subset J_{xy}$ есть замкнуто-формное A-множество 2-го вида порядка α.

Мы применим метод трансфинитной индукции.

Если $\alpha = 1$, то теорема верна. Это следует из теоремы 4, доказанной А. А. Ляпуновым (4).

Пусть $\alpha = \alpha^* + 1$ и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Множество $\mathcal{E}^{(\alpha-1)}$ будет конечно-формным A-множеством. Согласно теореме 4 его можно накрыть таким же B-множеством H^*. Конечно-формное B-множество H^* можно расщепить на счетное множество униформных B-кривых

$$L_1, \quad L_2, \ \ldots, \ L_n, \ \ldots,$$

лежащих соответственно на униформных B-кривых

$$y = \varphi_1(x), \quad y = \varphi_2(x), \ \ldots, \ \varphi_n(x), \ \ldots,$$

определенных всюду в области J_x, таких, что $y = \varphi_n(x)$ лежит всегда выше кривой $y = \varphi_{n'}(x)$, когда $n' < n$.

Рассмотрим B-кривую L_n. Построим вспомогательные B-кривые V_n^1 и $\overline{V}_n^1$, уравнения которых соответственно

$$y_n^1 = \varphi_n(x) + \frac{\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)}{2},$$
$$\overline{y}_n^1 = y_{n-1}^1,$$

где $y_0^1 = 0$.

Обозначим через Q_n часть J_{xy}, лежащую в замкнутой полосе, ограниченной кривыми V_n^1 и $\overline{V}_n^1$. Множество

$$U_n = \mathcal{E} \cdot Q_n$$

будет замкнуто-формным A-множеством 2-го вида порядка α, причем точки множества $U_n^{(\alpha-1)}$ будут принадлежать лишь L_n.

В множестве Q_n построим систему B-кривых

$$V_n^2, \quad V_n^3, \quad \ldots, \quad V_n^k, \quad \ldots,$$

имеющих соответственно уравнения

$$y_n^2 = \varphi_n(x) + \frac{y_n^1 - \varphi_n(x)}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$y_n^k = \varphi_n(x) + \frac{y_n^1 - \varphi_n(x)}{k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и приближающихся к L_n сверху, и систему B-кривых

$$\overline{V}_n^2, \quad \overline{V}_n^3, \quad \ldots, \quad \overline{V}_n^k, \quad \ldots,$$

имеющих соответственно уравнения

$$\overline{y}_n^2 = \varphi_n(x) - \frac{\varphi_n(x) - \overline{y}_n^1}{2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{y}_n^k = \varphi_n(x) - \frac{\varphi_n(x) - \overline{y}_n^1}{k},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

и приближающихся к L_n снизу.

Часть множества U_n, лежащая в замкнутой полосе, ограниченной кривыми V_n^k и V_n^{k+1} (соответственно кривыми $\overline{V}_n^k$ и $\overline{V}_n^{k+1}$), которую мы обозначим через U_n^k (соответственно через $\overline{U}_n^k$), есть замкнуто-формное A-множество 2-го вида порядка, не превосходящего $\alpha - 1$. По предположению, его можно накрыть таким же B-множеством h_n^k (соответственно $\overline{h}_n^k$), лежащим в той же замкнутой полосе.

Множество

$$h_n = \sum_{k=1}^{\infty} h_n^k + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{h}_n^k + L_n$$

содержит A-множество U_n и является замкнуто-формным B-множеством 2-го вида порядка α, причем точки множества $h_n^{(\alpha-1)}$ могут лежать лишь на L_n. Действительно, любая конечная сумма

$$\sum_{k=1}^{m} h_n^k \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^{m} \overline{h}_n^k \tag{3}$$

имеет порядок, равный наибольшему из порядков слагаемых множеств, так как сумма конечного числа приводимых множеств различных ин-

дексов есть приводимое множество индекса, равного наибольшему из индексов слагаемых множеств. Последнее утверждение следует из того, что производное множество конечной суммы множеств совпадает с суммой производных множеств слагаемых множеств. Наибольший же из порядков конечных сумм (3) не превосходит $\alpha-1$. Бесконечные же суммы

$$\sum_{k=1}^{\infty} h_n^k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_n^k$$

имеют для $P_x \cdot \sum_{k=1}^{\infty} h_n^k$ и $P_x \sum_{k=1}^{\infty} \bar{h}_n^k$ еще предельные точки на кривой $L_n \subset h_n$. Следовательно порядок h_n равен α.

Множество $H=\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ накроет A-множество $\mathscr{E}=\sum_{n=1}^{\infty} U_n$ и будет замкнуто-формным B-множеством 2-го вида порядка α.

Действительно, точки множества $H^{(\alpha-1)}$ могут принадлежать лишь множеству $H^* \subset H$, так как $H^*=\sum_{n=1}^{\infty} L_n$, а множество H^* конечноформно.

Пусть α второго рода и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \rightarrow \alpha.$$

Обозначим

$$E_n = \Pi_x \mathscr{E}^{(\alpha_n)}.$$

Очевидно

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0 \quad \text{и} \quad E_n \supset E_m,$$

если $m > n$. Тогда в силу леммы 1, существует система B-множеств таких, что $B_i \cdot B_j = 0$ и $B_n \cdot E_{n+1} = 0$. Пусть

$$Q_n = B_n \times J_y.$$

Множество $U_n = \mathscr{E} \cdot Q_n$ будет замкнуто-формным A-множеством 2-го вида порядка α_{n+1}. По предположению, его можно накрыть таким же B-множеством $H_n \subset Q_n$. Очевидно, B-множество

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

удовлетворяет всем поставленным требованиям, что и требовалось доказать.

§ 3

Рассеянным (clairsemé) множеством называется всякое множество точек, не имеющее подмножества, плотного в себе. Такое множество счетно ([5]).

Пусть $E \equiv E^{[0]}$ есть линейное множество. Если $\alpha = \alpha^* + 1$, то обозначим через $E^{[\alpha]}$ множество всех неизолированных точек множества $E^{[\alpha-1]}$; если α — второго рода, то положим

$$E^{[\alpha]} = \prod_{\alpha' < \alpha} E^{[\alpha']}.$$

Если множество E рассеянное, то найдется такое β, что

$$E^{[\beta]} = E^{[\beta+1]} = \ \dots \ = 0.$$

Наименьшее число β, обладающее этим свойством, назовем индексом множества E.

ЛЕММА 3. *Сумма двух рассеянных множеств есть рассеянное множество, индекс которого не превосходит натуральной суммы * индексов слагаемых.*

Доказательство. Пусть P и Q — два рассеянные множества, принадлежащие I_x, соответственно порядков α и β и пусть

$$H = P + Q;$$

H есть рассеянное множество ([5]).

Мы оценим индекс γ множества H при помощи трансфинитной индукции. Достаточно показать, что лемма верна для произвольного индекса α и $\beta = 1$ и для произвольного индекса α и $\beta = \omega^\gamma$, так как в случае, если $\beta = \beta^* + 1$ или $\beta = \varkappa + \omega^\gamma$, где $\varkappa \geqslant \omega^\gamma$, множество $P + Q$ можно представить соответственно в виде

$$P + Q = (P + Q \cdot CQ^{[\beta-1]}) + Q^{[\beta-1]},$$
$$P + Q = (P + Q \cdot CQ^{[\varkappa]}) + Q^{[\varkappa]}.$$

По трансфинитной индукции лемма будет верна в обоих случаях. Итак, пусть α есть произвольный индекс $\beta = 1$.

Если точка

$$p \in P^{[\alpha']} - P^{[\alpha'+1]},$$

то мы будем говорить, что p имеет в P ранг α'. Если точка q имеет в Q ранг 0, то в $P + Q$ ранг q не превосходит α, так как существует интервал δ_0 такой, что $\delta_0 \cdot Q = q$ и внутри δ_0 ранг точек множества P меньше α. Следовательно, если $\alpha = 1$ и $\beta = 1$, то $\gamma \leqslant 2$.

---

* Всякое трансфинитное число α можно записать в виде полинома, расположенного по убывающим степеням ω,

$$\alpha = \sum_{\xi}^{u} \omega^{\xi} \lambda_{\xi},$$

где ξ — трансфинитные числа, не превосходящие числа u, а коэффициенты λ_ξ являются конечными неотрицательными числами.

Натуральной суммой двух трансфинитных чисел

$$\alpha = \sum_{\xi}^{u} \omega^{\xi} \lambda_{\xi}, \qquad \beta = \sum_{\eta}^{v} \omega^{\eta} \lambda_{\eta}',$$

где $u \leqslant v$, называется $\sigma(\alpha, \beta) = \sum_{\xi}^{v} \omega^{\xi} (\lambda_\xi + \lambda_\xi')$ [см. ([7])].

Пусть, далее, $\beta=1$, а α — произвольное число и для всех $\alpha'<\alpha$ и $\beta=1$ имеем $\gamma\leqslant\alpha'+1$. Пусть ранг точки $p\in P$ есть ν, где $\nu+1\leqslant\alpha$. Рассмотрим последовательность интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, стягивающихся к точке p и не содержащих точек $P^{[\nu]}$, отличных от p. Тогда, по предположению, ранг всех точек множеств $(P+Q)(\delta_n-\delta_{n+1})$ не выше ν. Следовательно, ранг точки p не выше $\nu+1$. Отсюда следует, что индекс всего множества $H=P+Q$ не выше, чем $\alpha+1=\sigma(\alpha, 1)$.

Пусть, наконец, α есть произвольный индекс, $\beta=\omega^\gamma$ и для всех индексов α и $\beta'<\beta$ имеем $\gamma\leqslant\sigma(\alpha, \beta')$. Если точка $q\in Q$, то она имеет ранг η, где $\eta+1<\beta$. Существует интервал δ_0 такой, что $\delta_0\cdot Q=q$. Индекс множества $P\cdot\delta_0$ не превосходит α. Тогда, по предположению, индекс множества $(P+Q)\cdot\delta_0$ не превосходит $\sigma(\alpha, \eta+1)$. Это означает, что ранг точки q не превосходит $\sigma(\alpha, \eta)$. Следовательно, если $\alpha=\omega^\mu$ и $\beta=\omega^\mu$, то $\gamma\leqslant\omega^\mu\cdot 2$.

Пусть $\beta=\omega^\mu$, а α — произвольное число, большее β, и для всех $\alpha'<\alpha$ и $\beta=\omega^\mu$ лемма верна.

Если точка $p\in P$, то она имеет ранг ν, где $\nu+1\leqslant\alpha$. Рассмотрим последовательность интервалов $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n, \ldots$, стягивающихся к точке p и не содержащих точек $P^{[\nu]}$, отличных от p. Индекс множества $Q(\delta_n-\delta_{n+1})$ не превосходит β. Тогда, по предположению, индекс множества $(P+Q)(\delta_n-\delta_{n+1})$ не превосходит $\sigma(\nu, \beta)$. Отсюда следует, что ранг точки q не может превзойти $\sigma(\nu, \beta)$.

Таким образом индекс всего множества H

$$\gamma\leqslant\sigma(\alpha, \beta),$$

что и требовалось доказать.

Плоское множество $\mathscr{E}$, для которого все множества $E\cdot P_x$ суть рассеянные множества, назовем плоским множеством 3-го вида.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что все индексы множеств $\mathscr{E}\cdot P_x$ меньше α, назовем порядком множества 3-го вида.

Пусть $E\equiv E^{[0]}$. Обозначим через $\mathscr{E}^{[\alpha]}$ множество, образованное всеми точками, входящими в множества $(\mathscr{E}\cdot P_x)^{[\alpha]}$, когда x пробегает I_x.

ЛЕММА 4. *Если $\mathscr{E}^{[0]}$ есть A-множество, то и $\mathscr{E}^{[\alpha]}$ при всех $\alpha<\Omega$ есть A-множество.*

Доказательство. Как известно, если из плоского A-множества выкинуть его точки единственности, останется A-множество. Поэтому, если из A-множества выкинуть точки, являющиеся его точками единственности относительно некоторой полосы, параллельной оси абсцисс, то останется A-множество. Из этого и из того, что пересечение счетного числа A-множеств есть A-множество, следует справедливость леммы.

Замечание. Если $\mathscr{E}$ есть счетно-формное B-множество, то $\mathscr{E}^{[\alpha]}$ есть также B-множество.

ТЕОРЕМА III. *Всякое плоское A-множество 3-го вида порядка α можно накрыть таким же B-множеством.*

Доказательство. Пусть* $\mathcal{E} \subset I_{xy}$ есть A-множество 3-го вида порядка α. Назовем полосой Бэра n-го ранга $I_{i_1\ldots i_n}$ множество всех точек области I_{xy}, ординаты которых принадлежат интервалу Бэра n-го ранга $\delta_{i_1\ldots i_n}$.

Применим метод трансфинитной индукции. Достаточно показать, что теорема верна для

1) $\alpha = 2$,
2) $\alpha = \alpha^* + n, \quad n > 1$,
3) α — число 2-го рода,
4) $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* — число 2-го рода.

Пусть $\alpha = 2$. Каждое множество $\mathcal{E} \cdot P_x$ состоит из изолированных точек. Тогда $\mathcal{E}^{[1]} = 0$. Однако

$$\mathcal{E}^{[1]} = \prod_{n=0}^{\infty} \mathcal{E}_n^{[0]} = 0,$$

где $\mathcal{E}_0^{[0]} = \mathcal{E}^{[0]}$, а $\mathcal{E}_n^{[0]}$ получается из $\mathcal{E}_{n-1}^{[0]}$ путем выбрасывания его точек единственности в каждой полосе Бэра $(n-1)$-го ранга. Множества $\mathcal{E}_n^{[0]}$ есть A-множества, причем $\mathcal{E}_n^{[0]} \supset \mathcal{E}_m^{[0]}$, если $m > n$.

На основании леммы 1 можно построить систему B-множеств таких, что $B_i \cdot B_j = 0$ и $B_n \cdot \mathcal{E}_n^{[0]} = 0$.

Множество $M_n = \mathcal{E} \cdot B_n$ будет A-множеством, униформным в каждой полосе Бэра $(n-1)$-го ранга.

Рассмотрим A-множество M_1. Пусть

$$E_1 = \Pi_x M_1,$$

$$\overline{E}_1 = \Pi_x \left(\mathcal{E} \cdot \sum_{k=2}^{\infty} B_k \right) = \Pi_x (\mathcal{E} - M_1).$$

Это будут A-множества, для которых $E_1 \cdot \overline{E}_1 = 0$.

Так как для A-множеств выполнена аксиома I_2 ([8]), то существуют B-множества N_1 и $\overline{N}_1$ такие, что

$$N_1 \supset E_1, \quad \overline{N}_1 \supset \overline{E}_1$$

и

$$N_1 \cdot \overline{N}_1 = 0.$$

Множество

$$Q_1 = N_1 \times I_y \supset M_1.$$

Множество M_1 униформно. По теореме 1 Гливенко его можно накрыть таким же B-множеством $H_1 \subset Q_1$.

Рассмотрим A-множество M_n. Множество

$$M_n^{(i_1\ldots i_{n-1})} = M_n \cdot I_{i_1\ldots i_{n-1}}$$

униформно. Пусть

$$E_n^{(i_1\ldots i_{n-1})} = \Pi_x M_n^{(i_1\ldots i_{n-1})},$$

$$\overline{E}_n^{(i_1\ldots i_{n-1})} = \Pi_x \left(\mathcal{E} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} B_k \cdot I_{i_1\ldots i_{n-1}} \right) = \Pi_x [(\mathcal{E} - M_n) I_{i_1\ldots i_{n-1}}].$$

* Легко доказать, что теорема будет верна и для $E \subset J_{xy}$.

Это будут A-множества, для которых

$$E_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\cdot\overline{E}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}=0.$$

Так как для A-множеств выполнена аксиома I_2 (8), то существуют B-множества $\mathfrak{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$ и $\overline{\mathfrak{N}}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$ такие, что

$$\mathfrak{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\supset E_n^{(i_1\dots i_{n-1})},\quad \overline{\mathfrak{N}}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\supset \overline{E}_n^{(i_1\dots i_{n-1})},$$
$$\mathfrak{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\cdot\overline{\mathfrak{N}}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}=0.$$

Пусть

$$N_n^{(i_1\dots i_{n-1})}=C\,(N_1+N_2^{(i_1)}+\,\dots\,+N_{n-1}^{(i_1\dots i_{n-2})})\cdot\mathfrak{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})},$$
$$\overline{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}=C\,(N_1+N_2^{(i_1)}+\,\dots\,+N_{n-1}^{(i_1\dots i_{n-2})})\cdot\overline{\mathfrak{N}}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}.$$

Это также будут B-множества такие, что

$$N_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\supset E_n^{(i_1\dots i_{n-1})},\quad \overline{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\supset \overline{E}_n^{(i_1\dots i_{n-1})},$$
$$N_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\cdot\overline{N}_n^{(i_1\dots i_{n-1})}=0.$$

Множество

$$Q_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\doteq N_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\times I_{i_1\dots i_{n-1}}\supset M_n^{(i_1\dots i_{n-1})}.$$

По теореме 1 Гливенко множество $M_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$ можно накрыть униформным B-множеством $H_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\subset Q_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$. Множество

$$H_n=\sum_{i_1,\dots,i_{n-1}} H_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$$

накроет множество M_n и будет униформным в каждой полосе $I_{i_1\dots i_{n-1}}$. Множество

$$H=\sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

накроет A-множество $\mathcal{E}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$, причем каждое из множеств $H\cdot P_x$ будет состоять из изолированных точек.

Действительно, если точка $q\in H\cdot P_x$, то q принадлежит хотя бы одному H_n и только одному, так как $H_n\cdot H_m=0$ при $n\neq m$. Но множество H_n униформно в каждой полосе $I_{i_1\dots i_{n-1}}$, причем $H_n^{(i_1\dots i_{n-1})}\subset Q_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$, которое никаких других точек множества H кроме $H_n^{(i_1\dots i_{n-1})}$ не содержит. Следовательно точка q на прямой P_x будет заключена в интервал Бэра $\delta_{i_1\dots i_{n-1}}$, который никаких других точек множества H не содержит, т. е. точка q будет изолированной точкой.

Таким образом теорема верна для $\alpha=2$.

Пусть $\alpha=\alpha^*+n$, $n>1$, и для $\alpha'<\alpha$ теорема верна. Множество $\mathcal{E}^{[\alpha-1]}=0$; A-множество $\mathcal{E}^{[\alpha-2]}$ таково, что все множества $P_x\cdot\mathcal{E}^{[\alpha-2]}$ состоят из изолированных точек. Так как теорема верна для $\alpha=2$, то его можно накрыть таким же B-множеством H^*.

Множество $U=\mathcal{E}\cdot CH^*$ будет плоским A-множеством 3-го вида порядка $\alpha-1$. По предположению, его можно накрыть таким же B-множеством $\overline{H}$.

Множество $H = H^* + \overline{H}$ накроет множество $\mathscr{E}$ и будет рассеянно-формным B-множеством порядка α, так как, в силу леммы 3, сумма двух рассеянных множеств $P_x \cdot H^*$ и $P_x \overline{H}$ соответственно индекса 1 и индекса, не превышающего $\alpha - 1$, будет рассеянным множеством индекса, не превышающего $\alpha - 1$.

Пусть α второго рода и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \to \alpha.$$

Обозначим

$$E_n = \Pi_x \mathscr{E}^{[\alpha_n]}.$$

Очевидно

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0 \text{ и } E_n \supset E_m,$$

если $m > n$.

Согласно лемме 1 можно построить систему B-множеств таких, что $B_i \cdot B_j = 0$, $B_n \cdot E_{n+1} = 0$. Пусть

$$Q_n = B_n \times I_y.$$

Множество $U_n = \mathscr{E} \cdot Q_n$ будет плоским A-множеством 3-го вида порядка $\alpha_{n+1} + 1 < \alpha$. По предположению, его можно накрыть таким же B-множеством $H_n \subset Q_n$.

Очевидно множество

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} H_n$$

удовлетворяет всем поставленным требованиям.

Пусть $\alpha = \alpha^* + 1$, где α^* есть трансфинитное число второго рода, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Имеем

$$\mathscr{E}^{[\alpha^*]} = \prod_{\alpha' < \alpha^*} \mathscr{E}^{[\alpha']} = 0. \tag{4}$$

Пусть

$$E^{\alpha'} = \Pi_x \mathscr{E}^{[\alpha']}, \quad N_1 = \prod_{\alpha' < \alpha^*} E^{\alpha'}.$$

Обозначим

$$U_1 = (N_1 \times I_y) \cdot \mathscr{E}.$$

Рассмотрим полосу Бэра $(n-1)$-го ранга $I_{i_1 \ldots i_{n-1}}$. Пусть

$$E^{\alpha'}_{i_1 \ldots i_{n-1}} = \Pi_x (\mathscr{E}^{[\alpha']} \cdot I_{i_1 \ldots i_{n-1}}),$$
$$N_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} = \prod_{\alpha' < \alpha^*} E^{\alpha'}_{i_1 \ldots i_{n-1}}.$$

Обозначим

$$U_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} = (N_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} \times I_{i_1 \ldots i_{n-1}}) \cdot \mathscr{E}.$$

Пусть

$$U_n = \sum_{i_1, \ldots, i_{n-1}} U_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})}.$$

Рассмотрим систему плоских A-множеств

$$\mathscr{E} \equiv U_0 \supset U_1 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots \tag{5}$$

Докажем, что

$$\prod_{n=0}^{\infty} U_n = 0.$$

Действительно, если точка

$$q(x_0, y_0) \in \prod_{n=0}^{\infty} U_n,$$

то это означает, что, каково бы ни было n, интервал Бэра ранга n на прямой P_{x_0}, содержащий точку q, содержит также точки всех множеств $\mathcal{E}^{[\alpha']}$, где $\alpha' < \alpha^*$. Но так как $\prod_{n=0}^{\infty} U_n \subset \mathcal{E}$, то это означает, что $q \in \mathcal{E}^{[\alpha^*]}$, что противоречит равенству (4).

На основании леммы 1 существуют B-множества такие, что $B_i \cdot B_j = 0$ и $B_n \cdot U_n = 0$. Образуем A-множества

$$K_n = B_n \cdot \mathcal{E}.$$

Каждое из них является плоским A-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего α. Рассмотрим множество K_1. Пусть

$$T_1 \stackrel{\bullet}{=} \Pi_x K_1.$$

Ясно, что

$$T_1 \cdot N_1 = 0.$$

Так как для A-множеств выполняется аксиома I_2 ([8]), то существует B-множество L_1 такое, что

$$L_1 \supset T_1 \text{ и } CL_1 \supset N_1.$$

Пусть

$$W_1 = L_1 \times I_y.$$

Множество

$$M_1 = \mathcal{E} \cdot W_1 = K_1$$

и является плоским A-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего α^*. По предположению, его можно накрыть таким же B-множеством $H_1 \subset W_1$.

Если построены все плоские A-множества 3-го вида M_k для $k \leqslant n-1$, то рассмотрим A-множество

$$\overline{K}_n = K_n \cdot C \sum_{k=1}^{n-1} M_k.$$

Пусть

$$\overline{T}_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} = \Pi_x (\overline{K}_n \cdot I_{i_1 \ldots i_{n-1}}).$$

Ясно, что

$$\overline{T}_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} N_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} = 0.$$

Так как для A-множеств выполняется аксиома I_2 ([8]), то существует B-множество $\Lambda^{(i_1 \ldots i_{n-1})}$ такое, что

$$\Lambda^{(i_1 \ldots i_{n-1})} \supset \overline{T}_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})}, \quad C\Lambda_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} \supset N_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})}.$$

Пусть

$$L_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})} = C(L_1 + L_2^{(i_1)} + \ldots + L_{n-1}^{(i_1 \ldots i_{n-2})}) \cdot \Lambda_n^{(i_1 \ldots i_{n-1})}.$$

Ясно, что

$$L_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\supset \overline{T}_n^{(i_1\ldots i_{n-1})},\quad CL_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\supset N_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}.$$

Пусть

$$W_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}=L_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\times I_{i_1\ldots i_{n-1}}.$$

Множество

$$M_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}=\mathscr{E}\cdot W_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\supset \overline{K}_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}$$

и является плоским A-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего α^*. По предположению, его можно накрыть таким же B-множеством $H_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\subset W_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}$; B-множество $H_n=\sum\limits_{i_1,\ldots,i_{n-1}} H_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}$ накроет A-множество $M_n=\sum\limits_{i_1,\ldots,i_{n-1}} M_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}$ и будет плоским A-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего $\alpha=\alpha^*+1$.

Множество $H=\sum\limits_{n=1}^{\infty} H_n$ накроет A-множество $\mathscr{E}=\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ и будет плоским B-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего $\alpha=\alpha^*+1$, так как

$$H=\sum_{i_1,\ldots,i_n,n} H_n^{(i_1\ldots i_{n-1})},$$

где

$$H_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\subset W_n^{(i_1\ldots i_{n-1})},\quad W_n^{(i_1\ldots i_{n-1})}\cdot W_m^{(i'_1\ldots i'_{m-1})}=0$$

при $n\neq m$ или хотя при одном $i_k\neq i'_k$, что и требовалось доказать.

§ 4

ТЕОРЕМА IV. *Всякое компактно-формное A-множество $\mathscr{E}\subset I_{xy}$ можно накрыть таким же B-множеством $H\subset I_{xy}$.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{E}\subset I_{xy}$ есть компактно-формное A-множество. Обозначим

$$\mathscr{E}_{i_1\ldots i_n}=\mathscr{E}\cdot I_{i_1\ldots i_n},$$
$$E_{i_1\ldots i_n}=\Pi_x\cdot \mathscr{E}_{i_1\ldots i_n}.$$

Так как $\mathscr{E}$ является компактно-формным A-множеством, то

$$\overline{\lim_{i_n}}\, E_{i_1\ldots i_{n-1}i_n}=0.$$

На основании выполнения аксиомы * $\mathrm{I}_{\overline{\lim}}$ ([8]) для A-множеств существует система B-множеств

$$N_{i_1\ldots i_{n-1}1},\ N_{i_1\ldots i_{n-1}2},\ \ldots,\ N_{i_1\ldots i_{n-1}i_n},\ \ldots$$

такая, что

$$N_{i_1\ldots i_{n-1}i_n}\supset E_{i_1\ldots i_{n-1}i_n}\ \text{и}\ \overline{\lim_{i_n}}\, N_{i_1\ldots i_{n-1}i_n}=0.$$

Множество

$$H_{i_1\ldots i_n}=N_{i_1\ldots i_n}\times I_{i_1\ldots i_n}\supset \mathscr{E}_{i_1\ldots i_n}$$

* То же, что I_{II}, только вместо ΠE и ΠH стоит $\overline{\lim}\, E_n$ и $\overline{\lim}\, H_n$.

и является B-множеством. Множество

$$H^n = \sum_{i_1, \ldots, i_n} H_{i_1 \ldots i_n} \supset \mathscr{E}$$

и пересекается любой параллелью оси OY по конечному числу интервалов Бэра n-го ранга в каждом интервале Бэра $(n-1)$-го ранга.

Множество

$$H = \prod_{n=1}^{\infty} H^n \supset \mathscr{E}$$

и является компактно-формным B-множеством. Действительно прямая P_x, пересекая H, пересекает и $H^1, H^2, \ldots, H^n, \ldots$, частью которых является H. Следовательно множество $H \cdot P_x$ содержится в конечном числе интервалов Бэра n-го ранга в каждом интервале $(n-1)$-го ранга, где $n = 1, 2, \ldots$, и является замкнуто-формным B-множеством, что и требовалось доказать.

Глава II

Пусть H есть B-множество ($H \subset I_{xy}$ или J_{xy}) и все множества $H \cdot P_x$ имеют некоторое свойство K. Спрашивается, возможно ли расщепить B-множество H на непересекающиеся B-кривые так, чтобы семейство кривых обладало некоторым свойством, тесно связанным с K?

В этом направлении Н. Н. Лузиным была доказана следующая теорема [(2), стр. 244]: всякое счетно-формное B-множество H расщепляется на счетное множество униформных B-кривых таких, что из двух кривых этого семейства всегда одна лежит под другой.

Для случая конечно-формных B-множеств эта теорема была уточнена А. А. Ляпуновым следующим образом (4): всякое конечно-формное B-множество H расщепляется на счетное семейство униформных B-кривых

$$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x), \ldots,\ y = \varphi_n(x), \ldots$$

таких, что кривая $y = \varphi_n(x)$ всегда лежит выше кривой $y = \varphi_{n'}(x)$, когда $n' < n$; проекция кривой $y = \varphi_n(x)$ на ось OX содержится в проекции кривой $y = \varphi_{n'}(x)$ на ту же ось.

§ 1

Семейство U униформных кривых *вполне упорядочено вверх*, если во всяком его подмножестве найдется кривая, лежащая строго ниже всех остальных и такая, что ее проекция на J_x содержит проекции всех остальных кривых.

Пусть $U \equiv U^0$ есть вполне упорядоченное вверх семейство B-кривых. Обозначим через U^β множество кривых, получающееся из U^0 путем выбрасывания из него β нижних кривых.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что $U^\alpha = 0$, назовем *порядком* вполне упорядоченного вверх семейства кривых.

ТЕОРЕМА V. *Всякое плоское B-множество H 1-го вида порядка α расщепляется на вполне упорядоченное вверх семейство B-кривых того же порядка.*

Доказательство. Пусть $H \subset J_{xy}$ есть B-множество 1-го вида порядка α. Из теоремы Мазуркевича [(2), стр. 282] следует, что множество всех нижних точек счетно-формного B-множества есть также B-множество. Пусть

$$L = \Pi_x H.$$

Определим B-кривую $y = \varphi_1(x)$ на множестве L как совокупность нижних точек множества H. Обозначим ее через Λ_1.

Если определены все B-кривые $\Lambda_{\beta'}$ для $\beta' < \beta$, где β есть любое трансфинитное число, то пусть

$$H^\beta = H - \sum_{\beta' < \beta} \Lambda_{\beta'}.$$

Множество H^β также будет B-множеством 1-го вида. Пусть

$$L^\beta = \Pi_x H^\beta.$$

Определим B-кривую $y = \varphi_\beta(x)$ на множестве L^β как совокупность всех нижних точек множества H^β. Обозначим ее через Λ_β.

Совокупность B-кривых

$$\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_\beta, \ldots \mid \alpha$$

исчерпает все B-множество H и образует вполне упорядоченное вверх семейство B-кривых порядка α, что и требовалось доказать.

§ 2

Кривую $y = \varphi_m(x)$ назовем изолированной кривой семейства униформных кривых $U = \{\varphi_n(x)\}$, если можно построить две кривые $y'(x)$ и $y''(x)$ [$y'(x) < \varphi_m(x) < y''(x)$ при всяком x] такие, что в полосе, заключенной между ними, нет точек других кривых этого семейства.

Пусть $U^{[0]} \equiv U$ есть счетное семейство униформных кривых таких, что из двух кривых этого семейства одна всегда лежит ниже другой в общей области их определения, $U^{[\beta+1]}$ есть множество всех неизолированных кривых семейства $U^{[\beta]}$, и $U^{[\beta]} = \prod_{\beta' < \beta} U^{[\beta']}$, если β есть трансфинитное число 2-го рода.

Семейство U рассеяно, если существует такое число α, что $U^{[\alpha]} = 0$.

Наименьшее из трансфинитных чисел α таких, что $U^{[\alpha]} = 0$, назовем порядком рассеянного семейства кривых U.

ТЕОРЕМА VI. *Всякое плоское B-множество 3-го вида порядка α расщепляется на рассеянное семейство B-кривых того же порядка, если α есть трансфинитное число 2-го рода, и порядка $\alpha - 1$, если α — число 1-го рода.*

Доказательство*. Пусть $H \subset I_{xy}$ есть B-множество 3-го вида порядка α.

Применим метод трансфинитной индукции. Пусть $\alpha = 2$. Каждое множество $H \cdot P_x$ состоит из изолированных точек. Так как множество H счетно-формно, то на основании теоремы Лузина оно расщепляется на счетное множество униформных B-кривых

$$L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots,$$

определенных соответственно уравнениями

$$y = \varphi_1(x),\ y = \varphi_2(x), \ldots, y = \varphi_n(x), \ldots,$$

причем из двух кривых этого семейства всегда одна лежит ниже другой. Это множество кривых образует рассеянное семейство кривых порядка $\alpha = 1$.

Действительно, каждая кривая L_n является изолированной кривой, так как нижняя грань всех B-кривых L_i, лежащих выше L_n, есть униформная B-кривая V_n'. Аналогично верхняя грань всех B-кривых, лежащих ниже L_n, есть B-кривая V_n''. Кривые V_n' и V_n'' не пересекаются с L_n. Пусть их уравнения соответственно суть $y = \varphi_n'(x)$ и $y = \varphi_n''(x)$. Тогда полоса, заключенная между кривыми

$$y_n'(x) = \frac{\varphi_n'(x) - \varphi_n(x)}{2}, \quad y_n''(x) = \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n''(x)}{2}$$

содержит кривую L_n и не содержит точек других кривых L_i для $i \neq n$.

Пусть $\alpha = \alpha^* + n$, $n > 1$, и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Множество $H^{[\alpha-2]}$ является B-множеством 3-го вида порядка 2. Следовательно оно расщепляется на рассеянное семейство униформных B-кривых $L_1, L_2, \ldots, L_n, \ldots$, лежащих соответственно на кривых $y = \varphi_1(x)$, $y = \varphi_2(x), \ldots, y = \varphi_n(x), \ldots$, определенных всюду в области I_x порядка 1

Рассмотрим B-кривую L_n. Обозначим через L_n' нижнюю грань всех B-кривых L_k, расположенных выше кривой $y = \varphi_n(x)$. Это будет униформная B-кривая. Существует униформная B-кривая $y = \varphi_n'(x)$, всюду определенная в области I_x и расположенная выше кривой $y = \varphi_n(x)$, которая содержит в себе кривую L_n'.

Аналогично обозначим через L_n'' верхнюю грань всех B-кривых L_k, расположенных ниже кривой $y = \varphi_n(x)$. Это также будет униформная B-кривая. Существует B-кривая $y = \varphi_n''(x)$, определенная всюду в области I_x и расположенная ниже кривой $y = \varphi_n(x)$, которая содержит в себе кривую L_n''.

Определим B-кривые V_n' и V_n'', имеющие соответственно уравнения

$$\bar{y}_n' = \varphi_n(x) + \frac{\varphi_n'(x) - \varphi_n(x)}{2}, \quad \bar{y}_n'' = \varphi_n(x) - \frac{\varphi_n(x) - \varphi_n''(x)}{2}.$$

Обозначим через Q_n часть I_{xy}, ограниченную B-кривыми V_n' и V_n'', включая и кривую V_n''. Множество

$$M_n = H \cdot Q_n$$

будет B-множеством 3-го вида порядка α, причем точки множества

* Теорема легко может быть доказана и для $H \subset J_{xy}$.

$M_n^{[\alpha-2]}$ составляют кривую L_n и только ее. Пусть

$$E_n = \Pi_n L_n,$$
$$K_n^1 = (CE_n \times I_y) \cdot M_n,$$
$$\overline{M}_n = (E_n - I_y) \cdot M_n - L_n.$$

Обозначим через K_n^2 часть множества $\overline{M}_n$, лежащую выше кривой L_n, и через K_n^3 — часть $\overline{M}_n$, лежащую ниже кривой L_n. Каждое из множеств K_n^m $(m = 1, 2, 3)$ есть B-множество 3-го вида порядка $\leqslant \alpha - 1$. По предположению, они расщепляются на рассеянные множества униформных B-кривых порядка, не превосходящего $\alpha - 2$.

Если произведем расщепление множеств K_n^m $(m = 1, 2, 3)$ для каждого n, то полученные B-кривые и кривые L_n, взятые вместе, дадут требуемое расщепление множества H.

Пусть α второго рода и для всех $\alpha' < \alpha$ теорема верна. Пусть

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n < \ldots \to \alpha.$$

Множество

$$E_n = \Pi_x H^{[\alpha_n]}$$

будет B-множеством, как проекция счетно-формного B-множества. Очевидно

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_n = 0 \quad \text{и} \quad E_n \supset E_m,$$

если $m > n$. B-множества

$$B_1 = E_1 \cdot CE_2,$$
$$B_2 = E_2 \cdot CE_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$B_n = E_n \cdot CE_{n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

будут попарно без общих точек, причем

$$B_n \cdot E_{n+1} = 0.$$

Множество

$$M_n = H(B_n \times I_y)$$

будет B-множеством 3-го вида порядка $\alpha_{n+1} + 1$. По предположению, его можно расщепить на рассеянное семейство B-кривых $\{L_n^j\}$ порядка α_{n+1}

$$M_n = \sum_j L_n^j.$$

Следовательно множество

$$H = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$$

расщепляется на рассеянное семейство B-кривых порядка α,

$$H = \sum_{j,\,n} L_n^j.$$

Пусть $\alpha=\alpha^*+1$, где α^* — число второго рода и для всех $\alpha'<\alpha$ теорема верна. Множество

$$H^{[\alpha^*]}=\prod_{\alpha'<\alpha^*} H^{[\alpha']}=0. \tag{6}$$

Пусть

$$E^{\alpha'}=\Pi_x H^{[\alpha']}, \quad N_0=\prod_{\alpha'<\alpha^*} E^{\alpha'}.$$

Это будут B-множества. Пусть

$$Q_0=N_0\times I_y.$$

Рассмотрим полосу Бэра n-го ранга $I_{i_1\ldots i_n}$. Пусть

$$E^{\alpha'}_{i_1\ldots i_n}=\Pi_x\left(H^{[\alpha']}\cdot I_{i_1,\ldots i_n}\right),$$
$$N_n^{(i_1\ldots i_n)}=\prod_{\alpha'<\alpha^*} E^{\alpha'}_{i_1\ldots i_n}.$$

Множество

$$Q_n^{(i_1\ldots i_n)}=N_n^{(i_1\ldots i_n)}\times I_{i_1\ldots i_n}$$

будет B-множеством. Пусть

$$Q_n=\sum_{i_1,\ldots,i_n} Q_n^{(i_1\ldots i_n)}.$$

Получаем, таким образом, ряд плоских B-множеств $Q_0, Q_1, \ldots, Q_n, \ldots$, каждое из которых содержится в предыдущем. B-множество

$$Q=\prod_{n=0}^{\infty} Q_n$$

обладает тем свойством, что для любой точки $q\in Q$ на прямой P_x, проходящей через эту точку, в любой окрестности точки q содержатся точки любого из множеств $H^{[\alpha']}$, где $\alpha'<\alpha^*$.

Докажем, что

$$HQ=0. \tag{7}$$

Действительно, если точка $q(x_0, y_0)\in HQ$, то это означает, что, каково бы ни было n, интервал Бэра ранга n на прямой P_{x_0}, содержащей точку q, содержит также точки всех множеств $H^{[\alpha']}$, где $\alpha'<\alpha^*$. Но так как $q\in H$, то это означает, что $q\in H^{[\alpha^*]}$, что противоречит равенству (6).

Применим к множеству H следующий процесс. Рассмотрим B-множество

$$W_0=CQ_0.$$

Множество

$$M_0=H\cdot W_0$$

будет B-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего α^*. По предположению, его можно расщепить на рассеянное множество B-кривых также порядка, не превосходящего α^*:

$$M_0=\sum_k L_{0,k}.$$

Рассмотрим полосу $I_{i_1 \ldots i_n}$ и в ней B-множество

$$W_n^{(i_1 \ldots i_n)} = Q_0 \cdot Q_1^{(i_1)} \cdot \ldots \cdot Q_{n-1}^{(i_1 \ldots i_{n-1})} \cdot CQ_n^{(i_1 \ldots i_n)}.$$

Множество

$$M_n^{(i_1 \ldots i_n)} = H \cdot W_n^{(i_1 \ldots i_n)}$$

будет B-множеством 3-го вида порядка, не превосходящего α^*. По предположению, его можно расщепить на рассеянное семейство B-кривых также порядка, не превосходящего α^*:

$$M_n^{(i_1 \ldots i_n)} = \sum_k L_{n,k}^{(i_1 \ldots i_n)}.$$

Следовательно B-множество $M_n = \sum\limits_{i_1, \ldots, i_n} M_n^{(i_1 \ldots i_n)}$ расщепляется на рассеянное семейство B-кривых порядка, не превосходящего α^*:

$$M_n = \sum_{k, i_1, \ldots, i_n} L_{n,k}^{(i_1 \ldots i_n)},$$

так как каждое из слагаемых семейств B-кривых при n фиксированном отделяется одно от другого частями полос Бэра n-го ранга $W_n^{(i_1 \ldots i_n)}$.

Этим процессом мы исчерпаем все B-множество H, так как в силу равенства (7)

$$W = \sum_{n=0}^{\infty} W_n = CQ \supset H,$$

где

$$W_n = \sum_{i_1, \ldots, i_n} W_n^{(i_1 \ldots i_n)}.$$

Следовательно B-множество $H = \sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ расщепляется на счетное множество униформных B-кривых $H = \sum\limits_{k, i_1, \ldots, i_n, n} L_{n,k}^{(i_1 \ldots i_n)}$, которые образуют рассеянное семейство B-кривых порядка $\alpha - 1 = \alpha^*$, так как каждое из слагаемых семейств B-кривых $\{L_n^{(i_1 \ldots i_n)}\}$ при фиксированном n отделяется одно от другого частью полосы Бэра n-го ранга $W_n^{(i_1 \ldots i_n)}$, что и требовалось доказать.

Случай расщепления B-множества H второго вида порядка α особого рассмотрения не требует, так как является частным случаем теоремы VI.

Педагогический институт
им. К. Либкнехта
Москва

Поступило
26. IV. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Glivenko V., Sur les fonctions implicites, Матем. сборник, XXXVI (1929), 138—142.

[2] Lusin N., Leçons sur les ensembles analytiques, Paris, 1930.

[3] Новиков П. С., Об одном свойстве аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934).

[4] Ляпунов А. А., Об отделимости аналитических множеств, Доклады Ак. Наук СССР, II, № 5 (1934).

[5] De la Vallée Poussin Ch., Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire, Paris, 1934.
[6] Новиков П. С., К теории релятивного континуума, Доклады Ак. Наук СССР, III, № 1 (1934).
[7] Хаусдорф Ф., Теория множеств, ОНТИ, 1937.
[8] Козлова З. И., О кратной отделимости, Доклады Ак. Наук СССР, XXVII (1940).

Z. KOSLOVA. SUR LES ENSEMBLES PLANS ANALYTIQUES OU MESURABLES B

RÉSUMÉ

Le but du présent article est de préciser deux théorèmes de Lusin sur les ensembles analytiques plans et de généraliser quelques théorèmes obtenus par V. Glivenko, ainsi que par P. Novikoff et A. Liapounoff.

Nous démontrons les théorèmes suivants.

THÉORÈME I. *Soit E un ensemble analytique plan qui est coupé par chaque parallele à l'axe OY suivant des ensembles bien ordonnés de type $\leqslant \alpha$. Alors l'ensemble E peut être enfermé dans un ensemble mesurable B jouissant de la même propriété.*

On obtient les théorèmes II et III en remplaçant respectivement les mots «bien ordonnés» par les mots: «réductibles» et «clairsemés», et le théorème IV en remplaçant les mots «bien ordonnés de type $\leqslant \alpha$» par les mots «parfaits non denses».

THÉORÈME V. *Un ensemble mesurable B plan qui est coupé par chaque parallèle à l'axe OY suivant des ensembles bien ordonnés de type $\leqslant \alpha$ peut être décomposé en une suite bien ordonnée du type $\leqslant \alpha$ d'ensembles mesurables B uniformes et disjoints.*

On obtient le théorème VI en remplaçant dans l'énoncé du théorème V les mots «bien ordonné» par le mot «réductible».

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 501—508 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ОСТАТКА ПРИ ПРИБЛИЖЕНИИ ФУНКЦИЙ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ ЛИПШИЦА, СУММАМИ ФЕЙЕРА

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается асимптотическое выражение верхней грани отклонений функций периода 2π от их сумм Фейера по всем функциям, удовлетворяющим условию Липшица степени α $(0<\alpha\leqslant 1)$ с данной константой. Подобные результаты даются также в случае интерполирования тригонометрическими полиномами с равноотстоящими узлами.

§ 1

Пусть $H^{(\alpha)}$ есть класс функций $f(x)$ периода 2π, удовлетворяющих условию Липшица

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant K|x'-x''|^{\alpha}.$$

Обозначим через C_n^{α} верхнюю грань по всем значениям x и всем $f(x)$ из $H^{(\alpha)}$ уклонений

$$|R_n(f,x)|=|f(x)-\sigma_n(f,x)|$$

функции $f(x)$ от суммы Фейера n-го порядка

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt. \tag{1}$$

В § 2 этой работы доказывается

ТЕОРЕМА I. *При* $0<\alpha<1$

$$C_n^{(\alpha)}=KC^{(\alpha)}n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha}), \tag{2}$$

где

$$C^{(\alpha)}=\frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2},$$

а при $\alpha=1$

$$C_n^{(\alpha)}=\frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n}+O(n^{-1}). \tag{2'}$$

Аналогичные результаты получены в § 3 для тригонометрических интерполяций с равноотстоящими узлами интерполирования ([1]). В этом случае, полагая

$$\tilde{\sigma}_n(f,x)=\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-x_i^{(n)})}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}\right)^2, \tag{3}$$

где

$$x_i^{(n)}=\frac{2\pi i}{2n+1} \qquad (i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots),$$

и определяя $\widetilde{C}_n^{(\alpha)}$ как верхнюю грань

$$|\widetilde{R}_n(f, x)| = |f(x)-\widetilde{\sigma}_n(f, x)|$$

по всем x и $f(x)$ из $H^{(\alpha)}$, имеем такую теорему:

ТЕОРЕМА II. *При* $0<\alpha<1$

$$\widetilde{C}_n^{(\alpha)}=K\widetilde{C}^{(\alpha)}n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha}), \tag{4}$$

где

$$\widetilde{C}^{(\alpha)}=2^{3-\alpha}\max_u \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\sin^2\frac{u-2\pi k}{4}}{|u-2\pi k|^{2-\alpha}},$$

а при $\alpha=1$

$$\widetilde{C}_n^{(\alpha)}=\frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n}+O(n^{-1}). \tag{4'}$$

§ 2

Доказательство теоремы I. Если принять во внимание, что функция, стоящая под знаком интеграла в (1), периода 2π и что этот интеграл равен единице для $f(t)\equiv 1$, то для любой функции f из $H^{(\alpha)}$ будем, очевидно, иметь неравенство

$$|R_n(f, x)|\leqslant\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_{x-\pi}^{x+\pi}|f(x)-f(t)|\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt\leqslant$$

$$\leqslant\frac{K}{2\pi(n+1)}\int_{x-\pi}^{x+\pi}|x-t|^{\alpha}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt=F_n(x). \tag{5}$$

С другой стороны, это неравенство обращается в равенство для функции $f_x(t)$ периода 2π, равной

$$f_x(t)=K|x-t|^{\alpha}$$

в интервале $|x-t|\leqslant\pi$ и принадлежащей очевидно к $H^{(\alpha)}$. Отсюда следует, что

$$\sup_{f\subset H^{(\alpha)}}|R_n(f, x)|=F_n(x). \tag{6}$$

В силу того что функция

$$\frac{1}{\sin^2\frac{x-t}{4}}-\frac{1}{\frac{(x-t)^2}{4}}$$

ограничена для $|x-t|\leqslant\pi$, справедливо равенство

$$F_n(x)=\frac{2K}{\pi(n+1)}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}(x-t)}{|x-t|^{2-\alpha}}\,dt+O(n^{-1})$$

равномерно относительно x. В дальнейшем, и это не будет оговариваться особо, все входящие в рассмотрение функции вида $O(n^p)$ и (при неограниченном возрастании n) $o(n^p)$ будут вести себя так равномерно относительно x.

Далее простые подстановки дают

$$F_n(x)=\frac{4K}{\pi(n+1)}\int_0^{\pi}\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}u}{u^{2-\alpha}}\,du+O(n^{-1})=$$

$$=\frac{2^{1+\alpha}K}{\pi(n+1)^{\alpha}}\int_0^{\frac{n+1}{2}\pi}\frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz+O(n^{-1}). \qquad (7)$$

Пусть теперь $0<\alpha<1$, тогда (6) и (7) влекут за собой равенство

$$C_n^{(\alpha)}=\sup_x F_n(x)=\frac{2^{1+\alpha}K}{\pi n^{\alpha}}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz+o(n^{-\alpha}).$$

Интегрируя по частям последний интеграл, получим

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz=\frac{1}{(1-\alpha)2^{\alpha}}\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}\sin t\,dt=\frac{\Gamma(\alpha)}{(1-\alpha)2^{\alpha}}\sin\frac{\alpha\pi}{2},$$

так как последний интеграл является мнимой частью интеграла ([2])

$$-\int_0^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-it}\,dt=-e^{-\frac{\alpha\pi i}{2}}\Gamma(\alpha)\qquad(0<\alpha<1).$$

Этим равенство (2) доказано.

Если же $\alpha=1$, то из (6) и (7) следует

$$C_n^{(1)}=\frac{4K}{\pi(n+1)}\int_0^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 u}{u}\,du+O(n^{-1})=\frac{4K}{\pi n}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{n\pi}{2}}\frac{\sin^2 u}{u}\,du+O(n^{-1})=$$

$$=\frac{4K}{\pi n}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2 u}{u}\,du+O(n^{-1})=\frac{4K}{\pi n}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2k}+O(n^{-1})=\frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n}+O(n^{-1}).$$

§ 3

Доказательство теоремы II. В силу периодичности с периодом 2π функции, стоящей под знаком суммы в (3), и того, что эта

сумма равна единице для $f(t)=1$, для любой функции f из $H^{(\alpha)}$ будет очевидно иметь место неравенство

$$|\tilde{R}_n(f, x)| \leqslant \frac{1}{(2n+1)(n+1)} \sum_{x-\pi<x_i^{(n)}\leqslant x+\pi}^{i} |f(x_i^{(n)})-f(x)| \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-x_i^{(n)})}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}\right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{K}{(2n+1)(n+1)} \sum_{x-\pi<x_i^{(n)}\leqslant x+\pi}^{i} |x_i^{(n)}-x|^\alpha \left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-x_i^{(n)})}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}\right)^2 = \tilde{F}_n(x). \quad (8)$$

С другой стороны, это неравенство обращается в равенство для ранее определенной функции $f_x(t)$, принадлежащей к $H^{(\alpha)}$; поэтому

$$\sup_{f\subset H^{(\alpha)}} |\tilde{R}_n(f, x)| = \tilde{F}_n(x). \quad (9)$$

Легко видеть, что справедливо равенство

$$\frac{|u|^\alpha \sin^2\frac{n+1}{2}u}{\sin^2\frac{u}{2}} = \frac{|u|^\alpha \sin^2\frac{2n+1}{4}u\cos^2\frac{u}{4}}{\sin^2\frac{u}{2}} + A + B, \quad (10)$$

где

$$A = \frac{|u|^\alpha \sin\frac{2u+1}{2}u}{2\sin\frac{u}{2}}, \quad |A| \leqslant \frac{\pi}{2} \text{ при } \alpha=1 \text{ и } |u|\leqslant\pi,$$

$$B = \frac{|u|^\alpha \cos^2\frac{2n+1}{4}u\sin^2\frac{u}{4}}{\sin^2\frac{u}{2}} \leqslant \pi^\alpha \text{ при } 0<\alpha\leqslant 1 \text{ и } |u|\leqslant\pi.$$

Если представить правую часть (8) соответственно разложению (10) в виде трех слагаемых, то последнее из них (соответствующее B) будет порядка $O(n^{-1})$. Докажем, что это же имеет место для слагаемого, соответствующего A. Если $\alpha=1$, то A ограничено, что и влечет за собою наше утверждение. Если $\alpha<1$, то

$$\left|\frac{1}{2n+1} \sum_{x-\pi<x_i^{(n)}\leqslant x+\pi} |x_i^{(n)}-x|^\alpha \frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x_i^{(n)}-x)}{\sin\frac{x_i^{(n)}-x}{2}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\pi}{2n+1} \sum_{x-\pi<x_i^{(n)}\leqslant x+\pi} \frac{\left|\sin\frac{2n+1}{2}(x_i^{(n)}-x)\right|}{|x_i^{(n)}-x|^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{\pi}{2n+1} \sum_{\frac{2\pi}{2n+1}<|x_i^{(n)}-x|<\pi}^{i} + O(1).$$

Последнее равенство справедливо потому, что мы пренебрегли конечным числом слагаемых, каждое из которых по абсолютной величине не превышает $\frac{2n+1}{2}\pi^{\alpha}$. Далее, сумма, стоящая в правой части, не превышает

$$\frac{1}{2}\int\limits_{|t-x|\leqslant\pi}\frac{dt}{|t-x|^{1-\alpha}}=O(1),$$

и так как в нашем распоряжении имеется еще множитель $(n+1)^{-1}$, то утверждение справедливо. Таким образом можно написать

$$\tilde{F}_n(x)=\frac{K}{(2n+1)(n+1)}\sum_{x-\pi<x_i^{(n)}\leqslant x+\pi}{}_i\,|x_i^{(n)}-x|^{\alpha}\times$$

$$\times\frac{\sin^2\frac{2n+1}{4}(x_i^{(n)}-x)\cos^2\frac{x_i^{(n)}-x}{4}}{\sin^2\frac{x_i^{(n)}-x}{2}}+O(n^{-1})=$$

$$=\frac{4K}{(2n+1)(n+1)}\sum_{x-\pi\leqslant x_i^{(n)}<x+\pi}{}_i\,\frac{\sin^2\frac{2n+1}{4}(x_i^{(n)}-x)}{|x_i^{(n)}-x|^{2-\alpha}}+O(n^{-1}). \qquad (11)$$

Первый член правой части (11) равен, если пренебречь величиной $O(n^{-1})$, сумме

$$\frac{4K}{(n+1)(2n+1)^{\alpha-1}}\sum_{|u-2\pi k|\leqslant\pi(2n+1)}{}_k\,\frac{\sin^2\frac{u-2\pi k}{4}}{|u-2\pi k|^{2-\alpha}}, \qquad (12)$$

где $u=(2n+1)x$. Полученное выражение представляет собою функцию от u периода 2π и поэтому достаточно ограничиться рассмотрением изменения u в интервале $0\leqslant u<2\pi$.

Пусть теперь $\alpha<1$, тогда сумма, фигурирующая в (12), при неограниченном возрастании n равномерно относительно u стремится к

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\,\frac{\sin^2\frac{u-2\pi k}{4}}{|u-2\pi k|^{2-\alpha}},$$

откуда следует

$$\tilde{F}_n(x)=\tilde{F}_n\left(\frac{u}{2n+1}\right)=\frac{2^{3-\alpha}K}{n^{\alpha}}\sum_{-\infty}^{+\infty}{}_k\,\frac{\sin^2\frac{u-2\pi k}{4}}{|u-2\pi k|^{2-\alpha}}+o(n^{-\alpha}).$$

Если принять во внимание, что

$$\tilde{C}_n^{(\alpha)}=\sup_x\tilde{F}_n(x),$$

то доказано (4).

Рассмотрим теперь случай $\alpha=1$. Тогда сумма, фигурирующая в (12), неограниченно вместе с n возрастает, и нам предстоит установить ее асимптотическое поведение. Пренебрегая конечным числом членов, дающих порядок $O(1)$, ее можно представить как

$$\sum_{2\pi<|u-2\pi k|<(2n+1)\pi}^{k} \frac{\sin^2 \frac{u-2\pi k}{4}}{|u-2\pi k|}+O(1)=$$

$$=\sum_{2\pi<2\pi k-u<(2n+1)\pi}^{k}+\sum_{2\pi<u-2\pi k<(2n+1)\pi}^{k}+O(1)=\sum\nolimits_{\mathrm{I}}+\sum\nolimits_{\mathrm{II}}+O(1). \quad (13)$$

Оценим сумму $\sum_{\mathrm{I}}$. Пусть m и $l=m+s$ — натуральные числа соответственно наименьшее и наибольшее, для которых выполняются неравенства

$$2\pi<2\pi m-u, \qquad 2\pi l-u<(2n+1)\pi.$$

Очевидно

$$s=O(n). \quad (14)$$

Пусть далее

$$2\pi m-u=2\pi+\omega, \qquad \text{где } 0<\omega\leqslant 2\pi,$$

тогда

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}}=\sum_{i=1}^{s+1} \sin^2 \frac{u-(m+i-1)2\pi}{4}(2\pi i+\omega)^{-1}=$$

$$=\sum_{i=1}^{s+1} \sin^2 \frac{u-(m+i-1)2\pi}{4}(2\pi i)^{-1}+O(1). \quad (15)$$

Примем еще во внимание, что

$$\sin^2 \frac{u-2\pi k}{4}=\begin{cases} \sin^2 \frac{u}{4} & \text{при } k \text{ четном}, \\ \cos^2 \frac{u}{4} & \text{при } k \text{ нечетном}, \end{cases}$$

а также то обстоятельство, что сумма членов ряда $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$, стоящих на четных (нечетных) местах, номер которых не превышает $s+1$, равна в силу (14)

$$\frac{1}{2}\lg n+O(1).$$

Из (15) в таком случае следует

$$\sum\nolimits_{\mathrm{I}}=\frac{1}{4\pi}\sin^2 \frac{u}{4}\lg n+\frac{1}{4\pi}\cos^2 \frac{u}{4}\lg n+O(1)=\frac{1}{4\pi}\lg n+O(1). \quad (16)$$

Для $\sum_{\mathrm{II}}$, рассуждая аналогично, получим ту же оценку

$$\sum\nolimits_{\mathrm{II}}=\frac{1}{4\pi}\lg n+O(1). \quad (17)$$

Теперь, в силу того что (12) отличается от (11) на величину $O(n^{-1})$, а также вследствие (13), (16) и (17) будем иметь при $\alpha=1$

$$F_n(x)=\frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n}+O(n^{-1}),$$

что приводит к равенству (4').

Днепропетровский гос. университет

Поступило
7.VII.1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Marcinkiewicz I., Sur l'interpolation (I), Studia Mathem., VI (1936), 1—17.
[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, стр. 222.

S. NIKOLSKI. SUR L'ALLURE ASYMPTOTIQUE DU RESTE DANS L'APPROXIMATION AU MOYEN DES SOMMES DE FEJER DES FONCTIONS VÉRIFIANT LA CONDITION DE LIPSCHITZ

RÉSUMÉ

Soit $H^{(\alpha)}$ la classe des fonctions $f(x)$ de période 2π vérifiant la condition de Lipschitz

$$|f(x')-f(x'')|\leqslant K|x'-x''|^{\alpha}.$$

Désignons par $C_n^{(\alpha)}$ la borne supérieure par rapport à tous les x et toutes les $f(x)$ appartenant à $H^{(\alpha)}$ des différences

$$|f(x)-\sigma_n(f,x)|$$

entre la fonction $f(x)$ et la somme de Fejer d'ordre n

$$\sigma_n(f,x)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\int_0^{2\pi} f(t)\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2 dt.$$

Alors le théorème suivant a lieu.

THÉORÈME I. *Si* $0<\alpha<1$ *on a*

$$C_n^{(\alpha)}=KC^{(\alpha)}n^{-\alpha}+o(n^{-\alpha}),$$

où

$$C^{(\alpha)}=\frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)}\sin\frac{\alpha\pi}{2},$$

et si $\alpha=1$ *on a*

$$C_n^{(\alpha)}=\frac{2K}{\pi}\frac{\lg n}{n}+O(n^{-1}).$$

On obtient des résultats analogues dans le cas des interpolations trigonométriques. Dans ce cas en posant

$$\tilde{\sigma}_n(f,x)=\frac{1}{(2n+1)(n+1)}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)})\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}(x-x_i^{(n)})}{\sin\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}\right)^2,$$

$$x_i^{(n)}=\frac{2\pi i}{2n+1}\qquad(i=0,1,2,\ldots,2n),$$

et en définissant $\widetilde{C}_n^{(\alpha)}$ comme la borne supérieure de

$$|f(x)-\widetilde{\sigma}_n(f, x)|$$

pour tous les x et toutes les $f(x)$ appartenant à $H^{(\alpha)}$ on a le théorème suivant.

THÉORÈME II. *Pour* $0 < \alpha < 1$ *on a*

$$\widetilde{C}_n^{(\alpha)} = K\widetilde{C}^{(\alpha)}n^{-\alpha} + o\,(n^{-\alpha}),$$

où

$$\widetilde{C}^{(\alpha)} = 2^{3-\alpha} \max_u \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \frac{u-2\pi k}{4}}{|u-2\pi k|^{2-\alpha}},$$

et pour $\alpha = 1$ *on a*

$$\widetilde{C}_n^{(\alpha)} = \frac{2k}{\pi}\,\frac{\lg n}{n} + O\,(n^{-1}).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADEMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 509–520 Série mathématique

С. М. НИКОЛЬСКИЙ

О НЕКОТОРЫХ МЕТОДАХ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ СУММАМИ

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе исследуется новый метод приближения функций тригонометрическими полиномами, являющийся обобщением метода суммирования Фейера.

§ 1

1. Пусть $f(x)$ непрерывная функция периода 2π и

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

ее ряд Фурье. Положим

$$s_n=s_n(f,x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$\sigma(n,p)=\sigma(n,p,f,x)=\frac{s_{n-p}+s_{n-p+1}+\ldots+s_n}{p+1}, \tag{1}$$

где p есть целое число, удовлетворяющее неравенству $0\leq p\leq n$. Суммы вида $\sigma(n,p)$ представляют собою обобщение некоторых известных методов приближения тригонометрическими полиномами: $\sigma(n,0)$ есть сумма первых n членов ряда Фурье, а $\sigma(n,n)$ сумма Фейера. Вследствие равенств

$$\sigma(n,p)=\frac{(s_0+s_1+\ldots+s_n)-(s_0+s_1+\ldots+s_{n-p-1})}{p+1}, \tag{2}$$

$$s_0+s_1+\ldots+s_r=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\left(\frac{\sin\frac{r+1}{2}(x-t)}{\sin\frac{x-t}{2}}\right)^2dt, \tag{3}$$

легко видеть, что

$$\sigma(n,p)=\frac{1}{\pi(p+1)}\int_0^{2\pi}f(t)\,\frac{\sin\frac{2n+1-p}{2}(x-t)\sin\frac{p+1}{2}(x-t)}{2\sin^2\frac{x-t}{2}}\,dt. \tag{4}$$

Идея рассмотрения сумм подобного вида принадлежит А. Н. Колмогорову, который обратил внимание на семинаре по приближениям функций в Днепропетровском университете на известный интерес изучения их.

В связи с этим участник семинара Л. Вербицкий, пользуясь полученной им формулой (4), показал ([1]) следующее.

Если $p=p(n)$ — функция n, для которой $0 \leqslant p \leqslant n$, то для того чтобы $\sigma(n, p, f, x)$ при $n \to \infty$ равномерно стремилась к $f(x)$, какова бы ни была непрерывная функция $f(x)$, необходимо и достаточно условие

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} > 0. \tag{5}$$

Если рассматривать $\sigma(n, p, f, x)$ как линейный оператор от f (или при фиксированном x как линейный функционал), определенный в пространстве C непрерывных функций, где за норму f принимается $\sup|f(t)|$, то норма этого оператора (функционала) равна

$$M_p^{(n)} = \frac{1}{\pi(p+1)} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\left| \sin\frac{2n+1-p}{2} t \sin\frac{p+1}{2} t \right|}{2\sin^2\frac{t}{2}} dt. \tag{6}$$

При $p=0$ $M_p^{(n)}$ обращается в известную константу Лебега.

В § 2 этой работы изучается асимптотическое поведение $M_p^{(n)}$, именно доказываются следующие теоремы.

ТЕОРЕМА I. *Если* $0 \leqslant p \leqslant n$, *то*

$$M_p^{(n)} = \frac{4}{\pi^2} \lg \frac{n}{p+1} + O(1), \tag{7}$$

где $O(1)$ *обозначает функцию от* n *и* p, *равномерно ограниченную относительно этих переменных.*

ТЕОРЕМА II. *Если* $p=p(n)$ *есть функция от* n, *удовлетворяющая неравенству* $0 \leqslant p \leqslant n$, *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0$, *то существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} M_p^{(n)} = \mu(\alpha), \tag{8}$$

выражаемый формулой (18).

Если принять во внимание, что для всякого тригонометрического полинома $T_{n-p}(x)$ степени $n-p$

$$\sigma(n, p, T_{n-p}, x) = T_{n-p}(x),$$

то на основании неравенства Бернштейна ([2]) имеет место соотношение

$$|\sigma(n, p, f, x) - f(x)| \leqslant (1 + M_p^{(n)}) E_{n-p}(f), \tag{9}$$

где $E_{n-p}(f)$ обозначает максимальное уклонение от f наилучшего приближающего ее тригонометрического полинома $(n-p)$-ой степени. Формулы (7) и (9) дают возможность в ряде случаев получить хорошие оценки разности

$$\sigma(n, p, f, x) - f(x). \tag{10}$$

Если, например, выполняется условие (5), то порядок убывания этой разности равен порядку $E_{n-p}(f)$.

Из этих формул также вытекает, если сделать небольшое добавление, упомянутое предложение Л. Вербицкого. В самом деле, если справедливо условие (5), то по (7) числа $M_p^{(n)}$ ограничены, и по (9) при $n-p \to \infty$ разность (10) стремится равномерно относительно x к нулю. Если же последовательность чисел $n-p$ ограничена, то рассматриваемая разность будет также равномерно стремиться к нулю, что вытекает

из (2), если принять во внимание, что сумма Фейера при $n \to \infty$ равномерно сходится к $f(x)$, а сумма $s_0 + s_1 + \ldots + s_{n-p-1}$, как легко видеть из (3), ограничена.

Далее из формулы (7) и известного предложения о последовательности линейных операторов с неограниченными нормами вытекает также, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0$, то для любого x найдется такая непрерывная функция f, что $\sigma(n, p, f, x)$ расходится.

Этим предложение Л. Вербицкого доказано. При этом в его формулировке слово «равномерно» может быть, очевидно, опущено.

Сопоставляя теоремы I и II, легко видеть, что функция $\mu(\alpha)$, определяемая по (8), может быть представлена асимптотически так:

$$\mu(\alpha) = \frac{4}{\pi^2} \lg \frac{1}{\alpha} + O(1). \tag{11}$$

II. В § 3 этой работы получены аналогичные приведенным результаты в случае интерполяционных тригонометрических полиномов с равноотстоящими узлами интерполяции. Пусть

$$x_i^{(n)} = \frac{2\pi i}{2n+1} \qquad (i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots),$$

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \cos k x_i^{(n)},$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1} \sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \sin k x_i^{(n)},$$

$$s_m^{(n)} = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^{(n)} \cos kx + b_k^{(n)} \sin kx) \qquad (m, k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

$$\tilde{\sigma}(n, p) = \tilde{\sigma}(n, p, f, x) = \frac{s_{n-p}^{(n)} + s_{n-p+1}^{(n)} + \ldots + s_n^{(n)}}{p+1} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Рассуждая так же как для $\sigma(n, p)$, легко получим, что

$$\tilde{\sigma}(n, p, f, x) = \\ = \frac{1}{(2n+1)(p+1)} \sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(x - x_i^{(n)}) \sin \frac{p+1}{2}(x - x_i^{(n)})}{\sin^2 \frac{x - x_i^{(n)}}{2}}. \tag{12}$$

Норма оператора $\sigma(n, p, f, x)$ равна

$$\tilde{M}_p^{(n)} = \sup_x \tilde{M}_p^{(n)}(x),$$

где функция $\tilde{M}_p^{(n)}(x)$, которую можно рассматривать как норму функционала $\tilde{\sigma}(n, p, f, x)$ от f, когда x фиксировано, определяется равенством

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x) = \frac{1}{(2n+1)(p+1)} \sum_{i=0}^{2n} \frac{\left| \sin \frac{2n+1-p}{2}(x - x_i^{(n)}) \sin \frac{p+1}{2}(x - x_i^{(n)}) \right|}{\sin^2 \frac{x - x_i^{(n)}}{2}}. \tag{13}$$

Асимптотическую оценку величины $M_p^{(n)}(x)$ дает

ТЕОРЕМА III. *Если* $0 \leqslant p \leqslant n$, *то*

$$\widetilde{M}_p^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \left| \sin \frac{2n+1}{2} x \right| \lg \frac{n}{p+1} + O(1) \tag{14}$$

равномерно относительно p, n, x *.

Имеет также место аналогичная теореме II

ТЕОРЕМА IV. *Если* $p = p(n)$ *есть функция от* n, *удовлетворяющая неравенству* $0 \leqslant p \leqslant n$, *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0$, *то существует предел*

$$\lim \widetilde{M}_p^{(n)} = \widetilde{\mu}(\alpha), \tag{15}$$

выражаемый формулой (23).

На основании неравенства С. Н. Бернштейна (²) имеем

$$|\widetilde{\sigma}(n, p, f, x) - f(x)| \leqslant (1 + \widetilde{M}_p^{(n)}(x)) E_{n-p}(f). \tag{16}$$

Формулы (14) и (16) позволяют достаточно точно оценивать разность $\widetilde{\sigma}(n, p, f, x) - f(x)$. Из них вытекает, что приближение функции $f(x)$ суммами $\widetilde{\sigma}(n, p)$ обладает свойствами, аналогичными приближениям, рассмотренным С. Н. Бернштейном в его работе (³).

Так как норма оператора $\widetilde{\sigma}(n, p)$ по (14) равна

$$\widetilde{M}_p^{(n)} = \frac{2}{\pi} \lg \frac{n}{p+1} + O(1),$$

то на основании (16), рассуждая так же, как это делалось в соответствующем месте, будем иметь следствие, аналогичное указанному выше результату Л. Вербицкого.

Следствие. *Если* $p = p(n)$ *есть функция от* n, *удовлетворяющая неравенству* $0 \leqslant p \leqslant n$, *то для того чтобы* $\widetilde{\sigma}(n, p, f, x)$ *при* $n \to \infty$ *равномерно относительно* x *сходилась к* $f(x)$, *какова бы ни была непрерывная функция* $f(x)$, *необходимо и достаточно условие* (5).

В этой формулировке также можно выражение «равномерно относительно x» заменить выражением «для всех x», так как из формулы (14) следует, что числа $\widetilde{M}_p^{(n)}(x)$ для некоторых значений x (не для всех), например $x = \frac{\pi}{2}$, образуют в случае, если

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = 0, \tag{17}$$

неограниченную последовательность.

Отличие изучаемого здесь метода приближения от рассмотренного в п. I заключается в том, что теперь уже нельзя для всякого заданного значения x утверждать существование непрерывной функции f, для которой $\sigma(n, p, f, x)$ расходится, если выполняется условие (17), как показывает следующий пример.

Пусть $x_0 = \frac{2\pi}{2r+1}$, где r — целое число, и E — подмножество натуральных чисел n_k, определяемых равенствами

$$n_k = r + k(2r+1) \quad (k = 1, 2, \ldots);$$

* Под $O(1)$ мы всюду здесь будем подразумевать функцию от переменных x (или u), n, p или некоторых из них, равномерно относительно них ограниченную, и это обстоятельство не всегда будет особо оговариваться.

тогда

$$\sin\left(n_k+\frac{1}{2}\right)x_0=\sin(2k+1)\pi=0.$$

Определим $p=p(n)$ так: если $n=n_k\subset E$, то $p(n_k)=0$; если же $n\not\subset E$, то $1<\frac{n}{p(n)}<2$. Отсюда выполняется условие (17).

В силу теоремы III $\tilde{M}_p^{(n)}(x)$ ограничено, откуда $\sigma(n, p, f, x)$ сходится при $n\to\infty$ к $f(x)$ для любой непрерывной функции f.

Однако при условии более сильном, именно $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p(n)}{n}=0$ для любого $x\not\equiv o(2\pi)$, существует непрерывная функция f, для которой $\sigma(n, p, f, x)$ расходится. В самом деле, пусть выполняется неравенство $0<x<2\pi$. Рассмотрим систему сегментов $[\pi k-\varepsilon, \pi k+\varepsilon]$ для $k=1, 2, \ldots$. Легко доказать, что существует для всякого $x\not\equiv o(2\pi)$ при достаточно малом $\varepsilon>0$ бесконечная подпоследовательность натуральных чисел $n_1, n_2, \ldots$ таких, что числа $\frac{2n_k+1}{2}x$ не принадлежат ни к одному из рассмотренных сегментов. Отсюда следует согласно (14) при $p_k=p(n_k)$

$$\tilde{M}_{p_k}^{(n_k)}(x)=\left|\sin\frac{2n_k+1}{2}x\right|\frac{2}{\pi}\lg\frac{n_k}{p_k+1}+O(1)\geqslant$$

$$\geqslant|\sin\varepsilon|\frac{2}{\pi}\lg\frac{n_k}{p_k+1}+O(1)\quad(k=1,2,\ldots),$$

и следовательно при $k\to\infty$ и $\frac{p}{n}\to 0$

$$\tilde{M}_{p_k}^{(n_k)}(x)\to\infty.$$

Теоремы III и IV влекут за собой равенство, аналогичное (11),

$$\tilde{\mu}(\alpha)=\frac{2}{\pi}\lg\left(\frac{1}{\alpha}\right)+O(1).$$

§ 2

Если положить

$$m=\frac{p+1}{2},\quad rm=\frac{2n+1-p}{2},$$

то будем иметь

$$M_p^{(n)}=\frac{1}{2\pi m}\int\limits_0^\pi\frac{|\sin rmt\sin mt|}{\sin^2\frac{t}{2}}dt.$$

Доказательство теоремы I. В силу того что $m\geqslant\frac{1}{2}$ и функция $\frac{1}{\sin^2\frac{t}{2}}-\frac{1}{\frac{t^2}{4}}$ ограничена для $|t|\leqslant\pi$, можно очевидно написать

$$M_p^{(n)}=\frac{2}{\pi m}\int\limits_0^\pi\frac{|\sin mrt\sin mt|}{t^2}dt+O(1)=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{m\pi}\frac{|\sin ru\sin u|}{u^2}du+O(1)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi\frac{|\sin ru\sin u|}{u^2}du+O(1),$$

где $O(1)$ обозначает функцию, равномерно ограниченную относительно r и m при $0 \leqslant p \leqslant n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Далее, в силу ограниченности функции $\frac{\sin u}{u^2} - \frac{1}{u}$ получим

$$M_p^{(n)} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{|\sin ru|}{u} du + O(1).$$

Но первый член правой части этого равенства лишь на ограниченную величину отличается от константы Лебега ([4]) и поэтому

$$M_p^{(n)} = \frac{4}{\pi^2} \lg r + O(1) = \frac{4}{\pi^2} \lg \frac{n}{p+1} + O(1).$$

Доказательство теоремы II. Пусть $p = p(n)$, $0 \leqslant p \leqslant n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} r = \rho = \frac{2-\alpha}{\alpha}$, $\lim\limits_{n\to\infty} m = \infty$. Поэтому можно написать

$$M_p^{(n)} = \frac{2}{\pi m} \int_0^\pi \frac{|\sin rmt \sin mt|}{t^2} dt + o(1) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi m} \frac{|\sin ru \sin u|}{u^2} du + o(1).$$

Нам предстоит доказать равенство

$$\lim_{n\to\infty} M_p^{(n)} = \mu(\alpha) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{|\sin \rho u \sin u|\, du}{u^2}. \tag{18}$$

В самом деле, при $\pi m > N$

$$\left| \int_0^\infty \frac{|\sin \rho u \sin u|}{u^2} du - \int_0^{\pi m} \frac{|\sin ru \sin u|}{u^2} du \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^\infty \frac{|\sin \rho u - \sin ru|\,|\sin u|}{u^2} du + \int_{\pi m}^\infty \frac{|\sin ru \sin u|}{u^2} du \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^N \frac{|\sin \rho u - \sin ru|\,|\sin u|\, du}{u^2} + \int_N^\infty \frac{3du}{u^2} \leqslant \int_0^N \left| \frac{\sin \rho u}{u} - \frac{\sin ru}{u} \right| du + \frac{3}{N}.$$

Зафиксируем N так, чтобы второй член правой части был как угодно мал, тогда первый ее член также будет как угодно мал, если разность $|\rho - r|$ достаточно мала, что вытекает из непрерывности относительно x и y функции

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sin xy}{x} & \text{для } x \neq 0, \\ y & \text{для } x = 0. \end{cases}$$

§ 3

Доказательство теоремы III. В силу того что под знаком суммы в (12) находится функция периода 2π, эта сумма не изменится, если суммирование будет распространено на слагаемые, соответствующие индексам i таким, для которых выполняется неравенство $-\pi < x - x_i^{(n)} \leqslant \leqslant \pi$. Легко видеть также, что каждое слагаемое равномерно ограничено

относительно n, p, x и есть таким образом $O(1)$. Поэтому из (13) будем иметь

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x)=\frac{1}{(2n+1)(p+1)}\sum_{x-\pi<x-x_i^{(n)}\leqslant x+\pi}\frac{\left|\sin\frac{2n+1-p}{2}(x-x_i^{(n)})\sin\frac{p+1}{2}(x-x_i^{(n)})\right|}{\sin^2\frac{x-x_i^{(n)}}{2}}=$$

$$=\frac{4}{(2n+1)(p+1)}\sum_{|x-x_i^{(n)}|<\pi}{}_i\frac{\left|\sin\frac{2n+1-p}{2}(x-x_i^{(n)})\sin\frac{p+1}{2}(x-x_i^{(n)})\right|}{(x-x_i^{(n)})^2}+O(1),$$

или, вводя обозначения

$$\beta=\beta(n,p)=\frac{2n+1-p}{2(2n+1)},\quad \gamma=\gamma(n,p)=\frac{p+1}{2(2n+1)},\quad u=(2n+1)x,$$

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x)=\frac{2}{\gamma}\sum_{|u-2\pi i|<\pi(2n+1)}{}_i\frac{|\sin\beta(u-2\pi i)\sin\gamma(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|^2}+O(1). \tag{19}$$

Заметим, что

$$\frac{2}{\gamma}\sum_{\pi(2n+1)\leqslant|u-2\pi i|}{}_i\frac{|\sin\beta(u-2\pi i)\sin\gamma(u-2\pi i)|}{(u-2\pi i)^2}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{4}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\pi^2(2n+1+2i)^2}=\frac{1}{\gamma}O(n^{-1})=O(1)$$

равномерно относительно p, n, u. Аналогично сумма (слагаемых такого же вида)

$$\frac{2}{\gamma}\sum_{\frac{\pi}{\gamma}\leqslant|u-2\pi i|}{}'\leqslant\frac{4}{\gamma}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{\pi}{\gamma}+2\pi i\right)^2}=\frac{2}{\pi^2}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{2\gamma}{(1+2i\gamma)^2}=$$

$$=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{dx}{(1+x)^2}+O(1)=O(1)$$

равномерно относительно p, n, u.

Отсюда следует согласно (19), что

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x)=\frac{2}{\gamma}\sum_{|u-2\pi i|<\frac{\pi}{\gamma}}{}_i\frac{|\sin\beta(u-2\pi i)\sin\gamma(u-2\pi i)|}{(u-2\pi i)^2}+O(1).$$

Далее можем еще написать

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x)=2\sum_{|u-2\pi i|<\frac{\pi}{\gamma}}{}_i\frac{|\sin\beta(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|}+$$

$$+2\gamma\sum_{|u-2\pi i|<\frac{\pi}{\gamma}}|\sin\beta(u-2\pi i)|\left(\frac{|\sin\gamma(u-2\pi i)|}{\gamma^2(u-2\pi i)^2}-\frac{1}{\gamma(u-2\pi i)}\right)+O(1).$$

Каждое из слагаемых второй суммы правой части не превышает по абсолютной величине некоторую константу C, количество же их не более чем $\frac{1}{\gamma}+1$, поэтому абсолютная величина второй суммы равномерно ограничена и таким образом

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x)=2\sum_{|u-2\pi i|<\frac{\pi}{\gamma}}{}_i\frac{|\sin\beta(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|}+O(1). \tag{20}$$

Представим теперь β в виде суммы

$$\beta = \frac{2n+1-p}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} - \frac{p}{2(2n+1)} = \frac{1}{2} + \beta'$$

и заметим при этом, что $\beta' = \bar{O}(\gamma)$.

Равенство (20) тогда представится так:

$$\widetilde{M}_p^{(n)}(r) = 2 \sum_{|u-2\pi i| < \frac{\pi}{\gamma}} {}^{i} \frac{\left|\sin\frac{1}{2}(u-2\pi i)\cos\beta'(u-2\pi i) + \cos\frac{1}{2}(u-2\pi i)\sin\beta'(u-2\pi i)\right|}{|u-2\pi i|} +$$

$$+ O(1) = 2 \sum_{|u-2\pi i| < \frac{\pi}{\gamma}} {}^{i} \frac{\left|\sin\frac{1}{2}(u-2\pi i)\cos\beta'(u-2\pi i)\right|}{|u-2\pi i|} + O(1) =$$

$$= 2 \sum_{|u-2\pi i| < \frac{\pi}{\gamma}} {}^{i} \frac{\left|\sin\frac{1}{2}(u-2\pi i)\right|}{|u-2\pi i|} + O(1), \qquad (21)$$

потому что

$$2 \sum_{|u-2\pi i| < \frac{\pi}{\gamma}} {}^{i} \frac{\left|\cos\frac{1}{2}(u-2\pi i)\sin\beta'(u-2\pi i)\right|}{|u-2\pi i|} \leqslant 2|\beta'|\left(\frac{1}{\gamma}+1\right) \leqslant \text{const.}$$

Отсюда, принимая во внимание, что отдельные члены (21) имеют порядок $O(1)$,

$$\widetilde{M}_p^{(n)}(x) = \left|\sin\frac{u}{2}\right| 2 \sum_{i=1}^{\left[\frac{1}{2\gamma}\right]} \frac{1}{\pi i} + O(1) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{u}{2}\right| \lg\left[\frac{1}{2\gamma}\right] + O(1) =$$

$$= \left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| \frac{2}{\pi} \lg\frac{n}{p+1} + O(1),$$

и теорема III доказана.

Доказательство теоремы IV. Пусть $p = p(n)$, $0 \leqslant p(n) \leqslant n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0$. Положим

$$\beta_n = \frac{2n+1-p}{2(2n+1)}, \quad \gamma_n = \frac{p+1}{2(2n+1)},$$
$$\delta_n = \frac{4(2n+1)}{p+1}, \quad u = (2n+1)x.$$

Принимая во внимание, что при неограниченном возрастании n неограниченно возрастает $p(n)$ и равномерно относительно x убывает каждый член суммы (12), будем из (12) иметь

$$\widetilde{M}_p^{(n)}(x) = \delta_n \sum_{|u-2\pi i| < (2n+1)\pi} {}^{i} \frac{|\sin\beta_n(u-2\pi i)\sin\gamma_n(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|^2} + o(1) \qquad (22)$$

равномерно относительно x. Положим

$$\lim_{n\to\infty}\beta_n = \beta, \quad \lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma, \quad \lim_{n\to\infty}\delta_n = \delta = \frac{8}{\alpha}.$$

Тогда, вследствие равномерной ограниченности суммы, входящей в правую часть (22), будем иметь

$$\tilde{M}_p^{(n)}(x) = \delta \sum_{|u-2\pi i|<(2n+1)\pi} \frac{|\sin\beta_n(u-2\pi i)\sin\gamma_n(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|^2} + o(1) =$$
$$= \delta \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin\beta_n(u-2\pi i)\sin\gamma_n(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|^2} + o(1) =$$
$$= \delta \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin\beta(u-2\pi i)\sin\gamma(u-2\pi i)|}{|n-2\pi i|^2} + o(1).$$

Отсюда следует наше утверждение: если $\frac{p}{n}$ стремится к $\alpha > 0$, то существует предел $\tilde{M}_p^{(n)}$, равный

$$\lim \tilde{M}_p^{(n)} = \tilde{\mu}(\alpha) = \max_u \frac{8}{\alpha} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \frac{|\sin\beta(u-2\pi i)\sin\gamma(u-2\pi i)|}{|u-2\pi i|^2}. \qquad (23)$$

Днепропетровский
гос. университет

Поступило
7. VII. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Вербицкий Л., Об одном методе суммирования полиномами интерполяции, печат. в сборнике научных трудов студентов Днепропетр. унив.

[2] Kolmogoroff A., Quelques remarques sur l'approximation des fonctions continues, Матем. сборник, **41**, (1934), 99—103.

[3] Bernstein S., Sur une classe de formules d'interpolation, Известия Ак. Наук СССР, (1931), 1151—1161.

[4] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, стр. 101—102 и 173.

S. NIKOLSKI. SUR CERTAINES MÉTHODES D'APPROXIMATION AU MOYEN DE SOMMES TRIGONOMÉTRIQUES

RÉSUMÉ

§ 1. Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π et

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

sa série de Fourier. Posons

$$s_n = s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$\sigma(n, p) = \sigma(n, p, f, x) = \frac{s_{n-p} + s_{n-p+1} + \ldots + s_n}{p+1},$$
$$p = 0, 1, 2, \ldots, n; \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Supposons que $p = p(n)$ est une fonction de n. Dans un article de Verbitzky ([1]) on trouve que pour que $\sigma(n, p, f, x)$ tende uniformément

par rapport à x vers $f(x)$ pour $n \to \infty$ quelle que soit la fonction continue $f(x)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{p(n)}{n} > 0. \tag{1}$$

Il est facile à voir que

$$\sigma(n, p, f, x) = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2}(x-t) \sin \frac{p+1}{2}(x-t)}{2 \sin^2 \frac{x-t}{2}} dt.$$

Si l'on considère $\sigma(n, p, f, x)$ comme un opérateur linéaire (pour x fixe comme une fonctionnelle linéaire) définie dans l'espace C des fonctions continues, où l'on prend pour norme de f la valeur $\sup |f(t)|$, alors la norme le cet opérateur (fonctionelle) est égale à

$$M_p^{(n)} = \frac{1}{\pi(p+1)} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1-p}{2} t \quad \sin \frac{p+1}{2} t}{2 \sin^2 \frac{t}{2}} \right| dt.$$

Une évaluation asymptotique de la norme $M_p^{(n)}$ est donnée par le théorème

THÉORÈME I. *Si $0 \leqslant p \leqslant n$, on a*

$$M_p^{(n)} = \frac{4}{\pi^2} \lg \frac{n}{p+1} + O(1), \tag{2}$$

où $O(1)$ désigne une fonction de n et p uniformément bornée par rapport à ces variables.

En vertu d'une inégalité connue de S. Bernstein ([2]) on a

$$|\sigma(n, p, f, x) - f(x)| \leqslant (1 + M_p^{(n)}) E_{n-p}(f), \tag{3}$$

où $E_{n-p}(f)$ désigne le plus grand écart de f du polynôme trigonométrique de degré $n-p$ qui donne la meilleure approximation de f. Les formules (2) et (3) permettent dans plusieurs cas d'obtenir de bonnes évaluations pour la différence

$$\sigma(n, p, f, x) - f(x).$$

En particulier il résulte de (2) que la condition (1) est nécessaire pour la convergence uniforme (ou non uniforme) de $\sigma(n, p)$ vers f pour chaque fonction continue f, et il résulte de (2) et (3) que cette condition est suffisante, si $n-p$ croit indéfiniment. Le cas où $n-p$ forme une suite bornée exige quelques considérations complémentaires simples.

On a aussi le théorème suivant.

THÉORÈME II. *Si $p = p(n)$ est une fonction de n qui vérifie l'inégalité $0 \leqslant p \leqslant n$ et*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0,$$

alors il existe une limite

$$\lim_{n\to\infty} M_p^{(n)} = \mu(\alpha).$$

En réunissant les théorèmes I et II il est facile d'obtenir l'égalité

$$\mu(\alpha) = \frac{4}{\pi^2}\lg\frac{1}{\alpha} + O(1). \tag{4}$$

§ **2.** Soit maintenant

$$x_i^{(n)} = \frac{2\pi i}{2n+1} \qquad (i=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \dots;\ n=1,\ 2,\ \dots),$$

$$a_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \cos kx_i^{(n)} \qquad (k,\ m=0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n),$$

$$b_k^{(n)} = \frac{2}{2n+1}\sum_{i=0}^{2n} f(x_i^{(n)}) \sin kx_i^{(n)},$$

$$s_m^{(n)} = \frac{a_0^{(n)}}{2} + \sum_{k=1}^{m} (a_k^{(n)}\cos kx + b_k^{(n)}\sin kx),$$

$$\tilde\sigma(n,\ p) = \tilde\sigma(n,\ p,\ f,\ x) = \frac{s_{n-p}^{(n)} + s_{n-p+1}^{(n)} + \dots + s_n^{(n)}}{p+1}$$

$$(p = 0,\ 1,\ 2,\ \dots,\ n).$$

La norme de l'opérateur $\tilde\sigma(n, p, f, x)$ est égale à

$$\tilde M_p^{(n)} = \max_x \tilde M_p^{(n)}(x),$$

où la fonction $\tilde M_p^{(n)}(x)$ qui peut être considérée comme norme de la fonctionnelle $\tilde\sigma(n, p, f, x)$ quand x est fixe, est définie par l'égalité

$$\tilde M_p^{(n)}(x) = \frac{1}{(2n+1)(p+1)} \sum_{i=0}^{2n} \frac{\left|\sin\frac{2n+1-p}{2}(x - x_i^{(n)}) \sin\frac{p+1}{2}(x - x_i^{(n)})\right|}{\sin^2 \frac{x - x_i^{(n)}}{2}}.$$

Une évaluation asymtotique de la valeur $\tilde M_p^{(n)}(x)$ est fournie par le théorème suivant.

THÉORÈME III. *Si* $0 \leqslant p \leqslant n$, *on a*

$$\tilde M_p^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi}\left|\sin\frac{2n+1}{2}x\right| \lg\frac{n}{p+1} + O(1) \tag{5}$$

uniformément par rapport à p, n, x.

En vertu d'une inégalité de S. Bernstein (²) on a

$$|\tilde\sigma(n,\ p,\ f,\ x) - f(x)| \leqslant (1 + \tilde M_p^{(n)}(x)) E_{n-p}(f). \tag{6}$$

Les inégalités (5) et (6) permettent d'évaluer d'une manière assez précise la différence $\tilde\sigma(n, p, f, x) - f(x)$.

Il en résulte que l'approximation de la fonction f par les sommes $\tilde\sigma(n, p)$ jouit des propriétés analogues à celles des approximations étudiées par S. Bernstein dans son article (³).

Ainsi que dans le cas des sommes $\tilde{\sigma}(n, p)$ il suit de (5) et (6):

Corollaire. Si $p = p(n)$ est une fonction de n pour que $\tilde{\sigma}(n, p, f, x)$ tende uniformément (ou non) vers $f(x)$ pour $n \to \infty$ quelle que soit la fonction continue $f(x)$, il faut et il suffit que la condition (1) soit remplie.

Le théorème suivant analogue au théorème II est aussi vrai:

THÉORÈME IV. *Si* $p = p(n)$ *est une fonction de* n *vérifiant l'inégalité* $0 \leqslant p \leqslant n$ *et si*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{p(n)}{n} = \alpha > 0,$$

il existe une limite

$$\lim_{n \to \infty} \tilde{M}_p^{(n)} = \tilde{\mu}(\alpha).$$

On déduit facilement des théorèmes III et IV une formule analogue à (4)

$$\tilde{\mu}(\alpha) = \frac{2}{\pi} \lg\left(\frac{1}{\alpha}\right) + O(1).$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 521—528 Série mathématique

В. Т. ПИНКЕВИЧ

О ПОРЯДКЕ ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА РЯДА ФУРЬЕ ФУНКЦИЙ, ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ В СМЫСЛЕ WEYL'я

(*Представлено академиком* **А. Н. Колмогоровым**)

В работе дается асимптотическое поведение верхней грани отклонений функций от сумм первых n членов их ряда Фурье по всем функциям периода 2π, имеющим производную Вейля, абсолютная величина которой не превышает данную константу.

1. Постановка вопроса

Пусть $f(x)$ есть суммируемая функция периода 2π и

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx) \qquad (*)$$

ее ряд Фурье. Пусть далее $H^{(\alpha)}$ — класс функций периода 2π, имеющих α-ую производную, удовлетворяющую неравенству

$$f^{(\alpha)}(x)\leqslant K,$$

где K — данная константа.

Обозначим через $r_n(f, x)$ остаток ряда $(*)$ и положим

$$C_n^{(\alpha)}=\sup_{f\subset H^{(\alpha)}}|r_n(f, x)|=$$

$$=\sup_{f\subset H^{(\alpha)}}\left|f(x)-\frac{a_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\right|.$$

А. Н. Колмогоров [1] показал, что

$$C_n^{(\alpha)}=\frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^\alpha}+O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \qquad (1)$$

для любого целого $\alpha\geqslant 1$.

В этой работе мы докажем, что эта формула остается справедливой для всякого $\alpha>0$, если в качестве класса $H^{(\alpha)}$ рассматривать класс функций периода 2π, имеющих α-ую производную в смысле Вейля (Weyl), ограниченную для всех x константой K.

Говорят, что функция $f(x)$ имеет α-ую производную $f^{(\alpha)}(x)=\varphi(x)$ в смысле Вейля [2], если существует суммируемая функция $\varphi(x)$ такая, что

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{C_k e^{ikx}}{(ik)^\alpha}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi k^\alpha}\int_0^{2\pi}\cos\left[k(t-x)+\frac{\alpha\pi}{2}\right]\varphi(t)\,dt, \qquad (2)$$

где C_k — комплексные коэффициенты Фурье функции $\varphi(t)$, причем

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,dt = 0.$$

Заметим, что ряд (2) сходится почти всюду к интегрируемой функции и представляет собой ряд Фурье своей суммы ([2]). Функцию $\varphi(x)$ можно рассматривать как обобщение обычной α-ой производной от функции $f(x)$, когда она существует почти всюду и $(\alpha-1)$-ая производная абсолютно непрерывна, ибо если α целое число, то при этих условиях $f(x)$ можно представить в виде ряда (2), где $\varphi(x) = f^{\alpha}(x)$.

2. Вспомогательные соотношения

При любом $\alpha > 0$ имеем

$$L_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}}\left|\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1). \tag{3}$$

Достаточно показать, что

$$l_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\left|\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx = \frac{2}{\pi^2}\ln n + O(1), \tag{4}$$

ибо точно так же доказывается, что оставшаяся часть интеграла в (3) будет иметь такую же оценку. Пользуясь ограниченностью выражения $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2} - \frac{1}{x}$, $0 \le x \le \pi$, и замечая, что

$$\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{\left|\sin\left(nx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|}{x}\,dx = O(1),$$

получаем

$$l_n = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{1}{n}}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(nx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|}{x}\,dx + O(1) = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\left|\sin\left(nx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|}{x}\,dx + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_{\frac{k\pi}{n}}^{\frac{(k+1)\pi}{n}}\frac{\left|\sin\left(nx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|}{x}\,dx + O(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\left|\sin\left(nt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|\frac{dt}{t+\frac{k\pi}{n}} + O(1) =$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\left|\sin\left(nt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|\left(\sum_{k=1}^{k-1}\frac{1}{t+\frac{k\pi}{n}}\right)dt+O(1). \qquad (5)$$

Так как имеем равномерно относительно $t\left(0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{n}\right)$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{t+\frac{k\pi}{n}}=\frac{n}{\pi}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}+O(1)\right]=\frac{n}{\pi}[\ln n+O(1)],$$

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}}\left|\sin\left(nt+\frac{\alpha\pi}{2}\right)\right|dt=\frac{2}{n},$$

то из (5) вытекает (4). Вводя обозначения

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}=D_n^{(\alpha)}(x), \quad \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}-\frac{x}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=a^{(\alpha)}(x),\\
&\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}=A_n^{(\alpha)}(x), \quad \frac{\cos\frac{\alpha\pi}{2}\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}=B_n^{(\alpha)}(x),\\
&\frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}\sin(n+1)x}{4\sin^2\frac{x}{2}}=C_n^{(\alpha)}(x), \quad \Delta k=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{1}{(k+1)^\alpha},\\
&\Delta^2(k)=\Delta(k)-\Delta(k+1),
\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

докажем, что для $x\not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$D_n^{(\alpha)}(x)=-\frac{A_n^{(\alpha)}(x)}{(n+1)^\alpha}-\Delta(n+1)\left[B_n^{(\alpha)}(x)+C_n^{(\alpha)}(x)\right]+$$
$$+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta^2(k)\left[B_k^{(\alpha)}(x)+C_k^{(\alpha)}(x)\right]. \qquad (7)$$

Для доказательства (7) воспользуемся известным преобразованием Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+\nu}U_kV_k=\sum_{k=n+1}^{n+\nu}S_k(V_k-V_{k+1})-S_nV_{n+1}+S_{n+\nu}V_{n+\nu+1},$$

$$S_k=\sum_{\mu=0}^{k}U_\mu.$$

Полагая в этом преобразовании $V_k=\frac{1}{k^\alpha}$, $U_k=\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)$ и замечая, что $\sum\limits_{\mu=0}^{k}U_\mu=A_k^{(\alpha)}(x)-a^{(\alpha)}(x)$, получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+\nu}\frac{\cos\left(kx+\frac{\alpha\pi}{2}\right)}{k^\alpha}=\sum_{k=n+1}^{n+\nu}\Delta(k)\left[A_k^{(\alpha)}(x)+a^{(\alpha)}(x)\right]-$$
$$-\frac{A_n^{(\alpha)}(x)}{(n+1)^\alpha}+\frac{a^{(\alpha)}(x)}{(n+1)^\alpha}+\frac{A_{n+\nu}^{(\alpha)}(x)}{(n+\nu+1)^\alpha}-\frac{a^{(\alpha)}(x)}{(n+\nu+1)^\alpha},$$

откуда после перехода к пределу при $\nu \to \infty$ и упрощения будем иметь при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$

$$D_n^{(\alpha)}(x) = -\frac{A_n^{(\alpha)}(x)}{(n+1)^\alpha} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) A_k^{(\alpha)}(x). \tag{8}$$

К сумме в формуле (8) применим еще раз преобразование Абеля, полагая $V_k = \Delta(k)$, $U_k = A_k^{(\alpha)}(x)$. Получится

$$\sum_{k=n+1}^{n+\nu} \Delta(k) A_k^{(\alpha)}(x) = -\Delta(n+1)[B_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)}(x)] +$$

$$+ \Delta(n+\nu+1)[B_{n+\nu}^{(\alpha)}(x) + C_{n+\nu}^{(\alpha)}(x)] + \sum_{k=n+1}^{n+\nu} \Delta^2(k)[B_k^{(\alpha)}(x) + C_k^{(\alpha)}(x)],$$

ибо

$$\sum_{\mu=0}^{k} A_\mu^{(\alpha)}(x) = B_k^{(\alpha)}(x) + C_k^{(\alpha)}(x).$$

Переходя к пределу в последнем соотношении при $\nu \to \infty$ при $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, найдем

$$\sum_{k=n+1}^{n+\nu} \Delta(k) A_k^{(\alpha)}(x) = -\Delta(n+1)[B_n^{(\alpha)}(x) + C_n^{(\alpha)}(x)] +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{n+\nu} \Delta^2(k)[B_k^{(\alpha)}(x) + C_k^{(\alpha)}(x)]. \tag{9}$$

Из (8) и (9) вытекает (7).

Докажем еще, что при любом $\alpha > 0$ имеет место

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |D_n^{(\alpha)}(x)|\, dx + \int_{2\pi-\frac{1}{n}}^{2\pi} |D_n^{(\alpha)}(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{10}$$

Достаточно доказать, что первый интеграл в (10) есть величина указанного порядка, ибо для второго интеграла доказательство будет совершенно аналогичным. Так как

$$D_n^{(\alpha)}(x) = \cos\frac{\alpha\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha} - \sin\frac{\alpha\pi}{2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha},$$

то, вводя обозначения

$$a_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^\alpha}, \qquad b_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^\alpha},$$

достаточно доказать, что

$$\int_0^{\frac{1}{n}} |a_n(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad \int_0^{\frac{1}{n}} |b_n(x)|\, dx = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{11}$$

Применяя дважды преобразование Абеля к $a_n(x)$ аналогично тому, как это делалось при выводе соотношения (7), получим

$$v_n(x) = -\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{(n+1)^\alpha\, 2\sin\frac{x}{2}} - \Delta(n+1)\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k)\frac{\sin^2\frac{k+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}.$$

Далее имеем

$$\left.\begin{aligned} &\Delta(k)=O\left(\frac{1}{k^{1+\alpha}}\right), \quad \Delta^2(k)=O\left(\frac{1}{k^{2+\alpha}}\right), \\ &\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2\frac{k+1}{2}x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=O(k), \qquad \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^{1+\alpha}}=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right), \\ &\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx=O(1). \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Поэтому

$$\int_0^{\frac{1}{n}}|a_n(x)|\,dx\leqslant O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)+O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right)O(n)+\sum_{k=n+1}^{\infty}O\left(\frac{1}{k^{2+\alpha}}\right)O(k)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right).$$

Первое из соотношений (11) доказано. Доказательство второго из соотношений (11) требует иного подхода.

Применяя преобразование Абеля к $b_n(x)$, найдем

$$b_n(x)=-\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}\,\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta(k)\,\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}. \tag{13}$$

Заметим, что

$$\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx=\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\frac{\sin\frac{n+1}{2}x\sin nx}{2\sin\frac{x}{2}}\right|dx=O(1) \tag{14}$$

и займемся вторым слагаемым соотношения (13). Так как

$$\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}x=\cos\frac{x}{2}\,2\sin^2\frac{kx}{2}+\sin kx\sin\frac{x}{2},$$

величина $\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}-\frac{1}{x}$ ограничена при $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{n}$, и в силу (12)

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\Delta(k)=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right),$$

получим

$$\rho_n=\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{2k+1}{2}x}{2\sin\frac{x}{2}}\Delta(k)\right|dx=$$

$$=\int_0^{\frac{1}{n}}\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\,2\sin^2\frac{kx}{2}\Delta(k)\right|dx+O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)=$$

$$= \int_0^{\frac{1}{n}} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{kx}{2}}{\frac{x}{2}} \Delta(k)\, dx + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Полагая $\frac{kx}{2} = y$ и замечая, что

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) \int_0^1 \frac{\sin^2 y}{y} dy = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

найдем

$$\rho_n = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_1^{\frac{k}{2n}} \frac{\Delta(k)}{y} dy + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) \ln k - \frac{2 \ln n}{(n+1)^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right).$$

Но

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta(k) \ln k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha \ln k}{\xi_k^{1+\alpha}} = \alpha \left[\int_n^{\infty} \frac{\ln x}{x^{1+\alpha}} dx + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right] =$$

$$= \frac{\ln n}{(n+1)^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad k < \xi_k < k+1.$$

Поэтому $\rho_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ и второе из соотношений (11) доказано.

3. Асимптотическая оценка величины $C_n^{(\alpha)}$

Переходим теперь к решению поставленной нами в § 1 задачи, т. е. к доказательству соотношения (1). Не нарушая общности доказательства, мы можем очевидно при постановке вопроса положить $k=1$. Достаточно также все вычисления проделать для $x=0$, так как легко видеть, что $C_n^{(\alpha)}$ не зависит от x. Поэтому

$$C_n^{(\alpha)} = \sup_{f \subset H^{(\alpha)}} |r_n(f, 0)| =$$

$$= \sup_{\varphi} \frac{1}{\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \int_0^{2\pi} \cos\left(kt + \frac{\alpha\pi}{2}\right) \varphi(t)\, dt \right| \leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(\alpha)}(t)|\, dt. \tag{15}$$

При этом верхняя грань по φ определяется для всех ограниченных и измеримых функций, для которых выполняются условия

$$|\varphi(x)| \leqslant 1, \qquad \int_0^{2\pi} \varphi(x)\, dx = 0. \tag{16}$$

В силу соотношений (7), (10) и первых четырех в (12), а также равенства $\int_{\frac{1}{k}}^{2\pi - \frac{1}{k}} |C_k^{(\alpha)}(x)|\, dx = O(k)$ имеем

$$\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(\alpha)}(t)|\, dt - \frac{1}{\pi(n+1)^\alpha} \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi - \frac{1}{n}} |A_n^{(\alpha)}(t)|\, dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{n}} |D_n^{(\alpha)}(t)|\,dt + \frac{1}{\pi} \int_{2\pi-\frac{1}{n}}^{2\pi} |D_n^{(\alpha)}(t)|\,dt + \frac{1}{\pi}\Delta(n+1) \int_{\frac{1}{n}}^{2\pi-\frac{1}{n}} \Big(|B_n^{(\alpha)}(t)| +$$

$$+ |C_n^{(\alpha)}(t)|\Big)\,dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \Delta^2(k) \int_{\frac{1}{k}}^{2\pi-\frac{1}{k}} \Big(|B_k^{(\alpha)}(t)| + |C_k^{(\alpha)}(t)|\Big)\,dt -$$

$$= O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) + O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) O(n) + \sum_{k=n+1}^{\infty} O\left(\frac{1}{k^{2+\alpha}}\right) O(k) = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (17)$$

Принимая во внимание соотношение (3) и определение $A_n^{(\alpha)}(x)$, данное формулой (6), из (17) получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n^{(\alpha)}(t)|\,dt = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{\pi^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (18)$$

Из (18) и (15) следует, что

$$C_n^{(\alpha)} \leqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \quad (19)$$

Далее из определения чисел $C_n^{(\alpha)}$ следует, что

$$C_n^{(\alpha)} \geqslant \frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} D_n^{(\alpha)}(t)\,\varphi(t)\,dt \right|, \quad (20)$$

где $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям (16).

Построим теперь $\varphi_n(t)$ следующим образом. Всякое число $\alpha > 0$ можно представить в виде $\alpha = 2p + \beta$, где p — целое число, а β удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \beta < 2$. Тогда

$$A_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^p \frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}x + \frac{3\pi}{2}\right)}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

Положим

$$\varphi_n(x) = 0, \quad \text{когда} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{(2-\beta)\pi}{2n+1},$$

$$\varphi_n(x) = (-1)^{i+p}, \quad \text{когда} \quad \frac{(2i-\beta)\pi}{2n+1} < x \leqslant \frac{2(i+1)-\beta}{2n+1}\pi, \quad i = 1, 2, \ldots, 2n.$$

$$\varphi_n(x) = 0, \quad \text{когда} \quad 2\pi - \frac{\beta\pi}{2n+1} < x \leqslant 2\pi.$$

Очевидно $\varphi_n(x)$ удовлетворяет условиям (16). Имеем

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} A_n^{(\alpha)}(t)\,\varphi_n(t)\,dt \right| = \int_{\frac{(2-\beta)\pi}{2n+1}}^{2\pi - \frac{\beta}{2n+1}} |A_n^{(\alpha)}(t)|\,dt = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1),$$

что доказывается аналогично (3). Из соотношения (7) теперь получим

$$\frac{1}{\pi} \left| \int_0^{2\pi} D_n^{(\alpha)}(t)\,\varphi_n(t)\,dt \right| = \left| -\frac{1}{\pi(n+1)^\alpha} \int_0^{2\pi} A_n^{(\alpha)}(t)\,\varphi_n(t)\,dt + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} Q_n^{(\alpha)}(t)\,\varphi_n(t)\,dt \right| = \frac{4}{\pi^2} \frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \quad (21)$$

где $Q_n^{(\alpha)}(t)$ обозначает все слагаемые правой части (7) кроме первого и, как легко убедиться, интегралы от их абсолютных величин порядка $O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, когда $\frac{(2-\beta)\pi}{2n+1} \leqslant t \leqslant 2\pi - \frac{\beta\pi}{2n+1}$. Из (21) в силу (20) следует, что

$$C_n^{(\alpha)} \geqslant \frac{4}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right). \tag{22}$$

Таким образом, в силу (19) и (22), соотношение (1) доказано.

Днепропетровский гос. университет

Поступило 4.VII.1940.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Kolmogoroff A., Annals of Mathem., 36, April (1935), 521—526.
[2] Зигмунд А., Тригонометрические ряды, ГОНТИ, 1939, стр. 222.

W. PINKEWITCH. SUR L'ORDRE DU RESTE DE LA SÉRIE DE FOURIER DES FONCTIONS DÉRIVABLES AU SENS DE WEYL

RÉSUMÉ

Soit $f(x)$ une fonction sommable de période 2π et $\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ sa série de Fourier.

Soit ensuite $H^{(\alpha)}$ la classe des fonctions périodiques de période 2π dont la dérivée d'ordre α vérifie l'inégalité $|f^{(\alpha)}(x)| \leqslant K$, K étant une constante.

Désignons par $C_n^{(\alpha)}$ la borne supérieure pour tous les x et pour toutes les $f(x)$ appartenant à $H^{(\alpha)}$ des différences $|f(x) - S_n(f, x)|$ entre la fonction $f(x)$ et la somme $S_n(f, x)$ des n premiers termes de sa série de Fourier.

A. N. Kolmogoroff (1) a démontré que $C_n^{(\alpha)} = \frac{4K}{\pi^2}\frac{\ln n}{n^\alpha} + O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ pour chaque $\alpha \geqslant 1$.

Dans le présent article on démontre que cette formule reste vraie pour chaque $\alpha > 0$, si l'on considère la classe $H^{(\alpha)}$ de toutes les fonctions de période 2π dont la dérivée d'ordre α au sens de Weyl (2) est bornée par une constante K pour toutes les valeurs de x.

On dit qu'une fonction $f(x)$ possède une dérivée d'ordre α au sens de Weyl s'il existe une fonction sommable $\varphi(x)$ telle que $f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{C_k e^{ikx}}{(ik)^\alpha}$ où les C_k sont les coefficients complexes de Fourier pour $\varphi(x)$ et d'ailleurs

$$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(t)\, dt = 0.$$

Ainsi la fonction $\varphi(x)$ peut être considérée comme une généralisation de la dérivée ordinaire d'ordre α de $f(x)$, quand cette dernière existe presque partout et la dérivée d'ordre $(\alpha - 1)$ est absolument continue.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 529—534 Série mathématique

П. К. ЩИПАНОВ

О НОРМАЛЬНЫХ ДЕЛИТЕЛЯХ ГРУППЫ

(*Представлено академиком* **О. Ю. Шмидтом**)

В работе доказывается ряд теорем об отображении системы элементов группы на другую систему и устанавливаются некоторые критерии непростоты конечных и бесконечных групп.

В работе автора «О сравнении систем элементов группы» [Доклады Ак. Наук СССР, XXV (1939), № 2] было введено понятие о сравнении систем элементов, принадлежащих конечной или бесконечной группе $\mathfrak{G}$ по модулю $\mathfrak{H}$. Введем теперь более общее понятие об отображении системы элементов, принадлежащей произвольной группе, на другую систему, принадлежащую той же группе.

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, $\mathfrak{H}$ — полугруппа, входящая в группу $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — системы элементов, принадлежащие группе $\mathfrak{G}$.

Будем говорить, что система $\mathfrak{S}$ отображается на систему $\mathfrak{S}'$ по модулю $\mathfrak{H}$, если для любого элемента s системы $\mathfrak{S}$ мы можем подобрать такой элемент s' из системы $\mathfrak{S}'$, что $s = Hs'$, где H входит в полугруппу $\mathfrak{H}$.

Отображение системы $\mathfrak{S}$ на систему $\mathfrak{S}'$ по модулю $\mathfrak{H}$ мы будем символически обозначать так:

$$\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}.$$

Из данного нами определения вытекают непосредственно следующие свойства отображений системы $\mathfrak{S}$ на систему $\mathfrak{S}'$ по модулю $\mathfrak{H}$.

I. Из $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_1 \pmod{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{S}_2 \pmod{\mathfrak{H}}$ следует $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}_2 \pmod{\mathfrak{H}}$.

II. Если $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — полугруппы, принадлежащие группе $\mathfrak{G}$, причем $\mathfrak{H}_2 \supseteq \mathfrak{H}_1$, то из $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}_1}$ следует $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}_2}$.

III. Условимся совокупность элементов, принадлежащих по крайней мере одной из систем $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots, \mathfrak{F}$ обозначать через $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \ldots + \mathfrak{F}$. Тогда из

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{T}_1 \pmod{\mathfrak{H}}, \\ \mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{T}_2 \pmod{\mathfrak{H}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{T}_n \pmod{\mathfrak{H}} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

следует

$$\mathfrak{S}_1 + \mathfrak{S}_2 + \ldots + \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{T}_1 + \mathfrak{T}_2 + \ldots + \mathfrak{T}_n \pmod{\mathfrak{H}}.$$

Заметим, что свойство III сохраняет свою силу и в том случае, если число сравнений (1) бесконечно.

IV. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная система, принадлежащая (как и системы $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$) группе $\mathfrak{G}$. Тогда из $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}$ следует $\mathfrak{S}\mathfrak{A} \to \mathfrak{S}'\mathfrak{A} \pmod{\mathfrak{H}}$.

Введем определение: некоторую полугруппу $\mathfrak{H}$, содержащуюся в группе $\mathfrak{G}$, мы будем называть *инвариантной полугруппой* группы $\mathfrak{G}$, если для любого элемента g имеет место равенство $g^{-1}\mathfrak{H}g = \mathfrak{H}$.

V. Если модуль сравнения $\mathfrak{H}$ — инвариантная полугруппа, принадлежащая группе $\mathfrak{G}$, то из $\mathfrak{S}_1 \to \mathfrak{T}_1 \pmod{\mathfrak{H}}$, $\mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{T}_2 \pmod{\mathfrak{H}}$ следует $\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2 \to \mathfrak{T}_1\mathfrak{T}_2 \pmod{\mathfrak{H}}$.

VI. Если модуль сравнения $\mathfrak{H}$ есть инвариантная полугруппа группы $\mathfrak{G}$, а $\mathfrak{T}$ есть произвольная система элементов, принадлежащих группе $\mathfrak{G}$, то из $\mathfrak{S} \to \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}$ следует $\mathfrak{T}\mathfrak{S} \to \mathfrak{T}\mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}$.

Докажем одну вспомогательную теорему, используемую далее при выводе признаков непростоты группы.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа, $\mathfrak{S}$ — система элементов из $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ — полугруппа, содержащаяся в группе $\mathfrak{G}$. Совокупность $\mathfrak{F}$ элементов x группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию*

$$\mathfrak{S}x \to \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}, \tag{2}$$

есть полугруппа. Если $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ не совпадает с $\mathfrak{G}$, то $\mathfrak{F}$ не совпадает с $\mathfrak{G}$.

Доказательство. Пусть x_1 и x_2 — элементы группы $\mathfrak{G}$, удовлетворяющие условию (2), так что

$$\mathfrak{S}x_1 \to \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}, \tag{3}$$
$$\mathfrak{S}x_2 \to \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}. \tag{4}$$

Из (3) по свойству IV вытекает

$$\mathfrak{S}x_1x_2 \to \mathfrak{S}x_2 \pmod{\mathfrak{H}};$$

далее, по свойству I заключаем, что

$$\mathfrak{S}x_1x_2 \to \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}$$

и элемент x_1x_2 принадлежит совокупности $\mathfrak{F}$; следовательно $\mathfrak{F}$ есть полугруппа.

Наконец, если бы $\mathfrak{F}$ совпадало с $\mathfrak{G}$, то и $\mathfrak{S}\mathfrak{F}$ совпадало бы с $\mathfrak{G}$ и из $\mathfrak{H}\mathfrak{S} \supseteq \mathfrak{S}\mathfrak{F}$ вытекало бы вопреки условию, что $\mathfrak{H}\mathfrak{S} = \mathfrak{G}$.

Опираясь на теорему 1, докажем следующее предложение.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, $\mathfrak{H}$ — полугруппа, содержащаяся в группе $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}$ — инвариантный комплекс элементов группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^{-1}$ — инвариантный комплекс элементов, состоящий из элементов, обратных элементам комплекса $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — две системы элементов из $\mathfrak{G}$. Если*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A} \to \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}, \quad (5)$$
$$\mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \to \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}} \quad (6)$$

и $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ не совпадает с $\mathfrak{G}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.

Доказательство. Из условия (5) теоремы, по свойству IV, следует, что

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} \to \mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \pmod{\mathfrak{H}}.$$

Из условия (6) теоремы получаем, по свойству I, что

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} \to \mathfrak{S} \pmod{\mathfrak{H}}.$$

По теореме 1 инвариантный комплекс элементов $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$ содержится в полугруппе, входящей в группу $\mathfrak{G}$ и отличной от $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим подгруппу группы $\mathfrak{G}$, порожденную элементами инвариантного комплекса $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$. Все элементы инвариантного комплекса $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$ принадлежат вышеупомянутой полугруппе. Легко видеть, что и подгруппа, порожденная инвариантным комплексом $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$, принадлежит той же полугруппе.

В самом деле, существенную роль играет то обстоятельство, что каждому элементу комплекса $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$ соответствует обратный элемент, входящий в тот же самый комплекс, а значит и в нашу полугруппу. Следовательно при порождении подгруппы элементами комплекса $\mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1}$ мы будем получать только такие элементы, которые заведомо принадлежат нашей полугруппе.

С другой стороны, известно, что подгруппа, порожденная элементами инвариантного комплекса, является нормальным делителем данной группы.

Нетрудно видеть, что теорема 2 содержит как следствие такое предложение, доказанное нами в цитированной выше работе:

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа, $\mathfrak{A}$ — инвариантный комплекс элементов группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — две системы элементов из $\mathfrak{G}$. Если для любого элемента A инвариантного комплекса $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{S}A \doteq \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}} \quad \text{и} \quad \mathfrak{H}\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G},$$

то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.

В самом деле, из условия этого предложения следуют немедленно предпосылки теоремы 2, так как из

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{S}A_1 \equiv \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}, \\ \mathfrak{S}A_2 \equiv \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}}, \\ \dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \quad (7)$$

где $A_1, A_2, \dots$ — элементы комплекса $\mathfrak{A}$, вытекает

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{S}' \pmod{\mathfrak{H}},$$

т. е. требование более сильное, чем условие (5).

Точно так же из (7) следует

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}' A_1^{-1} (\text{mod } \mathfrak{H}),$$
$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{S}' A_2^{-1} (\text{mod } \mathfrak{H}),$$
$$\dots \dots \dots$$

В силу известного свойства сравнений систем имеем

$$\mathfrak{S}' A_1^{-1} \equiv \mathfrak{S} (\text{mod } \mathfrak{H}),$$
$$\mathfrak{S}' A_2^{-1} \equiv \mathfrak{S} (\text{mod } \mathfrak{H}),$$
$$\dots \dots \dots$$

откуда

$$\mathfrak{S}' \mathfrak{A}^{-1} \equiv \mathfrak{S} (\text{mod } \mathfrak{H}),$$

т. е. опять имеем требование более сильное, чем условие (6).

Полагая в условии теоремы 2 $\mathfrak{H} = 1$, приходим к следующему предложению.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, $\mathfrak{A}$ — инвариантный комплекс элементов группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}^{-1}$ — инвариантный комплекс элементов, состоящий из элементов, обратных элементам комплекса $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — две системы из $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{S}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \subseteq \mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}$ не совпадает с $\mathfrak{G}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.*

Следствием полученного результата является также предложение, доказанное автором в цитированной работе. Приводим содержание этого предложения.

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторая группа, $\mathfrak{H}$ — ее подгруппа, $\mathfrak{A}$ — инвариантный комплекс элементов группы $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}'$ — две системы элементов из $\mathfrak{G}$. Если для любого элемента A инвариантного комплекса $\mathfrak{A}$ $\mathfrak{S}A = \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{G}$, то группа $\mathfrak{G}$ имеет нормальный делитель.

Действительно из

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{S}A_1 = \mathfrak{S}', \\ \mathfrak{S}A_2 = \mathfrak{S}', \\ \dots\dots\dots \end{array}\right\} \tag{8}$$

где $A_1, A_2, A_3, \dots$ — элементы комплекса $\mathfrak{A}$, следует

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A} = \mathfrak{S}'.$$

Точно так же из (8) следует

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' A_1^{-1},$$
$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}' A_2^{-1},$$
$$\dots\dots\dots$$

откуда

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1}.$$

Московский торфяной институт

Поступило 28.II.1940

P. SČYPANOFF. SUR LES DIVISEURS NORMAUX D'UN GROUPE

RÉSUMÉ

Le présent article contient le développement des résultats obtenus par l'auter et exposés dans sa Note «Sur la comparaison des systèmes d'éléments d'un groupe» [C. R. Acad. Sc. URSS, XXV (1939), № 2].

Dans le présent article on introduit la notion de représentation d'un système $\mathfrak{S}$ appartenant à un groupe $\mathfrak{G}$, sur un système $\mathfrak{S}'$ appartenant au même groupe $\mathfrak{G}$. En qualité de module de la représentation on prend un certain semi-groupe $\mathfrak{H}$.

La définition suivante de représentation est donnée.

Soit $\mathfrak{G}$ — un certain groupe, $\mathfrak{H}$ — un semi-groupè appartenant au groupe $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{S}$ et $\mathfrak{S}'$ des systèmes d'éléments appartenant au groupe $\mathfrak{G}$. Nous dirons qu'un système $\mathfrak{S}$ est représenté sur un système $\mathfrak{S}'$ suivant le module $\mathfrak{H}$, si pour chaque élément s du système $\mathfrak{S}$ on peut trouver un élément s' du système $\mathfrak{S}'$ tel que $s=Hs'$, où H appartient au semi-groupe $\mathfrak{H}$.

La représentation du système $\mathfrak{S}$ sur le système $\mathfrak{S}'$ suivant le module $\mathfrak{H}$ est désignée symboliquement de la manière suivante

$$\mathfrak{S} \longrightarrow \mathfrak{S}' \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{H}).$$

On déduit immédiatement de la définition précédente une série de propriétés de la représentation du système $\mathfrak{S}$ sur le système $\mathfrak{S}'$ suivant le module $\mathfrak{H}$.

Les propriétés établies des représentations permettent d'obtenir une série de propositions pour prouver qu'un groupe est non simple; ces propositions généralisent les résultats obtenus par l'auteur dans la Note citée.

THÉORÈME 1. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un groupe*; $\mathfrak{S}$ — *un système d'éléments de* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{H}$ — *un semi-groupe contenu dans le groupe* $\mathfrak{G}$. *L'ensemble* $\mathfrak{J}$ *des éléments* x *du groupe* $\mathfrak{G}$ *vérifiant la condition*

$$\mathfrak{S}x \longrightarrow \mathfrak{S} \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{H})$$

est un semi-groupe. Si $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ *ne coïncide pas avec* $\mathfrak{G}$, *alors* $\mathfrak{J}$ *ne coïncide pas avec* $\mathfrak{G}$.

THÉORÈME 2. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un certain groupe*; $\mathfrak{H}$ — *un semi-groupe appartenant à* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}$ — *un complexe invariant d'éléments du groupe* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}^{-1}$ — *le complexe invariant d'éléments formé de tous les éléments inverses aux éléments du complexe* $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{S}$ *et* $\mathfrak{S}'$ — *deux systèmes d'éléments de* $\mathfrak{G}$. *Si*

$$\mathfrak{S}\mathfrak{A} \longrightarrow \mathfrak{S}' \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{H}), \quad \mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \longrightarrow \mathfrak{S} \ (\mathrm{mod}\ \mathfrak{H}),$$

et si d'ailleurs $\mathfrak{H}\mathfrak{S}$ *ne coïncide pas avec* $\mathfrak{G}$, *le groupe* $\mathfrak{G}$ *possède un diviseur normal.*

En posant dans la condition du théorème 2 $\mathfrak{H}=1$ nous obtenons la proposition suivante.

THÉORÈME 3. *Soit* $\mathfrak{G}$ *un certain groupe;* $\mathfrak{A}$ *— un complexe invariant d'éléments du groupe* $\mathfrak{G}$; $\mathfrak{A}^{-1}$ *— le complexe invariant d'éléments formé de tous les éléments inverses à ceux du complexe* $\mathfrak{A}$; $\mathfrak{S}$ *et* $\mathfrak{S}'$ *— deux systèmes appartenant à* $\mathfrak{G}$. *Si* $\mathfrak{S}\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{S}'$, $\mathfrak{S}'\mathfrak{A}^{-1} \subseteq \mathfrak{S}$ *et* $\mathfrak{S}$ *ne coïncide pas avec* $\mathfrak{G}$, *le groupe* $\mathfrak{G}$ *possède un diviseur normal.*

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 4 (1940), 535—551 Série mathématique

Г. М. ХЕЙСИН

КЛАССИФИКАЦИЯ ГРУПП ПОРЯДКА p^2q^2

(*Представлено академиком* **И. М. Виноградовым**)

В статье дается классификация конечных групп, имеющих порядок вида p^2q^2, где p, q — различные простые числа, причем $p^2q^2 \neq 36$.

В настоящей работе дается классификация групп, порядок которых имеет вид p^2q^2, где p и q — различные простые числа. До сего времени полностью классифицированы группы с порядком вида p, p^2, p^3, p^4, p^5, pq^2, $p_1p_2 \ldots p_n$, где p, q, p_i — различные простые числа. Эти результаты содержатся в работах Hölder'a ([1,2]) и Bagnera ([3]).

Разрабатываемый в последнее время метод расширения групп, введенный Schreier'ом ([4,5]), позволил ему самому повторить результаты Bagnera и, повидимому, дает возможность получить довольно значительные результаты в вопросах классификации групп. Об этом свидетельствует, например, появившаяся недавно работа G. Liermann'a ([6]), в которой он классифицирует группы с коммутантом порядка p.

В настоящей работе метод Шрейера используется для доказательства того, что определяющие соотношения, которые будут в дальнейшем фигурировать, действительно определяют группу порядка p^2q^2. Затем определяющие соотношения, при помощи некоторых замен производящих элементов, приводятся к каноническому виду с таким расчетом, чтобы неизоморфным группам соответствовал различный канонический вид соотношений, а изоморфным — один и тот же.

Как известно, группа, порядок которой равен квадрату простого числа, всегда абелева и либо циклическая, либо является прямым произведением двух циклических. Исключим заранее из нашего рассмотрения случай, когда $p^2q^2 = 36$, и в дальнейшем будем считать $p > q$. В группе порядка p^2q^2, которую мы будем в дальнейшем обозначать $\mathfrak{G}$, по второй теореме Силова существуют подгруппы порядков p^2 и q^2. Все подгруппы порядка p^2 по той же теореме сопряжены между собой, а значит и изоморфны между собой. То же можно сказать и о подгруппах порядка q^2. В зависимости от структуры подгрупп порядков p^2 и q^2 для группы $\mathfrak{G}$ могут встретиться четыре случая:

Случай 1. Группы порядка p^2 и группы порядка q^2 — циклические.

Случай 2. Группы порядка p^2 — циклические, группы порядка q^2 — нециклические.

Случай 3. Группы порядка p^2 — нециклические, группы порядка q^2 — циклические.

Случай 4. Группы порядка p^2 и группы порядка q^2 — нециклические.

В дальнейшем закрепим за этими случаями данные номера.

§ 1. Число подгрупп порядка p^2 и выбор производящих элементов

По второй теореме Силова число подгрупп порядка p^2, которое мы обозначим ρ, должно быть делителем порядка группы $\mathfrak{G}$, т. е. числа p^2q^2, и должно удовлетворять сравнению $\rho \equiv 1 \pmod p$. В силу этих условий ρ может равняться одному из трех чисел $1, q, q^2$ (ибо все прочие делители p^2q^2 сравнимы с нулем по модулю p). При этом необходимо, чтобы либо $q \equiv 1 \pmod p$, либо $q^2 \equiv 1 \pmod p$. Но первое сравнение невозможно, ибо $q < p$, а второе влечет одно из двух сравнений: $q \equiv 1 \pmod p$ или $q \equiv -1 \pmod p$, а это возможно только в случае $q = 2$, $p = 3$, который был заранее исключен. Значит, остается единственная возможность $\rho = 1$, т. е. подгруппа порядка p^2 только одна. Вследствие этого эта подгруппа будет являться нормальным делителем группы $\mathfrak{G}$. Будем обозначать ее $\mathfrak{P}$. Группы порядка q^2 будем обозначать $\mathfrak{Q}$. Так как $\mathfrak{P}$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$ (что обозначается так: $\mathfrak{P} \Subset \mathfrak{G}$), то произведение $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ есть группа, а так как группы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{Q}$ имеют общим элементом только единицу, то порядок $\mathfrak{P}\mathfrak{Q}$ равен p^2q^2 и поэтому $\mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{G}$. Отсюда ясно, что $\mathfrak{G}/\mathfrak{P}$ изоморфна $\mathfrak{Q}$.

Шрейер называет группу $\mathfrak{C}$ расширением группы $\mathfrak{A}$ посредством группы $\mathfrak{B}$, если в $\mathfrak{C}$ имеется такая подгруппа $\mathfrak{A}_1$, что $\mathfrak{A}$ изоморфна $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_1 \Subset \mathfrak{C}$ и $\mathfrak{C}/\mathfrak{A}_1$ изоморфна $\mathfrak{B}$. Следуя этой терминологии, можно сказать, что группа $\mathfrak{G}$ порядка p^2q^2 является расширением группы $\mathfrak{P}$ порядка p^2 посредством группы $\mathfrak{Q}$ порядка q^2. Мы в дальнейшем будем пользоваться теоремой Шрейера ([5]) о расширении абелевой группы посредством абелевой группы. Для того чтобы использовать эту теорему наивыгоднейшим образом, мы выберем производящие элементы группы $\mathfrak{G}$ так: за производящие элементы $\mathfrak{G}$ всегда будем брать производящие элементы группы $\mathfrak{P}$ и производящие элементы какой-нибудь из групп $\mathfrak{Q}$. При этом производящие берутся в минимальном количестве. В выборе производящих элементов имеется некоторый произвол в том смысле, что группа $\mathfrak{Q}$ не указана точно. Но переход от группы $\mathfrak{Q}$ к группе $\mathfrak{Q}'$ в силу второй теоремы Силова и равенств $\mathfrak{G} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\mathfrak{Q}'$ равносилен внутреннему автоморфизму группы $\mathfrak{G}$, а как известно, всякий автоморфизм не меняет определяющих соотношений. Поэтому для нашей цели — приведения определяющих соотношений к каноническому виду — подобный произвол не может иметь значения.

Заметим, что в различных случаях (см. стр. 535—6) мы будем иметь дело с различным числом производящих элементов и различными определяющими соотношениями.

§ 2. Определяющие соотношения

Будем называть две матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ сравнимыми по модулю p и обозначать это так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \pmod p, \text{ если } a_{ij} \equiv b_{ij} \pmod p.$$

Будем называть матрицу $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ неособенной по mod p, если $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \not\equiv 0 \pmod p$. Тогда можно сформулировать следующие четыре теоремы, соответствующие четырем различным случаям.

ТЕОРЕМА 1. *Соотношения*

$$P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}PQ = P^{\alpha} \tag{1}$$

тогда и только тогда определяют группу порядка p^2q^2, *если* $\alpha^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$.

ТЕОРЕМА 2. *Соотношения*

$$\left.\begin{array}{ll} P^{p^2} = Q_1^q = Q_2^q = 1, & Q_1^{-1}PQ_1 = P^{\alpha}, \\ Q_1Q_2 = Q_2Q_1, & Q_2^{-1}PQ_2 = P^{\beta} \end{array}\right\} \tag{2}$$

тогда и только тогда определяют группу порядка p^2q^2, *если* $\alpha^q \equiv 1 \pmod{p^2}$ *и* $\beta^q \equiv 1 \pmod{p^2}$.

ТЕОРЕМА 3. *Соотношения*

$$\left.\begin{array}{ll} P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}P_1Q = P_1^{\alpha}P_2^{\beta}, \\ P_1P_2 = P_2P_1, & Q^{-1}P_2Q = P_1^{\gamma}P_2^{\delta} \end{array}\right\} \tag{3}$$

тогда и только тогда определяют группу порядка p^2q^2, *если* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{q^2} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod p$.

ТЕОРЕМА 4. *Соотношения*

$$\left.\begin{array}{llll} P_1^p = P_2^p = Q_1^q = Q_2^q = 1, & & Q_1^{-1}P_1Q_1 = P_1^{\alpha}P_2^{\beta}, & Q_2^{-1}P_1Q_2 = P_1^{\varkappa}P_2^{\lambda}, \\ P_1P_2 = P_2P_1, & Q_1Q_2 = Q_2Q_1, & Q_1^{-1}P_2Q_1 = P_1^{\gamma}P_2^{\delta}, & Q_2^{-1}P_2Q_2 = P_1^{\mu}P_2^{\nu} \end{array}\right\} \tag{4}$$

тогда и только тогда определяют группу порядка p^2q^2, *если*

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod p, \quad \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}^q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod p.$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \pmod p.$$

Форма соотношений (1), (2), (3), (4) диктуется выбором производящих элементов, указанным в § 1, и тем, что $\mathfrak{P}$ является нормальным делителем $\mathfrak{G}$.

Все четыре теоремы являются весьма простыми частными случаями теоремы Шрейера [([5]), теорема 1].

В дальнейшем мы будем считать, что условия, налагаемые на постоянные, встречающиеся в определяющих соотношениях, выполнены.

§ 3. Случай 1

Соотношения в этом случае будут таковы:

$$P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}PQ = P^{\alpha}. \tag{1}$$

Для удовлетворения условиям теоремы 1 требуем, чтобы $\alpha^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Это сравнение всегда имеет хоть одно решение $\alpha = 1$.

Если $p \equiv 1 \pmod q$, то имеются еще решения $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q-1}$, которые уже в степени q сравнимы с единицей по $\operatorname{mod} p^2$.

Если $p \equiv 1 \pmod{q^2}$, то имеется всего q^2 решений, являющихся степенями одного решения, которое мы фиксируем раз навсегда и будем в дальнейшем обозначать буквой g; $g^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$, но $g^q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Условимся сразу и о других обозначениях подобного рода. Той же буквой g мы будем обозначать и первообразный корень сравнения $x^{q^2} \equiv 1 \pmod p$, а также первообразный корень этого же сравнения, принадлежащий полю Галуа порядка p^2 в том случае, когда обычный первообразный корень отсутствует [для этого необходимо, чтобы $p \equiv -1 \pmod{q^2}$] *.

Так как будет встречаться также и сравнение $x^q \equiv 1 \pmod{p^2}$ или $x^q \equiv 1 \pmod p$, то его первообразный корень будем во всех случаях обозначать h, независимо от того, является ли h рациональным числом или числом поля Галуа порядка p^2. Последнее может случиться тогда и только тогда, когда $p \equiv -1 \pmod q$. Всякий раз, когда будут появляться числа поля Галуа, это будет оговорено во избежание недоразумений.

Вернемся к рассмотрению случая 1. Легко доказать, что $Q^{-k}PQ^k = P^{\alpha^k}$. Действительно, для $k = 1$ это очевидно.

Пусть $Q^{-(k-1)}PQ^{k-1} = P^{\alpha^{(k-1)}}$, тогда $Q^{-k}PQ^k = Q^{-1}Q^{-(k-1)}PQ^{k-1}Q = Q^{-1}P^{\alpha^{k-1}}Q = (Q^{-1}PQ)^{\alpha^{k-1}} = (P^{\alpha})^{\alpha^{k-1}} = P^{\alpha^k}$. Если заменить производящий элемент Q на Q^k $[k \not\equiv 0 \pmod q]$, то постоянная α заменится на α^k. Если $\alpha \equiv 1 \pmod{p^2}$, то и $\alpha^k \equiv 1 \pmod{p^2}$. Если $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, но $\alpha^q \equiv 1 \pmod{p^2}$, то и $\alpha^k \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ и $(\alpha^k)^q \equiv 1 \pmod{p^2}$. Если $\alpha^q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, но $\alpha^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$, то и $(\alpha^k)^q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$ и $(\alpha^k)^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Это показывает, что имеются три существенно различных случая: $\alpha \equiv 1 \pmod{p^2}$; $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, но $\alpha^q \equiv 1 \pmod{p^2}$; $\alpha^q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, но $\alpha^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$. Соответствующим подбором числа k можно добиться того, что во втором случае $\alpha^k \equiv h \pmod{p^2}$, а в третьем $\alpha^k \equiv g \pmod{p^2}$.

Итак, в случае 1 могут встретиться лишь три вида групп:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I. } P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}PQ = P; \\ \text{II. } P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}PQ = P^h; \\ \text{III. } P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}PQ = P^g. \end{array}\right\}$$

---

* О полях Галуа см. например Н. Г. Чеботарев, Основы теории Галуа, ч. I, М., 1934, стр. 155—162.

Группа I абелева, группа II имеет центр порядка q (циклическая группа, образованная элементом Q^q), группа III центра не имеет. Это показывает, что группы действительно различны. Если $p \equiv 1 \pmod{q^2}$, то существуют все три группы; если $p \not\equiv 1 \pmod{q^2}$, но $p \equiv 1 \pmod{q}$, то существуют только группы I и II; если $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, то существует лишь группа I.

Группа I разложима в прямое произведение. Коммутант в группах II и III совпадает с подгруппой Силова порядка p^2. Таким образом случай 1 исчерпан.

§ 4. Случай 2

Соотношения в этом случае будут таковы:

$$\left.\begin{array}{ll} P^{p^2} = Q_1^q = Q_2^q = 1, & Q_1^{-1} P Q_1 = P^\alpha, \\ Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1, & Q_2^{-1} P Q_2 = P^\beta. \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Для удовлетворения условиям теоремы 2 требуем, чтобы $\alpha^q \equiv 1 \pmod{p^2}$, $\beta^q \equiv 1 \pmod{p^2}$.

Можно всегда заменить Q_2 на $\overline{Q}_2$ так, что постоянная $\overline{\beta}$, отвечающая $\overline{Q}_2$, будет равна единице. В самом деле, либо $\alpha = 1$, $\beta = 1$, но тогда все доказано; либо $\alpha = h^a$, $\beta = h^b$. Тогда $Q_2^{-(q-a)} Q_1^{-b} P Q_1^b Q^{q-a} = Q_2^{-(q-a)} P^{\alpha^b} Q_2^{q-a} = P^{\alpha^b \beta^{q-a}} = P^{h^{ba+(q-a)b}} = P^{h^{bq}} = P$. Ясно, что за $\overline{Q}_2$ можно взять $Q_1^b Q_2^{q-a}$. Если теперь $\alpha \equiv 1 \pmod{p^2}$, то группа абелева, а если $\alpha \not\equiv 1 \pmod{p^2}$, то так как замена Q_1 на Q_1^k меняет α на α^k, как это уже было показано в § 3, можно выбрать k так, что $\alpha^k \equiv h \pmod{p^2}$ и в итоге в этом случае будут иметься две возможности:

$$\begin{array}{lll} \text{I.} & P^{p^2} = Q_1^q = Q_2^q = 1, & Q_1^{-1} P Q_1 = P, \\ & Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1, & Q_2^{-1} P Q_2 = P; \\ \text{II.} & P^{p^2} = Q_1^q = Q_2^q = 1, & Q_1^{-1} P Q_1 = P^h, \\ & Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1, & Q_2^{-1} P Q_2 = P. \end{array}$$

Если $p \equiv 1 \pmod{q}$, то существуют обе группы; если же $p \not\equiv 1 \pmod{q}$, то только группа I. Группа I абелева, в группе II центр порядка q (степени Q_2). Коммутант группы II — подгруппа Силова порядка p^2. Обе группы разложимы в прямое произведение:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & \mathfrak{G} = \{P\} \cdot \{Q_1\} \cdot \{Q_2\}, \\ \text{II.} & \mathfrak{G} = \{P, Q_1\} \cdot \{Q_2\}. \end{array}$$

§ 5. Случай 3

Соотношения в этом случае будут таковы:

$$\left.\begin{array}{ll} P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1} P_1 Q = P_1^\alpha P_2^\beta, \\ P_1 P_2 = P_2 P_1, & Q^{-1} P_2 Q = P_1^\gamma P_2^\delta \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Для удовлетворения условиям теоремы 3 требуем, чтобы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^{q^2} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{p}$.

ТЕОРЕМА 5. *Замена производящего* Q на Q^k $(k \not\equiv 0 \pmod q)$ *меняет матрицу* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *на* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^k$

Доказательство. Для $k=1$ это справедливо. Обозначим $Q^{-k}P_1Q^k = P_1^{\alpha_k}P_2^{\beta_k}$, $Q^{-k}P_2Q^k = P_1^{\gamma_k}P_2^{\delta_k}$. Пусть доказано, что $\begin{pmatrix}\alpha_{k-1} & \beta_{k-1}\\ \gamma_{k-1} & \delta_{k-1}\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{k-1} \pmod p$; докажем тогда, что $\begin{pmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ \gamma_k & \delta_k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^k \pmod p$.

$$P_1^{\alpha_k}P_2^{\beta_k} = Q^{-k}P_1Q^k = Q^{-1}(Q^{-(k-1)}P_1Q^{k-1})Q = Q^{-1}P_1^{\alpha_{k-1}}P_2^{\beta_{k-1}}Q = \\ = P_1^{\alpha_{k-1}\alpha+\beta_{k-1}\gamma}P_2^{\alpha_{k-1}\beta+\beta_{k-1}\delta}$$

Аналогично $P_1^{\gamma_k}P_2^{\delta_k} = P_1^{\gamma_{k-1}\alpha+\delta_{k-1}\gamma}P_2^{\gamma_{k-1}\beta+\delta_{k-1}\delta}$ Отсюда

$$\begin{pmatrix}\alpha_k & \beta_k\\ \gamma_k & \delta_k\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha_{k-1}\alpha+\beta_{k-1}\gamma & \alpha_{k-1}\beta+\beta_{k-1}\delta\\ \gamma_{k-1}\alpha+\delta_{k-1}\gamma & \gamma_{k-1}\beta+\delta_{k-1}\delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha_{k-1} & \beta_{k-1}\\ \gamma_{k-1} & \delta_{k-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^{k-1}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}^k \pmod p.$$

Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 6. *Замена производящих* P_1 *и* P_2 *на* $\overline{P}_1 = P_1^xP_2^y$ *и* $\overline{P}_2 = P_1^zP_2^t$ (*матрица* $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ *должна быть неособенной по* mod p) *меняет матрицу* $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ *на* $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}$, *где* $\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}$ *такова, что* $\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \pmod p$.

Предварительно докажем следующую лемму:

ЛЕММА. *Если* $\overline{P}_1 = P_1^xP_2^y$ *и* $\overline{P}_2 = P_1^zP_2^t$, *где* $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ *неособенная по* mod p *матрица, то* $P_1 = \overline{P}_1^{x'}\overline{P}_2^{y'}$ *и* $P_2 = \overline{P}_1^{z'}\overline{P}_2^{t'}$.

В самом деле, старые производящие должны выражаться через новые, ибо благодаря тому, что матрица $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ неособенная, элементы $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ не являются степенями друг друга. Покажем, что $\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}$ удовлетворяет условию, поставленному в теореме. В самом деле:

$$P_1 = \overline{P}_1^{x'}\overline{P}_2^{y'} = (P_1^xP_2^y)^{x'}(P_1^zP_2^t)^{y'} = P_1^{x'x+y'z}P_2^{x'y+y't},$$
$$P_2 = \overline{P}_1^{z'}\overline{P}_2^{t'} = (P_1^xP_2^y)^{z'}(P_1^zP_2^t)^{t'} = P_1^{z'x+t'z}P_2^{z'y+t't}.$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}x'x+y'z & x'y+y't\\ z'x+t'z & z'y+t't\end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix} \pmod p.$$

В дальнейшем можно обозначать $\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}^{-1}$

Доказательство теоремы 6. Имеем:

$$Q^{-1}\overline{P}_1Q = Q^{-1}P_1^xP_2^yQ = Q^{-1}P_1^xQQ^{-1}P_2^yQ = (P_1^\alpha P_2^\beta)^x(P_1^\gamma P_2^\delta)^y = \\ = P_1^{x\alpha+y\gamma}P_2^{x\beta+y\delta} = (\overline{P}_1^{x'}\overline{P}_2^{y'})^{x\alpha+y\gamma}(\overline{P}_1^{z'}\overline{P}_2^{t'})^{x\beta+y\delta} = \\ = \overline{P}_1^{(x\alpha+y\gamma)x'+(x\beta+y\delta)z'}\overline{P}_2^{(x\alpha+y\gamma)y'+(x\beta+y\delta)t'}.$$

Аналогично

$$Q^{-1}\overline{P}_2Q=\overline{P}_1^{(z\alpha+t\gamma)x'+(z\beta+t\delta)z'}\overline{P}_2^{(z\alpha+t\gamma)y'+(z\beta+t\delta)t'}$$

Ясно, что матрица $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ заменилась следующей:

$$\begin{pmatrix}(x\alpha+y\gamma)x'+(x\beta+y\delta)z' & (x\alpha+y\gamma)y'+(x\beta+y\delta)t'\\ (z\alpha+t\gamma)x'+(z\beta+t\delta)z' & (z\alpha+t\gamma)y'+(z\beta+t\delta)t'\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{pmatrix}x\alpha+y\gamma & x\beta+y\delta\\ z\alpha+t\gamma & z\beta+t\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x' & y'\\ z' & t'\end{pmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}^{-1}\pmod p.$$

Теорема доказана.

Характеристическими числами матрицы $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ будем называть корни сравнения $x^2-(\alpha+\delta)x+\alpha\delta-\gamma\beta\equiv 0 \pmod p$. При этом сравнение будем рассматривать как уравнение в поле Галуа порядка p^2. От характеристических чисел не нужно, вообще говоря, требовать, чтобы они были рациональными.

Известно, что характеристические числа степени матрицы равняются соответствующим степеням характеристических чисел самой матрицы. Таким образом, во-первых, ясно, что характеристические числа λ_1 и λ_2 должны удовлетворять условию $\lambda_1^{q^2}=1$, $\lambda_2^{q^2}=1$ (здесь и в дальнейшем пишем вместо сравнений равенство, понимая под числами элементы поля Галуа порядка p^2). Во-вторых, очевидно, что замена производящих, упоминаемая в теореме 6, не может изменить характеристических чисел матрицы $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ (их можно только перенумеровать), а замена производящего Q на Q^k меняет характеристические числа λ_1 и λ_2 соответственно на λ_1^k и λ_2^k.

Дальнейший план рассуждений таков: выбором числа k приведем характеристические числа к некоторому каноническому виду, а затем, пользуясь заменой производящих, упоминаемой в теореме 6, приведем матрицу с выбранными уже характеристическими числами к каноническому виду. Таковым нами выбран канонический вид, транспонированный по сравнению с каноническим видом Ковалевского*. Этот вид, по сравнению с обычным вейерштрассовским видом, тем более выгоден, что не требует рациональности характеристических чисел. В случае же рациональности характеристических чисел можно в равной мере применять любой канонический вид.

Приведем же характеристические числа к каноническому виду. Либо оба характеристических числа λ_1, λ_2 равны единице, либо одно из них, например λ_1, не равно единице. Пусть оба числа таковы, что $\lambda_1^q=\lambda_2^q=1$. Тогда $\lambda_1=h^a$ ($a\not\equiv 0 \pmod q$). Заменяя Q на $Q^{a'}$, где $aa'\equiv 1 \pmod{q^2}$, делаем $\lambda_1=h$. Второе характеристическое число λ_2 может быть при этом равным одному из чисел h^k; $k=0, 1, \ldots, q-1$. При этом пары характеристических чисел $\lambda_1=h$, $\lambda_2=h^k$ и $\lambda_1=h$, $\lambda_2=h^{k'}$, где

* См. О. Шрейер и Е. Шпернер, Теория матриц, перев. с нем., М., 1930.

$kk' \equiv 1 \pmod q$), соответствуют изоморфным группам. В самом деле, заменяя Q на $Q^{k'}$, мы переводим $\lambda_1 = h$ в $\lambda_1 = h^{k'}$, а $\lambda_2 = h^{k'}$ в $\lambda_2 = h$. Перенумеровывая производящие P_1, P_2, получим, что $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = h^{k'}$. Остальные случаи соответствуют неизоморфным группам. Число таких случаев легко подсчитать. Следует отметить, что если $k = 1$ или $q - 1$, то k' тоже равно единице или соответственно $q - 1$. Поэтому всего различных случаев будет $3 + \frac{q-3}{2} = \frac{q+3}{2}$. Здесь $q \neq 2$. Случай $q = 2$ будет рассмотрен особо.

Если не оба характеристических числа уже в степени q дают единицу, то пусть для определенности $\lambda_1^q \neq 1$, но конечно $\lambda_1^{q^2} = 1$. Тогда $\lambda_1 = g^a$, причем $a \not\equiv 0 \pmod q$. Заменяя Q на $Q^{a'}$, где $aa' \equiv 1 \pmod{q^2}$, мы меняем $\lambda_1 = g^a$ на $\lambda_1 = g$. Второе характеристическое число $\lambda_2 = g^l$; $l = 0, 1, \ldots, q^2 - 1$. При этом пары характеристических чисел $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = g^l$ и $\lambda_1 = g$, $\lambda_2 = g^{l'}$, где $ll' \equiv 1 \pmod{q^2}$, соответствуют изоморфным группам. Доказательство аналогично предыдущему. Считая $q \neq 2$, подсчитаем и здесь число возможных случаев. Опять-таки, если $l = 1$ или $q^2 - 1$, то и $l' = 1$ или соответственно $q^2 - 1$. Всего здесь будет $q + 2 + \frac{q^2 - q - 2}{2} = \frac{q^2 + q + 2}{2}$ случаев. Сведем полученные случаи в таблицу:

	λ_1	λ_2
Тип 1 . . .	1	1
Тип 2 . . .	h	h^k
Тип 3 . . .	g	g^l

Приведем теперь матрицу $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, при помощи замены производящих P_1 и P_2, к каноническому виду, транспонированному по сравнению с каноническим видом Ковалевского. Это будут:

при типе 1 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

при типе 2 и $k = 1$ $\begin{pmatrix} h & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$,

при типе 2 и $k \neq 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -hh^k & h + h^k \end{pmatrix}$,

при типе 3 и $l = 1$ $\begin{pmatrix} g & 0 \\ 0 & g \end{pmatrix}$,

при типе 3 и $l \neq 1$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -gg^l & g + g^l \end{pmatrix}$.

Сумма и произведение характеристических чисел, стоящие в нижней строчке, и являются коэффициентами характеристического уравнения с соответствующими знаками, как это и нужно в форме Ковалевского.

Таким образом мы будем иметь следующие пять видов определяющих соотношений:

$$\text{I.} \quad P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, \qquad Q^{-1}P_1Q = P_1,$$
$$P_1P_2 = P_2P_1, \qquad Q^{-1}P_2Q = P_2;$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{II.} & P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}P_1Q = P_1^h, \\
& P_1P_2 = P_2P_1, & Q^{-1}P_2Q = P_2^h; \\
\text{III.} & P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}P_1Q = P_2, \\
& P_1P_2 = P_2P_1, & Q^{-1}P_2Q = P_1^{-hh^k}P_2^{h+h^k}; \\
\text{IV.} & P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}P_1Q = P_1^g, \\
& P_1P_2 = P_2P_1, & Q^{-1}P_2Q = P_2^g; \\
\text{V.} & P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, & Q^{-1}P_1Q = P_2, \\
& P_1P_2 = P_2P_1, & Q^{-1}P_2Q = P_1^{-gg^l}P_2^{g+g^l}.
\end{array}
$$

В случаях III и V для нас не важно, является ли h или g числом рациональным. Важно лишь, чтобы hh^k и $h+h^k$ в случае III и gg^l и $g+g^l$ в случае V были рациональными. Это может быть и действительно будет при $k=q-1$ и $l=q^2-1$. При этом для того, чтобы существовали в поле Галуа первообразные корни h и g, необходимо, чтобы $p\equiv-1 \pmod q$ в случае III или $p\equiv-1 \pmod{q^2}$ случае V.

Будем обозначать в дальнейшем h^{q-1} через h^{-1} и g^{q^2-1} через g^{-1}. Докажем, что при этих предположениях $h+h^{-1}$ и $g+g^{-1}$ являются рациональными числами. Доказательство следует непосредственно из следующей леммы Д. К. Фаддеева.

Лемма Фаддеева. *Если α элемент поля Галуа порядка p^2, то $\alpha+\alpha^{-1}$ будет рациональным, если $\alpha^{p+1}=1$.*

Доказательство. $\alpha+\alpha^p$ рационально согласно теореме Ферма, ибо $(\alpha+\alpha^p)^p=\alpha^p+\alpha^{p^2}=\alpha+\alpha^p$, ибо $\alpha^{p^2}=\alpha$, как всякое число поля Галуа порядка p^2. Далее $\alpha+\alpha^{-1}=\alpha+\alpha^p+\alpha^{-1}(1-\alpha^{p+1})$. В силу условия теоремы $\alpha+\alpha^{-1}=\alpha+\alpha^p$ и поэтому рационально.

Из этой леммы следует то, что нам нужно, ибо $h^{p+1}=1$, и $g^{p+1}=1$, ибо q и соответственно q^2 являются делителями $p+1$. Здесь опять-таки $q\neq 2$.

Значит, если $p\equiv 1 \pmod{q^2}$, то существуют все типы групп, всего $\frac{q^2+q+2}{2}+\frac{q+3}{2}+1=\frac{q^2+2q+7}{2}$ групп.

Если $p\not\equiv 1 \pmod{q^2}$, но $p\equiv 1 \pmod q$, то существуют группы типов I, II, III, всего $\frac{q+3}{2}+1=\frac{q+5}{2}$ групп.

Если $p\equiv -1 \pmod{q^2}$, то существуют группы типа I и типа III при $k=q-1$ и типа V при $l=q^2-1$, всего 3 группы.

Если $p\not\equiv -1 \pmod{q^2}$, но $p\equiv -1 \pmod q$, то существуют группы типа I и типа III при $k=q-1$, всего 2 группы.

Если $p^2\not\equiv 1 \pmod q$, то существует одна группа типа I.

Группа I абелева и поэтому разложима в прямое произведение. Она равна $\mathfrak{G}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}\cdot\{Q\}$.

Группа II имеет центр порядка q (степени элемента Q^q). Ее коммутант — подгруппа Силова порядка p^2.

Группа III при $k=0$ имеет центр порядка pq и коммутант порядка p (центр производится элементами Q^q и $P_1^hP_2^{-1}$, а коммутант — элемен-

том $P_1^{-1}P_2$.) Группы, соответствующие $k \neq 0$, имеют центр порядка q (степени элемента Q^q) и коммутант — подгруппу Силова порядка p^2. Группа, соответствующая $k=0$, разложима в прямое произведение и равна $\mathfrak{G} = \{P_1^h P_2^{-1}\} \cdot \{Q, P_1^{-1}P_2\}$.

Группа IV центра не имеет, а коммутант — подгруппа Силова порядка p^2.

Группа V, соответствующая $l=0$, имеет центр порядка p (степени элемента $P_1^g P_2^{-1}$). Коммутант здесь тоже порядка p (степени элемента $P_1^{-1}P_2$). Эта группа разложима в прямое произведение и равна $\mathfrak{G} = \{P_1^g P_2^{-1}\} \cdot \{Q, P_1^{-1}P_2\}$. Группы, соответствующие $l \neq 0$, центра не имеют, а коммутант — подгруппа Силова порядка p^2.

Разберем еще случай $q=2$. Здесь $h=-1$, а g обозначим символом $-i$. При этом i рационально, если $p \equiv 1 \pmod 4$ и нерационально, если $p \equiv -1 \pmod 4$.

Существуют следующие группы:

$$\mathrm{I}_2 \quad P_1^p = P_2^p = Q^4 = 1, \qquad Q^{-1}P_1Q = P_1,$$
$$P_1P_2 = P_2P_1, \qquad Q^{-1}P_2Q = P_2;$$
$$\mathrm{II}_2 \quad P_1^p = P_2^p = Q^4 = 1, \qquad Q^{-1}P_1Q = P_1^{-1},$$
$$P_1P_2 = P_2P_1, \qquad Q^{-1}P_2Q = P_2^{-1};$$
$$\mathrm{III}_2 \quad P_1^p = P_2^p = Q^4 = 1, \qquad Q^{-1}P_1Q = P_2,$$
$$P_1P_2 = P_2P_1, \qquad Q^{-1}P_2Q = P_1;$$
$$\mathrm{IV}_2 \quad P_1^p = P_2^p = Q^4 = 1, \qquad Q^{-1}P_1Q = P_1^{-i},$$
$$P_1P_2 = P_2P_1, \qquad Q^{-1}P_2Q = P_2^{-i};$$
$$\mathrm{V}_2 \quad P_1^p = P_2^p = Q^4 = 1, \qquad Q^{-1}P_1Q = P_2,$$
$$P_1P_2 = P_2P_1, \qquad Q^{-1}P_2Q = P_1^{i\cdot(-i)^k} P_2^{-i+(-i)^k}$$
$$k = 2, 3, 4.$$

Если $p \equiv 1 \pmod 4$, то существуют все группы, всего 7 групп.

Если $p \equiv -1 \pmod 4$, то существуют группы I_2, II_2, III_2 и V_2, соответствующие $k=3$, всего 4 группы.

Группа I_2 абелева и поэтому разложима в прямое произведение $\mathfrak{G} = \{P_1\} \cdot \{P_2\} \cdot \{Q\}$.

Группа II_2 имеет центр порядка 2 и коммутант порядка p^2.

Группа III_2 имеет центр порядка $2p$, а коммутант порядка p (центр производится элементами Q^2 и P_1P_2, а коммутант $P_1^{-1}P_2$). Эта группа разложима в прямое произведение $\mathfrak{G} = \{P_1P_2\} \cdot \{Q, P_1^{-1}P_2\}$.

Группа IV_2 центра не имеет, а коммутант ее порядка p^2.

Группа V_2, соответствующая $k=4$, имеет центр порядка p и коммутант порядка p (центр — степени элемента $P_1^i P_2$, коммутант — степени элемента $P_1^{-1}P_2$). Эта группа разложима в прямое произведение $\mathfrak{G} = \{P_1^i P_2\} \cdot \{Q, P_1^{-1}P_2\}$. Остальные группы V_2 центра не имеют, а их коммутант порядка p^2.

Таким образом случай 3 исчерпан.

§ 6. Случай 4

Соотношения в этом случае будут таковы:

$$\left.\begin{array}{llll} P_1^p = P_2^p = Q_1^q = Q_2^q = 1, & & Q_1^{-1}P_1Q_1 = P_1^{\alpha}P_2^{\beta}, & Q_2^{-1}P_1Q_2 = P_1^{\varkappa}P_2^{\lambda}, \\ P_1P_2 = P_2P_1, & Q_1Q_2 = Q_2Q_1, & Q_1^{-1}P_2Q_1 = P_1^{\gamma}P_2^{\delta}, & Q_2^{-1}P_2Q_2 = P_1^{\mu}P_2^{\nu}. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Для удовлетворения условиям теоремы 4 требуем, чтобы

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod p, \quad \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}^q \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod p,$$

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \pmod p.$$

Очевидно, что теорема 6 здесь тоже справедлива. Иначе говоря, если заменить производящие P_1 и P_2 на $\bar{P}_1 = P_1^x P_2^y$, $\bar{P}_2 = P_1^z P_2^t$, причем матрица $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ неособенная по $(\bmod\, p)$, матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ заменяются соответственно на

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{-1} \text{ и } \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}^{-1}.$$

Возможна еще замена производящих Q_1 и Q_2 на $\bar{Q}_1 = Q_1^k Q_2^l$ и $\bar{Q}_2 = Q_1^m Q_2^n$, причем $\begin{pmatrix} k & l \\ m & n \end{pmatrix}$ неособенная матрица по $\bmod q$. Докажем, что при этой замене матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ заменяются на матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}^l$ и $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^m \begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}^n$. Действительно, по теореме 5, следует, что $Q_1^{-k}P_1Q_1^k = P_1^{\alpha_k}P_2^{\beta_k}$ и $Q_1^{-k}P_2Q_1^k = P_1^{\gamma_k}P_2^{\delta_k}$, где $\begin{pmatrix} \alpha_k & \beta_k \\ \gamma_k & \delta_k \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}^k \pmod p$. Аналогично элементу Q_2^l отвечает матрица $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}^l$. Нужно только доказать, что произведению элементов Q_1 и Q_2 соответствует матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$. Действительно,

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}P_1Q_1Q_2 = Q_2^{-1}P_1^{\alpha}P_2^{\beta}Q_2 = P_1^{\alpha\varkappa+\beta\mu}P_2^{\alpha\lambda+\beta\nu},$$

$$Q_2^{-1}Q_1^{-1}P_2Q_1Q_2 = Q_2^{-1}P_1^{\gamma}P_2^{\delta}Q_2 = P_1^{\gamma\varkappa+\delta\mu}P_2^{\gamma\lambda+\delta\nu}.$$

Отсюда видно, что элементу Q_1Q_2 отвечает матрица

$$\begin{pmatrix} \alpha\varkappa+\beta\mu & \alpha\lambda+\beta\nu \\ \gamma\varkappa+\delta\mu & \gamma\lambda+\delta\nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}.$$

Вообще каждому элементу из группы $\mathfrak{Q}$ отвечает определенная матрица. Эти матрицы образуют представление группы $\mathfrak{Q}$. Единице отвечает матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пользуясь коммутативностью матриц и приводя одну из них к каноническому виду Вейерштрасса, легко показать, что характеристические числа произведения коммутирующих матриц равны произведению характеристических чисел матриц-сомножителей.

Пользуясь этим результатом, приведем сперва характеристические числа к каноническому виду. Заметим еще, что если одно из характеристических чисел рационально, то и второе автоматически будет рационально. Обозначим характеристические числа матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ через λ_1, λ_2, а матрицы $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ через μ_1, μ_2. В силу условий, налагаемых на матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ теоремой 4, характеристические числа должны удовлетворять условиям $\lambda_1^q = 1$, $\lambda_2^q = 1$, $\mu_1^q = 1$, $\mu_2^q = 1$ (равенства рассматриваются в поле Галуа порядка p^2).

Возможно несколько различных случаев. Все четыре характеристических числа $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ могут быть равны единице, либо нет. Во втором случае предположим для определенности, что $\lambda_1 \neq 1$; тогда $\lambda_1 = h^{a_1}$. Пусть $\mu_1 = h^{b_1}$. Заменяем производящий элемент Q_2 на $\overline{Q}_2 = Q_1^{q-b_1} Q_2^{a_1}$. Тогда одно из характеристических чисел матрицы, соответствующей элементу $\overline{Q}_2$, равняется $\lambda_1^{q-b_1}\mu_1^{a_1} = h^{(q-b_1)a_1+b_1a_1} = 1$. Далее может быть, что либо μ_2 у матрицы, соответствующей $\overline{Q}_2$, равняется единице, либо нет. В первом случае можно, заменяя Q_1 на Q_1^k, выбрать k так, чтобы характеристическое число λ_1 стало равным h; второе же характеристическое число будет $\lambda_2 = h^l$, $l = 0, \ldots, q-1$; при этом пары характеристических чисел $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = h^l$ и $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = h^{l'}$, где $ll' \equiv 1 \pmod q$, соответствуют изоморфным группам. Во втором случае $\mu_2 = h^{b_2}\,[b_2 \not\equiv 0 \pmod q]$, $\lambda_2 = h^{a_2}$. Заменяя Q_1 на $\overline{Q}_1 = Q_1^{b_2} Q_2^{q-a_2}$, получим матрицу, соответствующую $\overline{Q}_1$, у которой $\lambda_2 = 1$. Заменяя затем Q_1 на его степень, а Q_2 на его степень, можно сделать $\lambda_1 = h$, $\lambda_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = h$. Сведем полученное в таблицу:

	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2
Тип 1 . . .	1	1	1	1
Тип 2 . . .	h	h^l	1	1
Тип 3 . . .	h	1	1	h

Приведем теперь матрицы $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \varkappa & \lambda \\ \mu & \nu \end{pmatrix}$ к каноническому виду при помощи замены производящих P_1 и P_2. Это будут:

для типа 1 $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

для типа 2 и $l=1$ $\begin{pmatrix}h&0\\0&h\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

для типа 2 и $l\neq 1$ $\begin{pmatrix}0&1\\-hh^l&h+h^l\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$;

для типа 3 $\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix}1&0\\0&h\end{pmatrix}$.

Таким образом имеются следующие четыре вида определяющих соотношений:

$$\text{I.}\quad P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_1,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$$
$$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_2,\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2;$$
$$\text{II.}\quad P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_1^h,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$$
$$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_2^h,\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2;$$
$$\text{III.}\quad P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_2,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$$
$$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_1^{-hh^l}P_2^{h+h^l},\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2;$$
$$\text{IV.}\quad P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_1^h,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$$
$$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_2,\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2^h.$$

Если $p\equiv 1 \pmod q$, то существуют все группы, всего $\frac{q+7}{2}$ групп (здесь $q\neq 2$).

Если $p\equiv -1 \pmod q$, то существуют группа I и группа III, соответствующая $l=q-1$, всего 2 группы.

Если $p^2\not\equiv 1 \pmod q$, то существует всего одна группа I. Для $q=2$ типы групп те же; $h=-1$. В группе III l может равняться только нулю. Существуют четыре типа групп.

Группа I абелева и потому разложима в прямое произведение $\mathfrak{G}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}\cdot\{Q_1\}\cdot\{Q_2\}$.

Группа II имеет центр порядка q (степени элемента Q_2), а коммутант — подгруппу Силова порядка p^2. Она разложима в прямое произведение и равна $\mathfrak{G}=\{Q_2\}\cdot\{Q_1, P_1, P_2\}$.

Группа III при $l=0$ имеет центр порядка pq (он производится элементами Q_2 и $P_1^hP_2^{-1}$), а коммутант порядка p (степени элемента $P_1^{-1}P_2$). Группа разложима в прямое произведение $\mathfrak{G}=\{P_1^hP_2^{-1}\}\{Q_2\}\cdot\{P_1^{-1}P_2, Q_1\}$.

Группы III при $l\neq 0$ имеют центр порядка q (степени элемента Q_2). Коммутант их имеет порядок p^2. Они все разложимы в прямое произведение и равны $\mathfrak{G}=\{Q_2\}\cdot\{Q_1, P_1, P_2\}$.

Группа IV не имеет центра, а ее коммутант имеет порядок p^2. Она разложима в прямое произведение и равна $\mathfrak{G}=\{P_1, Q_1\}\cdot\{P_2, Q_2\}$.

§ 7. Таблицы

Сведем результаты в две таблицы и кроме того дадим полный каталог определяющих соотношений групп.

Таблица 1

Структура подгрупп Силова	Случай 1	Случай 2	Случай 3	Случай 4	Всего
$p \equiv 1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	3	2	$\frac{q^2+2q+7}{2}$	$\frac{q+7}{2}$	$\frac{q^2+3q+24}{2}$
$p \equiv 1 \pmod{q}$ $p \not\equiv 1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	2	2	$\frac{q+5}{2}$	$\frac{q+7}{2}$	$q+10$
$p \equiv -1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	1	1	3	2	7
$p \equiv -1 \pmod{q}$ $p \not\equiv -1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	1	1	2	2	6
$p^2 \not\equiv 1 \pmod{q}$ $q \neq 2$	1	1	1	1	4
$q = 2,\ p = 4n+1$	3	2	7	4	16
$q = 2,\ p = 4n-1$	2	2	4	4	12

Таблица 2

Порядок коммутанта	1	p	p	p^2	p^2	Всего
Порядок центра	p^2q^2	pq	p	q	1	
$p \equiv 1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	4	2	1	$q+3$	$\frac{q^2+q+4}{2}$	$\frac{q^2+3q+24}{2}$
$p \equiv 1 \pmod{q}$ $p \not\equiv 1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	4	2	0	$q+3$	1	$q+10$
$p \equiv -1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	4	0	0	2	1	7
$p \equiv -1 \pmod{q}$ $p \not\equiv -1 \pmod{q^2}$ $q \neq 2$	4	0	0	2	0	6
$p^2 \not\equiv 1 \pmod{q}$ $q \neq 2$	4	0	0	0	0	4
$q = 2,\ p = 4n+1$	4	2	1	4	5	16
$q = 2,\ p = 4n-1$	4	2	0	4	2	12

В таблицах отражено количество групп того или иного вида в зависимости от арифметических свойств чисел p и q. В табл. 1 выделена структура подгрупп Силова, в табл. 2 — порядки центра и коммутанта.

Всюду в дальнейшем будем обозначать группу порядка p^2q^2, как и раньше, через $\mathfrak{G}$, ее центр — через $\mathfrak{C}$, ее коммутант — через $\mathfrak{K}$. Число g всюду означает фиксированный первообразный корень сравнения $x^{q^2} \equiv 1 \pmod{p^2}$ или $x^{q^2} \equiv 1 \pmod{p}$. Число h всюду означает фиксированный первообразный корень сравнения $x^q \equiv 1 \pmod{p^2}$ или $x^q \equiv 1 \pmod{p}$. Сравнения по $\bmod\, p^2$ имеют место в случаях 1 и 2, а по $\bmod\, p$ — в случаях 3 и 4. Если g или h нерациональные числа из поля Галуа порядка p^2, то это будет отмечаться словами: «g — из поля Галуа» или «h — из поля Галуа». Выполнение указываемых сравнений гарантирует существование всех групп соответствующего вида.

Случай 1.

1.I $P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}PQ = P.$

Группа абелева. $\mathfrak{G} = \{P\} \cdot \{Q\}.$

1.II $P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}PQ = P^h,$

$p \equiv 1 \pmod{q}, \; \mathfrak{K} = \{P\}, \quad \mathfrak{C} = \{Q^q\}.$

1.III $P^{p^2} = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}PQ = P^g,$

$p \equiv 1 \pmod{q^2}, \; \mathfrak{K} = \{P\}, \quad \mathfrak{C} = 1.$

Случай 2

2.I $P^{p^2} = Q_1^q = Q_2^q = 1, \quad Q_1^{-1}PQ_1 = P,$

$Q_1Q_2 = Q_2Q_1, \quad Q_2^{-1}PQ_2 = P.$

Группа абелева. $\mathfrak{G} = \{P\} \cdot \{Q_1\} \cdot \{Q_2\}.$

2.II $P^{p^2} = Q_1^q = Q_2^q = 1, \quad Q_1^{-1}PQ_1 = P^h,$

$Q_1Q_2 = Q_2Q_1, \quad Q_2^{-1}PQ_2 = P,$

$p \equiv 1 \pmod{q}, \quad \mathfrak{K} = \{P\}, \quad \mathfrak{C} = \{Q_2\},$

$\mathfrak{G} = \{P, Q_1\} \cdot \{Q_2\}.$

Случай 3

3.I $P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}P_1Q = P_1,$

$P_1P_2 = P_2P_1, \quad Q^{-1}P_2Q = P_2.$

Группа абелева. $\mathfrak{G} = \{P_1\} \cdot \{P_2\} \cdot \{Q\}.$

3.II $P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}P_1Q = P_1^h,$

$P_1P_2 = P_2P_1, \quad Q^{-1}P_2Q = P_2^h,$

$p \equiv 1 \pmod{q}, \quad \mathfrak{K} = \{P_1\} \cdot \{P_2\}, \quad \mathfrak{C} = \{Q^q\}.$

3.III $P_1^p = P_2^p = Q^{q^2} = 1, \quad Q^{-1}P_1Q = P_2,$

$P_1P_2 = P_2P_1, \quad Q^{-1}P_2Q = P_1^{-hh^k}P_2^{h+h^k},$

$0 \leqslant k < q$, $k \neq 1$, k принимает значения 0, $q-1$, а остальные значения — по одному из пары чисел k и k' таких, что $kk' \equiv 1 \pmod{q}$; $p \equiv 1 \pmod{q}$. Если $p \equiv -1 \pmod{q}$, то существует группа, соответствующая $k = q-1$, но h — из поля Галуа.

Если $k=0$, то $\mathfrak{R}=\{P_1^{-1}P_2\}$, $\mathfrak{C}=\{Q^q\}\cdot\{P_1^h P_2^{-1}\}$,

$$\mathfrak{G}=\{Q,\ P_1^{-1}P_2\}\cdot\{P_1^h P_2^{-1}\}.$$

Если $k\neq 0$, то $\mathfrak{R}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}$, $\mathfrak{C}=\{Q^q\}$.

Если $q=2$, то существует группа, отвечающая $k=0$.

3.IV $P_1^p=P_2^p=Q^{q^2}=1,\quad Q^{-1}P_1Q=P_1^g;$

$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q^{-1}P_2Q=P_2^g,$

$p\equiv 1 \pmod{q^2},\quad \mathfrak{R}=\{P_1\}\cdot\{P_2\},\quad \mathfrak{C}=1.$

3.V $P_1^p=P_2^p=Q^{q^2}=1,\quad Q^{-1}P_1Q=P_2,$

$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q^{-1}P_2Q=P_1^{-gg^l}P_2^{g+g^l}.$

$0\leqslant l<q^2$, $l\neq 1$; l принимает значения $0,\ q, 2q, \ldots, (q-1)\,q$, q^2-1, а остальные значения — по одному из пары чисел l и l' таких, что $ll'\equiv 1 \pmod{q^2}$.

$p\equiv 1 \pmod{q^2}$.

Если $p\equiv -1 \pmod{q^2}$, то существует группа, соответствующая $l=q^2-1$, но g — из поля Галуа.

Если $l=0$, то $\mathfrak{R}=\{P_1^{-1}P_2\}$, $\mathfrak{C}=\{P_1^g P_2^{-1}\}$, $\mathfrak{G}=\{P_1^g P_2^{-1}\}\cdot\{Q,\ P_1^{-1}P_2\}$.

Если $l\neq 0$, то $\mathfrak{R}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}$, $\mathfrak{C}=1$.

Если $q=2$, а p вида $4n+1$, то существуют группы, соответствующие $l=0, 2, 3$.

Если $q=2$ и p вида $4n-1$, то существует лишь группа при $l=0$.

Случай 4

4.I $P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_1,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$

$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_2,\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2.$

Группа абелева. $\mathfrak{G}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}\cdot\{Q_1\}\cdot\{Q_2\}$.

4.II $P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_1^h,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$

$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_2^h,\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2,$

$p\equiv 1 \pmod q$, $\mathfrak{R}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}$, $\mathfrak{C}=\{Q_2\}$, $\mathfrak{G}=\{Q_1, P_1, P_2\}\cdot\{Q_2\}$.

4.III $P_1^p=P_2^p=Q_1^q=Q_2^q=1,\quad Q_1^{-1}P_1Q_1=P_2,\quad Q_2^{-1}P_1Q_2=P_1,$

$P_1P_2=P_2P_1,\quad Q_1Q_2=Q_2Q_1,\quad Q_1^{-1}P_2Q_1=P_1^{-hh^l}P_2^{h+h^l},\quad Q_2^{-1}P_2Q_2=P_2.$

$0\leqslant l<q$, $l\neq 1$; l принимает значения 0, $q-1$, а остальные — по одному из пары чисел l и l' таких, что $ll'\equiv 1 \pmod q$.

$p\equiv 1 \pmod q$.

Если $p\equiv -1 \pmod q$, то существует группа, соответствующая $l=q-1$, но h — из поля Галуа.

Если $l=0$, то $\mathfrak{R}=\{P_1^{-1}P_2\}$, $\mathfrak{C}=\{Q_2\}\cdot\{P_1^h P_2^{-1}\}$,

$$\mathfrak{G}=\{Q_1,\ P_1^{-1}P_2\}\cdot\{P_1^h P_2^{-1}\}\cdot\{Q_2\}.$$

Если $l\neq 0$, то $\mathfrak{R}=\{P_1\}\cdot\{P_2\}$, $\mathfrak{C}=Q_2\}$, $\mathfrak{G}=\{Q_1, P_1, P_2\}\cdot\{Q_2\}$.

4.IV $P_1^p = P_2^p = Q_1^q = Q_2^q = 1, \quad Q_1^{-1}P_1Q_1 = P_1^h, \quad Q_2^{-1}P_1Q_2 = P_1,$
$P_1P_2 = P_2P_1, \quad Q_1Q_2 = Q_2Q_1, \quad Q_1^{-1}P_2Q_1 = P_2, \quad Q_2^{-1}P_2Q_2 = P_2^h,$
$p \equiv 1 \pmod{q}, \quad \mathfrak{R} = \{P_1\} \cdot \{P_2\}, \quad \mathfrak{C} = 1, \quad \mathfrak{G} = \{P_1, Q_1\} \cdot \{P_2, Q_2\}.$

В заключение приношу глубокую благодарность Е. С. Ляпину и В. А. Тартаковскому за ценные указания и живейшее руководство моей работой.

Ленинградский госуд.
университет

Поступило
17. VI. 1940

ЛИТЕРАТУРА

[1] Hölder O., Die Gruppen der Ordnungen p^3, pq^2, pqr, p^4, Math. Ann., 43 (1893), 316.
[2] Hölder O., Die Gruppen mit der quadratfreier Ordnungszahl, Gött. Nachr., (1895), 211.
[3] Bagnera, Ann. di Math., (3) 1, (1898), 137.
[4] Schreier O., Über die Erweiterungen von Gruppen, I Teil, Monatshefte für Math. und Phys., 34, (1926).
[5] Schreier O., Über die Erweiterungen von Gruppen, II Teil, Abhandlung aus d. Math. Seminar der Hamb. Univ., IV, (1926), H. 3/4, 321.
[6] Liermann G., Endliche Gruppen, deren Kommutatorgruppenordnung eine Primzahl $p \neq 2$ ist, Berlin, 1939.

G. CHEISSIN. DIE KLASSIFIKATION VON GRUPPEN, DEREN ORDNUNG p^2q^2 IST

ZUSAMMENFASSUNG

In der vorliegenden Arbeit wird die Klassifikation von Gruppen, deren Ordnung p^2q^2 ist (p, q sind zwei ungleiche Primzahlen, $p^2q^2 \neq 36$) gegeben, dabei wird die volle Rekapitulation von bestimmenden Relationen für alle nichtisomorphen Gruppen gegeben. Der Verfasser benutzt die Schreiersche Methode der Erweiterungen von Gruppen.

Für die Klassifikation werden die Matrizeneigenschaften der Tabelle benutzt, die aus den Konstanten, welche in die bestimmenden Relationen eingehen, zusammengestellt ist. Die Matrizen aus diesen Konstanten werden zu einer bestimmten kanonischen Form umgebildet, und zwar so, dass zwei nichtisomorphe Gruppen verschiedenen Formen entsprechen, zwei isomorphen Gruppen aber—einer und derselben Form.

Die bestimmenden Relationen transformieren sich dabei gleichfalls zur kanonische Form. Die ausführlichen Resultate finden sich in den Tabellen des § 7.

СОДЕРЖАНИЕ ТОМА 4

Поправка

В списке трудов С. Н. Бернштейна (стр. 258) работа № 141 приведена ошибочно.

TABLES DES MATIÈRES DU TOME 4

Редактор **В. А. Толстиков** Техредактор **Е. Шнобель** Корректор **А. Н. Ошер**

Сдано в набор 14/X 1940 г. Подписано к печати 29/XI 1940 г.
А33738. $5^3/_4$ печ. л. Уч.-изд. л. 9,4. Уч.-а. л. 8,6. 49 000 зн. в п. л.
Формат 70×108 в $^1/_{16}$. Тираж 2300 экз. АНИ 2011 Заказ 1851.

16-я типография треста «Полиграфкнига», Москва, Трехпрудный, 9.